Základy matematiky — podzim 2005 — 1. opravný termín — 18.1.2006

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ existuje bijekce.

(b) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C, injektivní zobrazení $f : A \to B$ a surjektivní zobrazení $g : B \to C$ je zobrazení $g \circ f$ bijekcí.

(c) **ano — ne** Každá konečná uspořádaná množina má alespoň jeden minimální prvek.

(d) **ano — ne** Relace ρ na množině A je reflexivní právě tehdy, když $\rho \circ \rho^{-1} \subseteq \rho$.

(e) **ano — ne** Je-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ úplný svaz, pak pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ je uspořádaná množina $(B, \leq)$ také úplný svaz.

(f) **ano — ne** $\emptyset$ je neutrální prvek monoidu $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \cap)$.

(g) **ano — ne** zobrazení $f : (\mathbb{R} - \{0\}) \to (\mathbb{R} - \{0\})$ dané předpisem $f(r) = |r|$ je homomorfismus grupy $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ do sebe.

2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A. Definujte pojem izotonního zobrazení mezi uspořádanými množinami a pojem izomorfismu uspořádaných množin. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Určete počet všech přirozených čtyřciferných čísel

(a) sestavených z cifer 7 a 9;

(b) sestavených z cifer $0, 1, 2, 3, 4, 5$ a která jsou menší než 3000;

(c) sestavených ze dvou různých lichých cifer.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y)| = 3$;

(b) uspořádané pětiprvkové množiny, která má 4 maximální a 3 minimální prvky;

(c) relace na tříprvkové množině, která není tranzitivní a současně není ani injektivní zobrazení;

(d) relace na $\mathbb{N}$, která je antisymetrická, ale není tranzitivní;

(e) binární operace na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není asociativní ani komutativní

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b) \circ (a', b') = (a + a' - 1, bb'), \text{ pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Z}.$$

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní. Je $(M, \circ)$ grupa? Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina. Určete počet všech trojic množin (A, B, C) takových, že $A \subseteq B \subseteq C \subseteq M$. Kolik z nich je takových, že $A \neq B$? Kolik z nich je takových, že $A \neq C$?

7. (10 bodů) Na množině „celých“ komplexních čísel $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$(a + bi)\rho(a' + b'i) \iff a + b = a' + b' \quad \text{pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M. Popište rozklad $M \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ definujeme binární relace ρ_1, ρ_2, ρ_3 takto:

$$\begin{aligned}
X\rho_1 Y &\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y), &&\text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N};\\
X\rho_2 Y &\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x = y), &&\text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N};\\
X\rho_3 Y &\iff (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leq y), &&\text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda ρ_1, resp. ρ_2, resp. ρ_3 je uspořádání. Odpověď zdůvodněte. V případě kladné odpovědi:
nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny (M, ρ_i). rozhodněte zda je (M, ρ_i) úplný svaz? (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

9. (10 bodů) Na množině $M = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ (všech zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe) definujeme uspořádání $\preceq$ takto:

$$f \preceq g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)), \qquad \text{pro } f, g \in M.$$

Dále označme $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ množinu všech relací ekvivalence na množině $\mathbb{N}$ a definujme zobrazení $\varphi : M \to \mathcal{E}(\mathbb{N})$ vztahem $\varphi(f) = J_f$ přiřazující zobrazení f jeho jádro.

Popište nejmenší a největší prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$, resp. $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Rohodněte, zda je zobrazení φ injektivní. Rohodněte, zda je zobrazení φ surjektivní. Rohodněte, zda φ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(M, \preceq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)