

Základy matematiky — podzim 2005 — 2. opravný termín — 25.1.2006

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Mezi množinami \mathbb{R} a \mathbb{N} existuje bijekce.
- (b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ platí: $g \circ f$ je bijektivní $\implies f, g$ jsou bijektivní.
- (c) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je antisymetrická právě tehdy, když $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$.
- (d) **ano** — **ne** Má-li uspořádaná množina (A, \leq) nejmenší prvek, pak (A, \geq) má také nejmenší prvek.
- (e) **ano** — **ne** Množina všech izotonních zobrazení uspořádané množiny (A, \leq) do sebe spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu.
- (f) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}, -)$ je monoid.
- (g) **ano** — **ne** Ke každému prvku grupy existuje nejvýše jeden prvek inverzí.
2. (7 bodů) Definujte pojem rozkladu množiny A . Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a rozklad příslušného této relaci (tzv. faktorová množina). Definujte pojem jádra zobrazení.
3. (3krát 2 body) Určete počet všech slov délky 6, která jsou sestavena z písmen a, b, c, d takových, že
- (a) některá skupina bezprostředně po sobě jdoucích písmen je $abcd$;
- (b) se nezmění, pokud jsou čtena odzadu;
- (c) všechna písmena jsou použita.
4. (5krát 2 body) Udejte příklad
- (a) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)| = 5$;
- (b) pětiprvkové uspořádané množiny, která má právě jeden maximální, právě jeden minimální, právě jeden největší a právě jeden nejmenší prvek;
- (c) surjektivního zobrazení $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$;
- (d) relace na množině \mathbb{Z} , která je antisymetrická i symetrická, ale není reflexivní;
- (e) binární operace na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která má neutrální prvek (uved'te ho).

5. (10 bodů) Na množině \mathbb{Z} definujeme binární operaci \circ vztahem

$$a \circ b = a + b - ab, \text{ pro } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Rozhodněte, zda je operace \circ asociativní. Rozhodněte, zda je operace \circ komutativní. Je (\mathbb{Z}, \circ) grupa? Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n -prvková množina. Určete počet všech binárních operací na množině M , pro které existuje neutrální prvek. Kolik z nich je komutativních?
7. (10 bodů) Na množině \mathbb{R} je definována binární relace ρ vztahem

$$x\rho y \iff (x = y \vee xy > 0) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině \mathbb{R} . Popište rozklad $\mathbb{R} \setminus \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Uvažujme množinu $M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ konečná}, 1 \in X\}$ uspořádanou inkluzí \subseteq . Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny (M, \subseteq) . Nalezněte nejmenší a největší prvek uspořádané množiny (M, \subseteq) . Je (M, \subseteq) úplný svaz? Je (M, \subseteq) svaz? Rozhodněte, zda zobrazení $g : M \rightarrow \mathbb{N}$, definované předpisem $g(\{r_1, r_2, \dots, r_k\}) = r_1 + r_2 + \dots + r_k$, je izotonní zobrazení z uspořádané množiny (M, \subseteq) do uspořádané množiny (\mathbb{N}, \leq) . Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)
9. (10 bodů) Na množině $S = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ surjektivní}\}$ (všech surjektivních zobrazení z množiny \mathbb{N} do sebe) definujeme uspořádání \preceq takto:

$$f \preceq g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)), \quad \text{pro } f, g \in S.$$

Dále definujeme zobrazení $\varphi : S \rightarrow S$ vztahem $\varphi(f) = f \circ f$.

Dokažte, že skládání zobrazení je operací na množině S , tj. $f, g \in S \implies g \circ f \in S$. Rozhodněte, zda je zobrazení φ injektivní. Rozhodněte, zda je zobrazení φ surjektivní. Rozhodněte, zda φ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny (S, \preceq) do sebe.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)