

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
 Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):
 - (a) **ano** — **ne** Existuje bijekce z množiny \mathbb{Q} do množiny \mathbb{N} .
 - (b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ platí: pokud $g \circ f$ je surjektivní, pak f nebo g je surjektivní.
 - (c) **ano** — **ne** Uspořádané množiny (\mathbb{Q}, \leq) a (\mathbb{R}, \leq) jsou izomorfní.
 - (d) **ano** — **ne** Každý svaz má nejmenší prvek.
 - (e) **ano** — **ne** Číslo 0 je neutrální prvek v grupoidu $(\mathbb{Z}, -)$.
 - (f) **ano** — **ne** Pokud je binární relace R na množině A tranzitivní, pak R^{-1} je také tranzitivní.
 - (g) **ano** — **ne** Existuje jediný izomorfismus uspořádané množiny (\mathbb{N}, \leq) do sebe.

2. (7 bodů) Definujte pojem rozkladu množiny A . Definujte pojmy relace ekvivalence na množině A a rozkladu příslušného této relaci (tzv. faktorová množina). Definujte pojem projekce na faktorovou množinu příslušnou dané relaci ekvivalence.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den (6 různých vyučovacích hodin),
 - (a) má-li být tělesná výchova až poslední;
 - (b) má-li být tělesná výchova po matematice;
 - (c) má-li být tělesná výchova bezprostředně po matematice.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad
 - (a) izotonního zobrazení z (\mathbb{R}, \leq) do (\mathbb{Q}, \leq) ;
 - (b) nespočetné množiny a její spočetné podmnožiny;
 - (c) nekonečného tělesa;
 - (d) relací ρ a σ na množině \mathbb{N} takových, že $\rho \circ \sigma = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \neq \sigma \circ \rho$;
 - (e) uspořádání pětiprvkové množiny, kde 2 prvky jsou maximální, 2 prvky jsou minimální a existuje prvek srovnatelný se všemi ostatními.

5. (10 bodů) Označme $M_1 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $M_2 = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$, $M_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ a $M_4 = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$. Uvažme předpis $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$.
 Pro které z množin M_1, M_2, M_3, M_4 daný předpis korektně definuje operaci na dané množině?
 Pro které z nich je tato operace asociativní?
 Pro které z nich existuje neutrální prvek?
 Pro které se jedná o grupu?
 Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, \dots, n\}$ a $B = \{1, 2, \dots, n+k\}$. Určete počet všech injektivních zobrazení z množiny A do množiny B .
 Kolik z nich je navíc izotonními zobrazeními z (A, \leq) do (B, \leq) , kde \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.
 Určete počet všech izotonních zobrazení z (A, \leq) do (B, \leq) .
 Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Na množině \mathbb{R} je definována binární relace ρ vztahem

$$x\rho y \iff (\exists k \in \mathbb{N})(x^k = y^k).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině \mathbb{R} .

Popište rozklad $\mathbb{R} \setminus \rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině \mathbb{R} definujeme binární relaci \preceq takto:

$$p \preceq q \iff (p \leq q \wedge \lfloor p^3 \rfloor = \lfloor q^3 \rfloor) \quad \text{pro } p, q \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že \preceq je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny (\mathbb{R}, \preceq) .

Je (\mathbb{R}, \preceq) svaz?

Rozhodněte, zda $id_{\mathbb{R}}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny (\mathbb{R}, \preceq) do uspořádané množiny (\mathbb{R}, \leq) .

Rozhodněte, zda $id_{\mathbb{R}}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny (\mathbb{R}, \leq) do uspořádané množiny (\mathbb{R}, \preceq) .

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \leq je uspořádání reálných čísel podle velikosti, $\lfloor p \rfloor$ značí celou část čísla p .)

9. (10 bodů) Buď A libovolná neprázdná množina. Na množině $M = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$ definujeme binární relaci \preceq takto:

$$(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subseteq X' \wedge Y \subseteq Y').$$

Dále je dáno zobrazení $\varphi : M \rightarrow M$ předpisem $\varphi((X, Y)) = (Y - X, Y)$.

Je zobrazení $\varphi : (M, \preceq) \rightarrow (M, \preceq)$ izotonní?

Je zobrazení $\varphi : M \rightarrow M$ injektivní?

Je zobrazení $\varphi : M \rightarrow M$ surjektivní?

Odpovědi zdůvodněte.