Základy matematiky — podzim 2005 — 1. termín — 5.1.2006

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Mezi množinami $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ existuje bijekce.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: f, g jsou surjektivní $\implies$ $g \circ f$ je surjektivní.

(c) **ano** — **ne** Každá lineárně uspořádaná množina má největší prvek.

(d) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je symetrická právě tehdy, když $\rho \subseteq \rho^{-1}$.

(e) **ano** — **ne** Je-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ úplný svaz, pak $(A, \geq)$ je také úplný svaz.

(f) **ano** — **ne** $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \cap)$ je monoid.

(g) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je těleso.

2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A. Definujte pojem infima a suprema podmnožiny množiny A. Definujte všechny užité pojmy. Určete, co je infimem prázdné podmnožiny.

3. (3krát 2 body) Určete počet všech slov, která lze vytvořit z písmen slova BEROUNKA (každé písmeno se použije právě jednou) takových, že

(a) některá skupina bezprostředně po sobě jdoucích písmen tvoří slovo BERAN;

(b) žádné dvě samohlásky nestojí vedle sebe;

(c) samohlásky jsou seřazeny podle abecedy.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) množin X a Y takových, že $\mathcal{P}(X) \cup Y = \mathcal{P}(Y) - Y$;

(b) uspořádané množiny, která má právě 6 automorfismů (tj. izomorfismů do sebe);

(c) zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe, které není surjektivní a je injektivní;

(d) relace na množině $\mathbb{N}$, která je antisymetrická i symetrická;

(e) binární operace na $\mathbb{Z}$, která je komutativní, ale nemá neutrální prvek.

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b), \text{ pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Q}.$$

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní. Je $(M, \circ)$ grupa? Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina. Určete počet všech dvojic množin (A, B), takových, že $A \subseteq B \subseteq M$. Kolik z nich je takových, že $A \neq B$?

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{3} \right\rfloor \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$. Popište rozklad $\mathbb{Z}\backslash\rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy. (Pozn: $\lfloor a \rfloor$ značí celou část čísla a, tj. největší celé číslo nepřevyšující číslo a.)

8. (10 bodů) Na množině $M = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$(a,b) \preceq (a',b') \iff (a' \leq a \wedge b \leq b'), \qquad \text{pro } a,b,a',b' \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$. Je $(M, \preceq)$ úplný svaz? Je $(M, \preceq)$ svaz? Určete $sup\{(a,b),(a',b')\}$ Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

9. (10 bodů) Na množině $I = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\forall n,m \in \mathbb{N})(n \leq m \implies f(n) \leq f(m))\}$ (všech izotonních zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe) definujeme uspořádání $\preceq$ takto:

$$f \preceq g \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)), \qquad \text{pro } f,g \in I.$$

Dále definujme zobrazení $\varphi : I \to I$ vztahem $\varphi(f) = f \circ f$.

Dokažte, že skládání zobrazení je operací na množině I, tj. $f,g \in I \implies g \circ f \in I$. Rohodněte, zda je zobrazení φ injektivní. Rohodněte, zda je zobrazení φ surjektivní. Rohodněte, zda φ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(I, \preceq)$ do sebe.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)