Základy matematiky — podzim 2006 — 1. termín — 5.1.2007

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: pokud $g \circ f$ je injektivní, pak f nebo g je injektivní.

(b) **ano — ne** Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje uspořádání R množiny $\mathbb{N}$ takové, že n je největší prvek uspořádané množiny $(\mathbb{N}, R)$.

(c) **ano — ne** Má-li podmnožina uspořádané množiny infimum, pak má i supremum.

(d) **ano — ne** Pro libovolné prvočíslo n je $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ grupa.

(e) **ano — ne** Pokud binární relace R na množině A je reflexivní, pak R^{-1} je také reflexivní.

(f) **ano — ne** Existuje jediný izomorfismus uspořádané množiny $(\mathbb{Z}, \leq)$ na sebe.

(g) **ano — ne** Množina všech bijekcí množiny $\mathbb{N}$ do sebe je spočetná.

2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A. Definujte všechny užité pojmy. Definujte pojmy maximálního a největšího prvku. Jaký vztah je mezi těmito prvky. Definujte pojem infima podmnožiny uspořádané množiny.

3. (3krát 2 body) Házíme zároveň bílou, zelenou a černou hrací kostkou. Každá má 6 stěn očíslovaných čísly $1, 2, 3, 4, 5$ a 6. Kolik

(a) různých výsledků můžeme dostat;

(b) různých výsledků, kde na bílé kostce je větší číslo než na černé, můžeme dostat;

(c) je těch výsledků, při nichž je součet čísel roven 16.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) nekonečné, nespočetné uspořádané množiny;

(b) konečného tělesa;

(c) izotonního zobrazení z $(\mathbb{Z}, \leq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$;

(d) relací $\rho \neq \sigma$ na množině $M = \{a, b\}$ takových, že $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

(e) uspořádání pětiprvkové množiny, kde 2 prvky jsou maximální, 3 prvky jsou minimální a každý maximální prvek je větší než libovolný minimální.

5. (10 bodů) Buď n přirozené číslo a dále $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Na množině $M = I \times I \cup \{0\}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahy

$$x \circ 0 = 0 \circ x = 0 \qquad \text{pro libovolné } x \in M;$$

$$(i, j) \circ (k, l) = \begin{cases} (i, l), & j \leq k \\ 0, & j > k \end{cases} \qquad \text{pro libovolné } i, j, k, l \in I.$$

Dokažte, že operace $\circ$ je vždy asociativní.

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je operace $\circ$ komutativní.

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Určete počet všech dvojic množin (A, B), takových, že $A \subseteq M$, $B \subseteq M$ a $A \cap B$ má nejvýše dva prvky.

Kolik z nich je takových, že $A \cup B = M$?

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je definována binární relace ρ takto: $X \rho Y \iff$

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y) \;\wedge\; (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y \leq x).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Popište rozklad $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

(Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

8. (10 bodů) Na množině $\mathbb{N}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$k \preceq m \iff (k \mid m \wedge (\exists a \in \mathbb{N})(m \mid k^a)), \qquad \text{pro } k, m \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \preceq)$.

Je $(\mathbb{N}, \preceq)$ úplný svaz?

Je $(\mathbb{N}, \preceq)$ svaz?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď $n \in \mathbb{N}$ a položme $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Na množině $\mathcal{P}(A)$ definujeme relaci $\preceq$ takto: pro $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ je $X \preceq Y$ právě tehdy, když

$$\text{existuje injektivní zobrazení} \quad f : X \to Y \quad \text{splňující} \quad (\forall x \in X)(x \leq f(x)).$$

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \preceq)$.

Rozhodněte, zda $id_{\mathcal{P}(A)}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \preceq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Rozhodněte, zda $id_{\mathcal{P}(A)}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \preceq)$.

Je $(\mathcal{P}(A), \preceq)$ úplný svaz?

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\subseteq$ značí inkluzi.)