Základy matematiky — podzim 2007 — 1. termín — 3.1.2008

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Množina všech relací na množině $\mathbb{N}$ je nespočetná.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolnou množinu A je každé injektivní zobrazení z A do A zároveň surjektivní zobrazení.

(c) **ano** — **ne** Existuje surjektivní izotonní zobrazení z $(\mathbb{N}, \leq)$ na $(\mathbb{Z}, \leq)$.

(d) **ano** — **ne** Uspořádaná množina $(\mathbb{N}, |)$ je svaz.

(e) **ano** — **ne** $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ je okruh.

(f) **ano** — **ne** Pokud je binární relace R na množině A relace ekvivalence, pak $R \circ R = R$.

(g) **ano** — **ne** Je-li $(G, \cdot)$ grupa, pak zobrazení $f : G \to G$, dané vztahem $f(a) = a^{-1}$ pro $a \in G$, je bijekce z množiny G do sebe.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a rozklad množiny A podle relace ekvivalence. Zkonstruujte, pomocí těchto pojmů, množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$ z množiny celých čísel $\mathbb{Z}$. (*Pouze množinu $\mathbb{Q}$, definice operací se nepožadují.*)

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze rozesadit 3 manželské páry do řady (s 6 židlemi) tak, aby

(a) každý muž seděl vedle své manželky;

(b) neseděli 2 ženy ani 2 muži vedle sebe;

(c) žádná žena neseděla na kraji?

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) izotonního surjektivního zobrazení z $(\mathbb{Q}, \leq)$ do $(\mathbb{Z}, \leq)$;

(b) binární operace na množině $\mathbb{N}$, která není asociativní;

(c) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{Q}$ takové, že $\mathbb{Q}/\rho$ má nekonečně mnoho tříd a každá třída je nekonečná;

(d) uspořádání na množině $\mathbb{N}$, které nemá žádný maximální ani minimální prvek;

(e) konečné množiny A takové, že počet jejích dvouprvkových podmnožin je roven počtu jejích tříprvkových podmnožin.

5. (10 bodů) Buď n přirozené číslo, $n \geq 2$. Na množině $M = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b, c) \circ (a', b', c') = (a + a', b + c \cdot a' + b', c + c'), \qquad \text{pro } a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Z}_n.$$

Poznamenejme, že daný předpis korektně definuje operaci na množině M, protože $+$ a $\cdot$ jsou standardní operace sčítání a násobení na množině $\mathbb{Z}_n$.
Určete, pro která n je $\circ$ asociativní operace.
Určete, pro která n existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.
Určete, pro která n je $(M, \circ)$ grupa.
Určete, pro která n je $(M, \circ)$ komutativní grupa.
Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina, $n \geq 3$. Uspořádání $\leq$ na množině M se nazývá jednoduché, jestliže každý prvek pokrývá nejvýše jeden prvek a zároveň každý prvek je pokrýván nejvýše jedním prvkem. Řekneme, že uspořádání $\leq$ na množině M je k-jednoduché, jestliže je jednoduché a $(M, \leq)$ má právě k minimálních prvků.
Určete, kolik je 2-jednoduchých uspořádání množiny M.
Určete, kolik je 3-jednoduchých uspořádání množiny M.
Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Označme $M = \mathbb{Z} - \{0\}$. Na množině $M \times M$ je definována binární relace ρ takto:

$$(a, b)\rho(c, d) \iff (ad = bc \wedge ab = cd).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $M \times M$.
Popište rozklad $M \times M \backslash \rho$.
Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = \{p^n \in \mathbb{N} \mid n, p \in \mathbb{N}, p \text{ prvočíslo } \}$ definujeme binární relaci $\mid$ takto:

$$a \mid b \iff (\exists k \in \mathbb{N})(b = ka) \;, \qquad \text{pro } a, b \in M.$$

Dokažte, že $\mid$ je uspořádání množiny M.
Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \mid)$.
Je $(M, \mid)$ svaz?
Popište všechny podmnožiny A množiny M s vlastností, že $(A, \mid)$ je svaz.
Uvažujme zobrazení $f : M \to \mathbb{N}$ dané předpisem $f(p^n) = p + n$, kde $n, p \in \mathbb{N}$, p prvočíslo.
Rozhodněte, zda $f : (M, \mid) \to (\mathbb{N}, \leq)$ je izotonní zobrazení.
Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Uvažujeme množinu $I = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\forall n, m \in \mathbb{N})(n < m \implies f(n) < f(m))\}$ (všech injektivních izotonních zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe).
Dokažte, že I je nespočetná, tj. dejte příklad injektivního zobrazení $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to I$.
Dále definujme zobrazení $\varphi : I \to I$ vztahem

$$(\varphi(f))(n) = \sum_{j=1}^{n} f(j).$$

Rohodněte, zda je zobrazení φ injektivní.
Rohodněte, zda je zobrazení φ surjektivní.
Odpovědi zdůvodněte.