Základy matematiky — podzim 2009 — 1. termín — 11.1.2010 — část 1

Jméno: ....

UČO: ....

test		Hodnocení				*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Množina $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ všech zobrazení z množiny přirozených císel do sebe je spočetná.

(b) **ano — ne** Existuje právě jedno zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do prázdné množiny.

(c) **ano — ne** Binární relace R na množině A je symetrická právě tehdy, když $R = R \cap R^{-1}$.

(d) **ano — ne** Pro libovolné uspořádané množiny $(A, \leq), (B, \leq)$ a bijekci $f : A \to B$ platí: f je izotonní $\implies$ f^{-1} je izotonní.

(e) **ano — ne** Každý prvek v uspořádané množině je buď minimální nebo maximální.

(f) **ano — ne** Pro každou spočetnou množinu A existuje uspořádání R takové, že uspořádaná množina (A, R) je úplný svaz.

(g) **ano — ne** Odčítání je binární operací na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$.

2. (7 bodů) Definujte formálně $\mathbb{Z}_n$ (množinu zbytkových tříd modulo n). Definujte operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_n$ a napište, co je třeba ukázat, aby tato definice byla korektní. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +)$ grupa a pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ těleso.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze na šachovnici 3×3 umístit tři modré, tři zelené a tři červené figurky tak, aby

(a) — (bez omezení);

(b) žádné dvě figurky stejné barvy nestály ve stejné řadě;

(c) žádné dvě figurky stejné barvy nestály ani ve stejné řadě ani ve stejném sloupci?

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) uspořádané množiny, která obsahuje prvek r takový, že r není maximální, minimální, největší ani nejmenší (zadejte ji Hasseovským diagramem a vyznačte prvek r);

(b) injektivního zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které není reflexivní relací;

(c) grupy $(G, \cdot)$ takové, že $(\forall g \in G)(g^{-1} = g)$;

(d) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y)| = 7$;

(e) konečné množiny $\mathcal{A}$ takové, že $\bigcap \mathcal{A}$ je nekonečná množina.

Základy matematiky — podzim 2009 — 1. termín — 11.1.2010 — část 2

Jméno: ....

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Na množině $M = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 3\}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$ pro $x, y \in M$. Dokažte, že $\circ$ je skutečně operace na množině M (tj. $x, y \in M \implies x \circ y \in M$).

Rozhodněte, zda je $\circ$ komutativní operace.

Rozhodněte, zda je $\circ$ asociativní operace.

Rozhodněte, zda existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Rozhodněte, zda je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť konečná množina A má 5 prvků. Určete kolik je bijekcí $f : A \to A$ bez pevných bodů, tj. bijekcí s vlastností $(\forall a \in A)(f(a) \neq a)$.

Určete kolik je bijekcí $f : A \to A$, které jsou inverzní samy k sobě (tj. $f = f^{-1}$).

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff (x^2 = y^2 \vee x^2 y^2 = 1), \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$.

Popište rozklad $\mathbb{R} \backslash \rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = \{(-2)^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$x \preceq y \iff (\exists k \in \mathbb{N})(y = k \cdot x), \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$.

Je $(M, \preceq)$ svaz?

Je identické zobrazení $id_M : M \to M$ izotonní zobrazení z $(M, \preceq)$ do $(M, \leq)$?

Je identické zobrazení $id_M : M \to M$ izotonní zobrazení z $(M, \leq)$ do $(M, \preceq)$?

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání racionálních čísel podle velikosti.)

9. (10 bodů) Buď $M = \{\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ množina všech zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe, S její podmnožina tvořená všemi surjektivními zobrazeními a dále I podmnožina množiny M tvořená všemi injektivními zobrazeními. Pro libovolné zobrazení $\alpha \in M$ definujeme $\alpha^n \in M$, pro $n \in \mathbb{N}$, induktivně takto: $\alpha^1 = \alpha$ a $\alpha^n = \alpha^{n-1} \circ \alpha$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde $\circ$ je skládání zobrazení. Dále pro $\alpha \in M$ definujeme množinu $C_\alpha \subseteq \mathbb{N}$ následujícím způsobem:

$$C_\alpha = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(\alpha^k(x) = x)\} \ .$$

Buď $\varphi : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zobrazení dané předpisem $\varphi(\alpha) = C_\alpha$.

Rohodněte, zda je zobrazení $\varphi : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ surjektivní.

Rohodněte, zda je zobrazení $\varphi|_S : S \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ surjektivní.

Rohodněte, zda je zobrazení $\varphi|_I : I \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ surjektivní.

Odpovědi zdůvodněte. (Připomínáme, že $0 \notin \mathbb{N}$.)