Základy matematiky — podzim 2003 — 2. opravný termín — 12.2.2004

Jméno: ....

UČO: ....

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Hodnocení									

1. (8krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Každá konečná uspořádaná množina obsahuje alespoň jeden maximální prvek.

(b) **ano** — **ne** Pro livobolnou množinu A existuje bijekce z množiny A do množiny $\mathcal{P}(A)$.

(c) **ano** — **ne** Průnik dvou relací ekvivalence na množině A je relace ekvivalence.

(d) **ano** — **ne** Každé těleso je komutativní okruh.

(e) **ano** — **ne** Složení dvou surjektivních zobrazení je surjektivní zobrazení.

(f) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}_3, +, +)$ je okruh

(g) **ano** — **ne** Každá symetrická relace na dvouprvkové množině je tranzitivní.

(h) **ano** — **ne** Existuje úplný svaz, který má dva různé minimální prvky.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a jádro zobrazení. Zformulujte větu popisující jejich vzájemný vztah. (*Jádro zobrazení není totéž co jádro homomorfismu.*)

3. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) uspořádané množiny, která má prvek r takový, že r je maximální, minimální, největší i nejmenší zároveň (zadejte ji Hasseovským diagramem a vyznačte prvek r);

(b) uspořádání dvouprvkové množiny $\{a, b\}$, které je zároveň symetrickou relací;

(c) komutativního monoidu, který není grupou;

(d) množiny X takové, že $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ je dvouprvková množina;

(e) tříprvkové množiny $\mathcal{A}$ takové, že $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{N}$.

4. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} - \{-1\}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem $x \circ y = xy + x + y$ pro $x, y \in M$. Lze ukázat, že $(M, \circ)$ je grupa (nedokazujte). Označme dále $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{Q}^* \to M$ dané předpisem $f(a) = a - 1$ je homomorfismus z grupy $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ do grupy $(M, \circ)$, kde $\cdot$ je násobení nenulových racionálních čísel. Určete neutrální prvek grupy $(M, \circ)$.

5. (10 bodů) Kolik existuje šestiprvkových podmnožin dvanactiprvkové množiny $\{1, 2, \ldots, 12\}$, které obsahují více sudých čísel než lichých.

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ je definována relace ρ vztahem $x\rho y \iff x^2 = y^2$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na $\mathbb{Z}$, a popište rozklad $\mathbb{Z} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik mají jednotlivé třídy prvků.

7. (10 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ je množina všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Jedná se o úplný svaz? Mějme zobrazení $g : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ definované tak, že $g(A)$ je největší prvek v A vzhledem k uspořádání dle velikosti $\leq$. Rozhodněte, zda je zobrazení $g : (\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \subseteq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ izotonní.

8. (10 bodů) Nechť X je neprázdná konečná množina. Pro libovolnou relaci ρ na množině X (tj. $\rho \in \mathcal{P}(X \times X)$) značíme množinu vzorů resp. obrazů takto:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{x \in X \mid \exists y \in X : x\rho y\}, \quad \mathrm{Im}(\rho) = \{y \in X \mid \exists x \in X : x\rho y\}.$$

Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(X \times X) \to \mathcal{P}(X)$ dané předpisem $f(\rho) = \mathrm{Dom}(\rho) \cap \mathrm{Im}(\rho)$ je surjektivní. Rozhodněte, pro které množiny X je zobrazení f bijekce.