Základy matematiky — podzim 2009 — 2. termín — 18.1.2010 — část 1

Jméno: ....

test	1	2	3	4

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Každá uspořádaná množina má nejvýše jeden nejmenší prvek.

(b) **ano — ne** $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ je těleso.

(c) **ano — ne** Každá symetrická relace na dvouprvkové množině je tranzitivní.

(d) **ano — ne** Množina všech komplexních čísel $\mathbb{C}$ je spočetná.

(e) **ano — ne** Pokud v dané uspořádané množině existuje supremum prázdné množiny, pak je rovno nejmenšímu prvku.

(f) **ano — ne** Množina všech bijekcí z množiny A na sebe s operací skládání zobrazení je grupa.

(g) **ano — ne** Složení dvou injektivních zobrazení je injektivní zobrazení.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace mezi množinami A a B. Pomocí něj definujte formálně pojem zobrazení z množiny A do množiny B. Definujte pojmy injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení. Definujte pojem složení zobrazení.

3. (3krát 2 body) Kolik přirozených lichých čísel mezi 1 000 a 10 000 je

(a) dělitelných 5;

(b) dělitelných 11;

(c) s ciferným součtem 4.

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) množin X a Y takových, že $\mid \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \mid= 2$;

(b) izotonního zobrazení $f : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$, které není injektivní (zde $\leq$ je uspořádaní podle velikosti);

(c) uspořádané množiny, která má maximální prvek, nemá největší prvek a nemá minimální prvek;

(d) binární relace na tříprvkové množině $A = \{1, 2, 3\}$, která je reflexivní a není tranzitivní;

(e) binární operace na množině $\mathbb{Z}$ která je asociativní, ale nemá neutrální prvek.

Základy matematiky — podzim 2009 — 2. termín — 18.1.2010 — část 2

Jméno: ....

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$. Dokažte, že $\circ$ je asociativní operace.

Dokažte, že pro operaci $\circ$ existuje neutrální prvek.

Dokažte, že $(M, \circ)$ je grupa.

Uvažujme zobrazení $\alpha : M \to M$ dané předpisem $\alpha((x, y)) = (x + y, y)$, pro $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$. Rozhodněte, zda je α homomorfismus grupy $(M, \circ)$ do sebe.

Uvažujme zobrazení $\varphi : M \to M$ dané předpisem $\varphi((x, y)) = (x + y - 1, y)$, pro $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$. Rozhodněte, zda je φ homomorfismus grupy $(M, \circ)$ do sebe.

Odpovědi zdůvodněte.

(Pozn: $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel, tj. $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.)

6. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevně zvolené číslo a buď $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Určete počet všech binárních operací $\circ$ na množině M, pro které platí:

$$(\forall a, b \in M)(2 \mid a - b \implies 2 \mid a \circ b - a)\ .$$

Kolik z nich je komutativních?

Postup výpočtu komentujte.
(Pozn: Podmínka říká, že pokud mají dva prvky a, b stejnou paritu, má tutéž paritu i jejich součin $a \circ b$.)

7. (10 bodů) Na množině M všech nezáporných reálných čísel je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff \lfloor\, 10(x - \lfloor x \rfloor)\, \rfloor = \lfloor\, 10(y - \lfloor y \rfloor)\, \rfloor, \qquad \text{pro } x, y \in M.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M.

Popište rozklad $M \backslash \rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

(Pozn: Pro $r \in M \subseteq \mathbb{R}$ značí $\lfloor r \rfloor$ celou část čísla r, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno r.)

8. (10 bodů) Uvažujme množiny $A = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ nekonečná } \}$ a $B = A \cup \{\emptyset\}$. Inkluzi $\subseteq$ lze uvažovat jako relaci na obou množinách; přičemž $(A, \subseteq)$ i $(B, \subseteq)$ jsou zřejmě uspořádané množiny.

i) Popište minimální a maximální prvky v $(A, \subseteq)$.

ii) Popište minimální a maximální prvky v $(B, \subseteq)$.

iii) Pro libovolné $X, Y \in A$ popište $sup\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(A, \subseteq)$.

iv) Pro libovolné $X, Y \in B$ popište $sup\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(B, \subseteq)$.

v) Pro libovolné $X, Y \in A$ popište $inf\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(A, \subseteq)$.

vi) Pro libovolné $X, Y \in B$ popište $inf\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(B, \subseteq)$.

vii) Rozhodněte zda je $(A, \subseteq)$ svaz.

viii) Rozhodněte zda je $(A, \subseteq)$ úplný svaz.

ix) Rozhodněte zda je $(B, \subseteq)$ svaz.

x) Rozhodněte zda je $(B, \subseteq)$ úplný svaz.

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ je množina všech uspořádání na množině $\mathbb{N}$. Mějme zobrazení $f : \mathcal{U}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definované tak, že pro uspořádání $R \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ je $f(R)$ množina všech maximálních prvků v $(\mathbb{N}, R)$.
Popište minimální a maximální prvky v uspořádané množině $(\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Rozhodněte, zda je $(\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq)$ úplný svaz?

Rozhodněte, zda je zobrazení $f : (\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní.

Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathcal{U}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ surjektivní.

Odpovědi zdůvodněte.