Základy matematiky — podzim 2004 — 1. opravný termín — 20.1.2005

1. (8krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ všech podmnožin množiny přirozených čísel je spočetná.

(b) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je surjektivní $\implies$ f je surjektivní.

(c) **ano — ne** Pro libovolnou binární relaci R na množině A je relace $R \cap R^{-1}$ symetrická.

(d) **ano — ne** Pokud v uspořádané množině $(A, \leq)$ existuje minimální prvek, pak v ní existuje i prvek maximální.

(e) **ano — ne** Uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(\mathbb{Z}, \leq)$ jsou izomorfní.

(f) **ano — ne** Je-li $f : A \to B$ izotonní zobrazení uspořádaných množin $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$, pak platí: $(A, \leq)$ je úplný svaz $\implies$ $(B, \leq)$ je úplný svaz.

(g) **ano — ne** Grupa $(\mathbb{R}, +)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

(h) **ano — ne** Každé těleso je obor integrity.

2. (7 bodů) Definujte pojmy okruh, obor integrity a těleso. Definujte všechny užité pojmy.

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{N}$ tak, aby rozklad $\mathbb{N}/\rho$ měl nekonečně mnoho tříd rozkladu;

(b) bijektivního zobrazení $f : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$, které není izotonní (zde $\leq$ je uspořádaní podle velikosti);

(c) uspořádané množiny, která má jeden maximální prvek a nemá minimální prvek;

(d) množiny A takové, aby počet všech binárních relací na množině A byl 2^4;

(e) šestiprvkové grupy.

4. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem $(a, b) \circ (c, d) = (a + c, ac + b + d)$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní. Je $(M, \circ)$ grupa? Odpovědi zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť konečná množina A má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. Určete kolik je komutativních binárních operací na množině A. Výpočet komentujte.

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem $x \rho y \iff (x^2 = y^2 \vee x^2 y^2 = 1)$, pro $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$. Popište rozklad $\mathbb{R} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

7. (10 bodů) Nechť k, n jsou přirozená čísla a $A = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Označme $P = \{X \subseteq A \mid 0 \in X,\ |X| \leq k\} \cup \{A\}$. Popište nejmenší a největší prvek uspořádané množiny $(P, \subseteq)$. Je $(P, \subseteq)$ úplný svaz? Pro libovolné $X, Y \in P$ popište $sup\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(P, \subseteq)$. Nechť $f : P \to \mathbb{N}$ je zobrazení dané vztahem $f(X) = |X|$. Rozhodněte, zda je $f : (P, \subseteq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ izotonní zobrazení. Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti, $|X|$ je počet prvků konečné množiny X.)

8. (10 bodů) Na množině $I = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq) \text{ izotonní } \}$ všech izotonních zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe definujeme uspořádání $\preceq$ takto: $f \preceq g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n))$, pro $f, g \in I$. Rozhodněte, zda pro libovolná zobrazení $f, g, h \in I$ platí $(f \preceq g \implies h \circ f \preceq h \circ g)$. Nalezněte všechna zobrazení $z \in I$ pro než platí $(\forall f \in I)(f \circ z = z)$. Rohodněte, zda je $(I, \preceq)$ úplný svaz. Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)