Základy matematiky — podzim 2007 — 2. termín — 14.1.2008

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Množina všech relací ekvivalence na množině $\mathbb{N}$ je spočetná.

(b) **ano — ne** Pokud existuje injektivní zobrazení z neprázdné množiny A do množiny B, pak existuje surjektivní zobrazení z množiny B na množinu A.

(c) **ano — ne** Pokud v dané uspořádané množině existuje supremum prázdné množiny, pak je rovno největšímu prvku.

(d) **ano — ne** Je-li $f : A \to B$ izotonní zobrazení uspořádané množiny $(A, \leq)$ do uspořádané množiny $(B, \leq)$ a $a \in A$ je nejmenší prvek množiny $(A, \leq)$, pak $f(a) \in B$ je nejmenší prvek množiny $(B, \leq)$.

(e) **ano — ne** Okruh $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je obor integrity.

(f) **ano — ne** Pokud binární relace R a S na množině A jsou antisymetrické, pak $R \cup S$ je také antisymetrická relace.

(g) **ano — ne** Jádro zobrazení je antisymetrická relace.

2. (7 bodů) Definujte pojmy okruh, obor integrity a těleso. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze z přirozených čísel menších nebo rovných 20 vybrat dvouprvkovou množinu čísel tak, aby

(a) jejich součet byl roven sudému číslu;

(b) jejich součin byl roven sudému číslu;

(c) jejich součin byl větší než 10?

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) uspořádání na množině $\mathbb{R}$, kde je nekonečně mnoho minimálních prvků a žádný maximální prvek;

(b) binární operace na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pro kterou existuje neutrální prvek;

(c) relace ρ na množině $\mathbb{N}$ takové, že $\rho \circ \rho \neq \rho$;

(d) izotonního surjektivního zobrazení z $(\mathbb{Z}, \leq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$;

(e) konečných množin A, B takových, že počet dvouprvkových podmnožin množiny A je roven dvojnásobku počtu dvouprvkových podmnožin množiny B.

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} - \{(0, 0)\}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b), \text{ pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Q}.$$

Víme, že $(M, \circ)$ je grupa.
Určete neutrální prvek této grupy.
Pro libovolné $\ell \in \mathbb{Q}$ uvažujeme zobrazení $\varphi_\ell : M \to M$ dané předpisem $\varphi_\ell((a, b)) = (a, \ell b)$.
Určete, pro která ℓ je φ_ℓ homomorfismus.
Určete, pro která ℓ je φ_ℓ izomorfismus.
Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, 2, \dots, n\}$.
Určete počet všech relací R na množině M takových, že pro libovolné $a, b \in M$ splňující $a < b$ platí $(a, b) \in R$.
Určete počet všech reflexivních relací R na množině M.
Určete počet všech relací ekvivalence R na množině M takových, že pro libovolné $a, b, c \in M$ splňující $a < b < c$ platí $(a, c) \in R \implies (a, b) \in R$.
Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární relace ρ takto:

$$a\rho b \iff (a = b \vee (3 \mid a - b \wedge ab > 0)).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$.
Popište rozklad $\mathbb{Z}\backslash\rho$.
Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Definujme binární relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{N}_0$ takto:

$$x \preceq y \iff (x = y \vee y = 0 \vee (x \neq 0 \wedge x^2 < y)), \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{N}_0.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání na $\mathbb{N}_0$.
Popište minimální a maximální prvky $(\mathbb{N}_0, \preceq)$.
Je $(\mathbb{N}_0, \preceq)$ úplný svaz?
Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ dané předpisem $f(x) = x^2$.
Rozhodněte, zda $f : (\mathbb{N}_0, \preceq) \to (\mathbb{N}_0, \preceq)$ je izotonní zobrazení.
Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď $M = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid R \text{ relace ekvivalence na } \mathbb{N}, \mathbb{N}/R \text{ konečná }\}$.
Dokažte, že $(M, \subseteq)$ je svaz.
Uvažujme dále zobrazení $f : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dané vztahem $f(R) = \{a \in \mathbb{N} \mid (1, a) \in R\}$.
Rozhodněte, zda pro zobrazení f z uspořádané množiny $(M, \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ platí

$$(\forall R, S \in M)\ (\ f(\inf\{R, S\}) = \inf\{f(R), f(S)\}\ )\ .$$

Rozhodněte, zda pro zobrazení f z uspořádané množiny $(M, \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ platí

$$(\forall R, S \in M)\ (\ f(\sup\{R, S\}) = \sup\{f(R), f(S)\}\ )\ .$$

Odpovědi zdůvodněte.