Základy matematiky — podzim 2007 — 1. opravný termín — 30.1.2008

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Množina všech sudých celých čísel je spočetná.

(b) **ano — ne** Pro libovolnou množinu A existuje bijekce $f : A \to A$ různá od identity na A.

(c) **ano — ne** Pokud je každý prvek uspořádané množiny $(A, \leq)$ maximální, pak je každý prvek v $(A, \leq)$ minimální.

(d) **ano — ne** Existuje úplný svaz takový, že supremum prázdné množiny je rovno infimu prázdné množiny.

(e) **ano — ne** $(\mathbb{R}^+, +)$ je grupa.

(f) **ano — ne** Pokud je binární relace R na množině A relace ekvivalence, pak $R = R^{-1}$.

(g) **ano — ne** Libovolné zobrazení z množiny A do množiny $\mathcal{P}(A)$ je injektivní.

2. (7 bodů) Definujte pojmy uspořádané množiny a úplného svazu. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat dvě pole tak, aby

(a) bylo jedno bílé a jedno černé;

(b) nebyla ve stejném sloupci ani řádku;

(c) to byla sousední pole (tzn. měla společnou hranu)?

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) konečné uspořádané množiny $(A, \leq)$ a její podmnožiny $B \subseteq A$ takové, že $(A, \leq)$ je svaz a $(B, \leq)$ není svaz;

(b) binární operace na množině $\{a, b\}$, pro kterou neexistuje neutrální prvek;

(c) relací ρ a π na množině $\mathbb{N}$ takových, že $\rho \circ \pi = \rho$ a $\pi \circ \rho = \pi$;

(d) izotonního zobrazení z $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$;

(e) množiny $\mathcal{A}$ takové, že počet prvků množiny $\mathcal{A}$ je roven počtu prvků $\bigcup \mathcal{A}$.

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} - \{(0, 0)\}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa' + 3bb', ab' + a'b), \text{ pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Q}.$$

Víme, že $(M, \circ)$ je grupa. Uvažujme dále předpis $\varphi((a, b)) = a^2 - 3b^2$ a množiny $N_1 = \mathbb{Q}$, $N_2 = \mathbb{Q} - \{0\}$, $N_3 = \mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$.
Určete, zda φ je homomorfismus grupy $(M, \circ)$ do grupy $(N_1, \cdot)$.
Určete, zda φ je homomorfismus grupy $(M, \circ)$ do grupy $(N_2, \cdot)$.
Určete, zda φ je homomorfismus grupy $(M, \circ)$ do grupy $(N_3, \cdot)$.
Pro která $i = 1, 2, 3$ je $\varphi : M \to N_i$ izomorfismus grup?
Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Určete počet všech binárních operací $\circ$ na množině M, pro které platí: $(\forall a, b \in M)(a \circ b \geq a)$.
Kolik z nich je komutativních?
Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $M = \{2^a 3^b < 200 \mid a, b \in \mathbb{N}_0\}$ je definována binární relace ρ takto:

$$m \rho n \iff (\exists k \in \mathbb{Z})\ (m = 2^k n)\ .$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M.
Popište rozklad $M \backslash \rho$.
Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Pro libovolnou konečnou neprázdnou množinu X přirozených čísel označujeme $s(X)$ součet jejích prvků, tzn. pro n-prvkovou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ platí $s(X) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Podobně, $p(X)$ značí součin prvků množiny X.
Na množině $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ všech konečných neprázdných podmnožin množiny $\mathbb{N}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$X \preceq Y \iff (X = Y \vee s(X) < s(Y)), \quad \text{pro } X, Y \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}).$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.
Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \preceq)$.
Je $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \preceq)$ svaz?
Rozhodněte, zda je zobrazení $s : (\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \preceq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ izotonní.
Rozhodněte, zda je zobrazení $p : (\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \preceq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ izotonní.
Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů)

Buď $\mathcal{A} = (A, \preceq)$ uspořádaná množina. Označme

$$H(\mathcal{A}) = \{X \subseteq A \mid\ (\forall a \in A)\,(\forall x \in X)\,(a \preceq x \implies a \in X)\ \}.$$

Určete počet prvků množiny $H(\mathcal{A})$ v případě, kdy $\mathcal{A}$ je řetězec délky n, tj. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $\preceq$ je uspořádání čísel podle velikosti $\leq$.
Určete počet prvků množiny $H(\mathcal{A})$ v případě, kdy $\mathcal{A}$ je protiřetězec délky n, tj. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $\preceq$ je rovnost $=$.
Definujme dále zobrazení $\varphi : A \to H(\mathcal{A})$ předpisem $\varphi(x) = \{a \in A \mid a \preceq x\}$.
Rozhodněte, pro které uspořádané množiny $\mathcal{A} = (A, \preceq)$ je φ izotonní zobrazení z uspořádané množiny $\mathcal{A} = (A, \preceq)$ do uspořádané množiny $(H(\mathcal{A}), \subseteq)$.
Rozhodněte, pro které uspořádané množiny $\mathcal{A} = (A, \preceq)$ je zobrazení φ injektivní.
Rozhodněte, pro které uspořádané množiny $\mathcal{A} = (A, \preceq)$ je zobrazení φ surjektivní.
Odpovědi zdůvodněte.