

Základy matematiky — podzim 2007 — 2. opravný termín — 6.2.2008

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Množina všech nekonečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$ je spočetná.
 - (b) **ano** — **ne** Pro libovolnou konečnou množinu A je každé surjektivní zobrazení z A do A zároveň injektivní zobrazení.
 - (c) **ano** — **ne** Každý svaz má nejmenší prvek.
 - (d) **ano** — **ne** Pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je identita na A izotonní zobrazení z $(A, \leq)$ do sebe.
 - (e) **ano** — **ne** Okruh $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 11 je těleso.
 - (f) **ano** — **ne** Pokud binární relace R a S na množině A jsou reflexivní, pak $R \cap S$ je také reflexivní relace.
 - (g) **ano** — **ne** Pokud A je jednoprvková množina a $\circ$ je binární operace na množině A , pak $(A, \circ)$ je komutativní grupa.
2. (7 bodů) Definujte pojem relace mezi množinami A, B . Pomocí něj definujte formálně pojem zobrazení z množiny A do množiny B . Definujte operace skládání zobrazení a skládání relací.
3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat 3 pole tak, aby
- (a) byla stejné barvy;
 - (b) byla ve stejném řádku;
 - (c) nebyla ve stejném sloupci?
4. (5krát 2 body) Udejte příklad
- (a) nekonečné množiny A a dvou různých uspořádání R_1 a R_2 na ní tak, aby identita (na množině A) byla izotonní zobrazení (A, R_1) do (A, R_2) ;
 - (b) binární operace na množině $\{a, b\}$, která není asociativní (ukážte, že skutečně není asociativní);
 - (c) reflexivní relace ρ na množině $\mathbb{N}$, která není relace ekvivalence a pro niž platí $\rho \circ \rho = \rho$;
 - (d) uspořádání $\preceq$ na množině $\mathbb{Z}$ takového, že $(\mathbb{Z}, \preceq)$ je úplný svaz;
 - (e) konečné množiny A takové, že počet jejích tříprvkových podmnožin je menší než počet jejích dvouprvkových podmnožin.
5. (10 bodů) Buď $k \in \mathbb{N}$ pevně zvolené číslo. Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac + kbd, ad + bc), \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Určete, pro která $k \in \mathbb{N}$ je $\circ$ asociativní operace.

Určete, pro která $k \in \mathbb{N}$ existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Určete, pro která $k \in \mathbb{N}$ je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechtě $k \in \mathbb{N}$, $M = \{1, 2, \dots, 2k\}$. Kolik je rozkladů množiny M , které mají právě k tříd a všechny třídy jsou dvouprvkové.
- Kolik je rozkladů množiny M , které mají právě 2 třídy a obě třídy jsou k -prvkové.
- Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární relace ρ takto:

$$a\rho b \iff (5 \mid a - b \wedge 2 \mid a + b).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$.

Popište rozklad $\mathbb{Z}/\rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = \{p^n \in \mathbb{N} \mid n, p \in \mathbb{N}, p \text{ prvočíslo}\} \cup \{0, 1\}$ definujeme binární relaci $\mid$ takto:

$$a \mid b \iff (\exists k \in \mathbb{N}_0)(b = ka), \quad \text{pro } a, b \in M.$$

Dokažte, že $\mid$ je uspořádání množiny M .

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \mid)$.

Je $(M, \mid)$ úplný svaz?

Pro které podmnožiny X množiny M existuje $\sup X$ a čemu se rovná?

Uvažujme zobrazení $f : M \rightarrow M$ dané předpisem $f(x) = x^2$.

Rozhodněte, zda $f : (M, \mid) \rightarrow (M, \mid)$ je izotonní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď $P = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \cup Y = \mathbb{N}, X \text{ konečná}\}$ a dále $P' = P \cup \{(\emptyset, \emptyset), (\mathbb{N}, \mathbb{N})\}$. Určete, zda je množina P spočetná nebo nespočetná.

Na množině P (resp. P') uvažujeme uspořádání $\preceq$ dané vztahem

$$(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subseteq X' \wedge Y \subseteq Y').$$

Určete minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(P, \preceq)$.

Určete $\sup\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)\}$ v $(P, \preceq)$ pro libovolné $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in P$.

Je $(P', \preceq)$ úplný svaz?

Odpovědi zdůvodněte.