Základy matematiky — podzim 2003 — 1. opravný termín — 5.2.2004

Jméno: ....

UČO: ....

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Hodnocení		

1. (8krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Každá uspořádaná množina má nejvýše jeden nejmenší prvek.

(b) **ano — ne** $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ je těleso.

(c) **ano — ne** Každá symetrická relace na dvouprvkové množině je tranzitivní.

(d) **ano — ne** Množina všech komplexních čísel $\mathbb{C}$ je spočetná.

(e) **ano — ne** Pokud v dané uspořádané množině existuje supremum prázdné množiny, pak je rovno nejmenšímu prvku.

(f) **ano — ne** Pro relaci ekvivalence R na množině A je projekce z A na faktorovou množinu $A \backslash R$ surjektivní zobrazení.

(g) **ano — ne** Množina všech bijekcí z množiny A na sebe s operací skládání zobrazení je grupa.

(h) **ano — ne** Složení dvou injektivních zobrazení je injektivní zobrazení.

2. (7 bodů) Definujte pojmy „bijekce“, „mít stejnou mohutnost“ a zformulujte Cantorovu větu. Definujte všechny potřebné pojmy.

3. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) uspořádané množiny, která má prvek r takový, že r není maximální, minimální, největší ani nejmenší (zadejte ji Hasseovským diagramem a vyznačte prvek r);

(b) injektivního zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které není reflexivní relací;

(c) grupy $(G, \cdot)$ takové, že $(\forall g \in G)(g^{-1} = g)$;

(d) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y)| = 7$;

(e) konečné množiny $\mathcal{A}$ takové, že $\bigcap \mathcal{A}$ je nekonečná množina.

4. (10 bodů) Na množině $M = \{r \in \mathbb{R} \mid r > -2\}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$ pro $x, y \in M$. Dokažte, že $\circ$ je skutečně operace na množině M (tj. $x, y \in M \implies x \circ y \in M$). Dále rozhodněte, zda $(M, \circ)$ je grupa. Odpověď zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť množina A má 10 prvků. Uvažujme její pětiprvkové podmnožiny B a C, které nejsou vzájemně disjunktní. Kolik existuje takových (uspořádaných) dvojic (B, C)? (Tj. určete počet prvků množiny $\{(B, C) \mid B \subseteq A, C \subseteq A, |B| = |C| = 5, B \cap C \neq \emptyset\}$.)

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{N}$ je definována relace ρ vztahem $x \rho y \iff 16 | x - y$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na $\mathbb{N}$, a popište rozklad $\mathbb{N} \backslash \rho$. Kolik má tento rozklad prvků?

7. (10 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \subseteq)$. Jedná se o úplný svaz? Popište nejmenší a největší prvek. Mějme zobrazení $f : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dané vztahem $f(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \subseteq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní. Odpověď zdůvodněte.

8. (10 bodů) Nechť $\preceq$ je libovolné uspořádání množiny $\mathbb{N}$. Definujme nyní na $\mathbb{N}$ relaci $R_\preceq$ pro $x, y \in \mathbb{N}$ takto:

$$(x, y) \in R_\preceq \iff (\exists n \in \mathbb{N})(x \preceq y^n \wedge y \preceq x^n).$$

Dokažte, že pokud za $\preceq$ zvolíme relaci dělitelnosti $|$, je výsledná relace $R_|$ ekvivalence. Dejte příklad uspořádání $\preceq$ na $\mathbb{N}$ pro niž $R_\preceq$ není relace ekvivalence.