Základy matematiky — podzim 2004 — 1. termín — 6.1.2005

1. (8krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Každá podmnožina množiny $\mathbb{R}$ je buď konečná nebo spočetná.

(b) **ano — ne** Jádro zobrazení $f : A \to B$ je symetrická relace na množině A.

(c) **ano — ne** Pro libovolnou binární relaci R na neprázdné množině A a pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí právě jeden ze vztahů aRb, $aR^{-1}b$.

(d) **ano — ne** Pro libovolné uspořádané množiny $(A, \leq), (B, \leq), (C, \leq)$ a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je izotonní $\implies$ f je izotonní.

(e) **ano — ne** Je-li R uspořádání množiny A, pak $R \cap R^{-1}$ je též uspořádání množiny A.

(f) **ano — ne** Je-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ úplný svaz, pak $(A, \geq)$ je také úplný svaz.

(g) **ano — ne** Prázdná množina je podgrupou každé grupy.

(h) **ano — ne** Okruh $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 6 je obor integrity.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a rozklad množiny A podle relace ekvivalence. Zkonstruujte, pomocí těchto pojmů, množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$ z množiny celých čísel $\mathbb{Z}$. (*Pouze množinu $\mathbb{Q}$, definice operací se nepožadují.*)

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)| = 2$;

(b) izotonního zobrazení $f : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$, které není injektivní (zde $\leq$ je uspořádaní podle velikosti);

(c) uspořádané množiny, která má maximální prvek, nemá největší prvek a nemá minimální prvek;

(d) binární relace na tříprvkové množině $A = \{1, 2, 3\}$, která je reflexivní a není tranzitivní;

(e) binární operace na množině $\mathbb{Z}$ která je asociativní, ale nemá neutrální prvek.

4. (10 bodů) Buď $\mathbb{R}^+$ množina všech kladných reálných čísel. Na množině $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem $(a, b, c) \circ (a', b', c') = (aa', ab' + bc', cc')$, pro $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}^+$. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní. Je $(M, \circ)$ grupa? Odpovědi zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť konečná množina A má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Určete kolik je rozkladů množiny A, které mají alespoň $n - 2$ tříd rozkladu.

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem $x \rho y \iff (x + y = xy \vee x = y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$. Popište rozklad $\mathbb{R} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Q}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto: $x \preceq y \iff (\exists k \in \mathbb{N})(y = k \cdot x)$, pro $x, y \in \mathbb{Q}$. Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \preceq)$. Je $(\mathbb{Q}, \preceq)$ úplný svaz? Je identické zobrazení $id_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{Q}, \preceq)$ do $(\mathbb{Q}, \leq)$? Je identické zobrazení $id_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{Q}, \leq)$ do $(\mathbb{Q}, \preceq)$? Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání racionálních čísel podle velikosti.)

8. (10 bodů) Buď dána neprázdná množina A a uspořádání $\leq$ na množině A. Na množině A^A všech zobrazení z množiny A do sebe definujeme uspořádání $\preceq$ takto: $f \preceq g \iff (\forall a \in A)(f(a) \leq g(a))$, pro $f, g \in A^A$. Dokažte, že pro libovolná zobrazení $f, g, h \in A^A$ platí $(f \preceq g \implies f \circ h \preceq g \circ h)$. Nalezněte všechna zobrazení $z \in A^A$ pro než platí $(\forall f \in A^A)(z \circ f = z)$. Dokažte, že pokud $(A, \leq)$ je úplný svaz, pak $(A^A, \preceq)$ je také úplný svaz.