Základy matematiky — podzim 2009 — 1. opravný termín — 1.2.2010 — část 1

Jméno: ....

test	1	2	3	4

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Sjednocení dvou spočetných množin je spočetná množina.

(b) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je surjektivní $\implies$ f je surjektivní.

(c) **ano — ne** Existuje konečný nerázdný svaz, který není úplný svaz.

(d) **ano — ne** Relace ρ na množině A je tranzitivní právě tehdy, když $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

(e) **ano — ne** Pokud $(R, \leq)$ a $(S, \preceq)$ jsou neprázdné uspořádané množiny, pak existuje izotonní zobrazení z $(R, \leq)$ do $(S, \preceq)$.

(f) **ano — ne** Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \cup)$ grupa.

(g) **ano — ne** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je těleso.

2. (7 bodů) Definujte pojmy uspořádané množiny, svazu a úplného svazu. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Po úspěšném absolvování písemné zkoušky jde 5 studentek a 5 studentů k ústní zkoušce, kde se již rozhoduje pouze kterou ze známek A,B,C,D nebo E dostanou. Kolik je možností všech hodnocení studentů, pokud

(a) — (bez omezení);

(b) žádní dva studenti nedostanou stejnou známku a žádné dvě studentky nedostanou stejnou známku;

(c) je uděleno jedenkrát hodnocení A, dvakrát hodnocení B, třikrát C a čtyřikrát D?

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) uspořádané množiny, která obsahuje největší prvek a neobsahuje minimální prvek;

(b) uspořádání dvouprvkové množiny $\{a, b\}$, které je zároveň symetrickou relací;

(c) komutativního monoidu, který není grupou;

(d) množiny X takové, že $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ je dvouprvková množina;

(e) tříprvkové množiny $\mathcal{A}$ takové, že $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{N}$.

Základy matematiky — podzim 2009 — 1. opravný termín — 1.2.2010 — část 2

Jméno: ....

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Buď $\mathbb{Q}_0^+$ množina všech nezáporných racionálních čísel. Na množině $M = \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b, c) \circ (a', b', c') = (aa', ab' + bc', cc'), \qquad \text{pro } a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}_0^+.$$

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní.

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní.

Rozhodněte, zda existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Rozhodněte, zda je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť konečná množina A má 6 prvků. Určete kolik je bijekcí $f : A \to A$ s jedním pevným bodem, tj. bijekcí f takových, že množina $\{a \in A \mid f(a) = a\}$ je jednoprvková.

Určete kolik je bijekcí $f : A \to A$, pro které platí $f \circ f \circ f = id_A$.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x\rho y \iff (\exists k \in \mathbb{Z})(3k = x + y \vee 3k = x - y), \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$.

Popište rozklad $\mathbb{Z}\backslash\rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Buď $n \in \mathbb{N}$ a označme $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Dále uvažujme množinu M_n neprázdných podmnožin množiny A_n, tj. $M_n = \mathcal{P}(A_n) - \{\emptyset\}$. Pro prvek $X \in M_n$ definujeme $p(X)$ průměrnou hodnotu množiny X, přesněji pro k prvkovou neprázdnou množinu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq A_n$ označíme $p(X) = \frac{1}{k} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \in \mathbb{Q}$. Na množině M_n definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$X \preceq Y \quad \iff \quad (\ p(X) < p(Y) \ \vee \ X = Y\ ), \qquad \text{pro } X, Y \in M_n.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny M_n.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M_n, \preceq)$.

Pro která n je $(M_n, \preceq)$ lineárně uspořádaná množina?

Pro která n je $(M_n, \preceq)$ svaz?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď $M = \{\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ množina všech zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe, B její podmnožina tvořená všemi bijektivními zobrazeními. Pro libovolné zobrazení $\alpha \in M$ definujeme $\alpha^n \in M$, pro $n \in \mathbb{N}$, induktivně takto: $\alpha^1 = \alpha$ a $\alpha^n = \alpha^{n-1} \circ \alpha$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde $\circ$ je skládání zobrazení. Dále pro $\alpha \in M$ definujeme množinu $C_\alpha \subseteq \mathbb{N}$ následujícím způsobem:

$$C_\alpha = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(\alpha^k(x) = x)\} \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$(\forall \alpha \in M)(C_\alpha = \mathbb{N} \implies \alpha \in B) \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$(\forall \alpha \in M)(\ C_\alpha = \mathbb{N} \implies (\exists n \in \mathbb{N})(\alpha^n = id_{\mathbb{N}})\ ) \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$(\forall \alpha \in M)(\ (\exists n \in \mathbb{N})(\alpha^n = id_{\mathbb{N}}) \implies C_\alpha = \mathbb{N}\ ) \ .$$

Odpovědi zdůvodněte. (Připomínáme, že $0 \notin \mathbb{N}$.)