Základy matematiky — podzim 2004 — 2. termín — 13.1.2005

1. (8krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Množina $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ všech zobrazení z množiny přirozených čísel do sebe je spočetná.

(b) **ano** — **ne** Existuje právě jedno zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do prázdné množiny.

(c) **ano** — **ne** Binární relace R na množině A je symetrická právě tehdy, když $R = R \cap R^{-1}$.

(d) **ano** — **ne** Pro libovolné uspořádané množiny $(A, \leq), (B, \leq)$ a bijekci $f : A \to B$ platí: f je izotonní $\implies$ f^{-1} je izotonní.

(e) **ano** — **ne** Každý prvek v uspořádané množině je buď minimální nebo maximální.

(f) **ano** — **ne** Pro každou neprázdnou množinu A existuje uspořádání R takové, že (A, R) je úplný svaz.

(g) **ano** — **ne** Odčítání je binární operací na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$.

(h) **ano** — **ne** Podokruh oboru integrity je obor integrity.

2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádané množiny a úplného svazu. Definujte všechny užité pojmy.

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) čtyřprvkové uspořádané množiny, jejíž všechny prvky jsou maximální;

(b) surjektivního zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, které není injektivní;

(c) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{Z}$ tak, aby rozklad $\mathbb{Z}/\rho$ měl 3 třídy rozkladu a každá třída měla nekonečně mnoho prvků;

(d) binární operace na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není asociativní;

(e) uspořádání na množině komplexních čísel $\mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Na množině všech podmnožin množiny přirozených čísel $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uvažujeme binární operace symetrického rozdílu $\div$ a průniku $\cap$ o nichž víme, že jsou asociativní. Rozhodněte, zda $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div, \cap)$ je okruh, či dokonce těleso. Odpověd zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť konečná množina A má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Určete kolik je uspořádání $\leq$ množiny A takových, že v množině $(A, \leq)$ jsou právě dva prvky maximální, právě $n-2$ prvků je minimálních, přičemž každý prvek je buď maximalní nebo minimální.

6. (10 bodů) Na množině komplexních čísel $\mathbb{C}$ je definována binární relace ρ vztahem $x \rho y \iff x^3 = y^3$, pro $x, y \in \mathbb{C}$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{C}$. Popište rozklad $\mathbb{C} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

7. (10 bodů) Nechť $M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ nekonečná } \}$. Je $(M, \subseteq)$ úplný svaz? Je $(M \cup \{\emptyset\}, \subseteq)$ úplný svaz? Pro libovolné $X, Y \in M$ popište $inf\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(M \cup \{\emptyset\}, \subseteq)$. Odpovědi zdůvodněte.

8. (10 bodů) Buď dána množina $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Na množině M definujeme uspořádání $\preceq$ takto:

$$(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subset X' \vee (X = X' \wedge Y \subseteq Y')), \qquad \text{pro } X, Y, X', Y' \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Definujme dále zobrazení $f : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ předpisem $f((X, Y)) = X \cap Y$. Rozhodněte, zda je zobrazení f surjektivní. Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní. Je toto zobrazení $f : (M, \preceq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní? Rozhodněte, zda je $(M, \preceq)$ úplný svaz.
Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: Zápisem $X \subset X'$ rozumíme $X \subseteq X' \wedge X \neq X'$.)