Základy matematiky — podzim 2003 — 2. termín — 15.1.2004

Jméno: ....

UČO: ....

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Hodnocení		

1. (8krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Každá uspořádaná množina obsahuje maximální a minimální prvky.

(b) **ano** — **ne** Jeli $f : G \to H$ izomorfizmus grup, pak $f^{-1} : H \to G$ je také izomorfizmus grup.

(c) **ano** — **ne** Pokud $(R, \leq)$ a $(S, \preceq)$ jsou neprázdné uspořádané množiny, pak existuje izotonní zobrazení z $(R, \leq)$ do $(S, \preceq)$.

(d) **ano** — **ne** Každá podmnožina spočetné množiny je buď konečná nebo spočetná.

(e) **ano** — **ne** Je-li $g : A \to B$ injektivní zobrazení a $f : B \to C$ surjektivní zobrazení, pak $f \circ g : A \to C$ je surjektivní zobrazení.

(f) **ano** — **ne** Pro každou množinu A platí, že prázdná relace (tj. $\emptyset \in \mathcal{P}(A \times A)$) je reflexivní.

(g) **ano** — **ne** Sjednocení dvou relací ekvivalence je relace ekvivalence.

(h) **ano** — **ne** Množina všech zobrazení z množiny A do sebe s operací skládání zobrazení je grupa.

2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A. Kdy je uspořádání lineární? Definujte minimální a nejmenší prvek. (Veškeré vlastnosti zapište formulí.)

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) uspořádané množiny, která má právě 4 maximální a 3 minimální prvky (zadejte ji Hasseovským diagramem);

(b) relace na dvouprvkové množině $\{a, b\}$, která není tranzitivní;

(c) monoidu a jeho podmnožiny, která je grupou (se stejnou operací);

(d) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)| = 8$;

(e) tříprvkové množiny $\mathcal{A}$ takové, že $\bigcup \mathcal{A}$ je dvouprvková množina.

4. (10 bodů) Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dané (pro $a, b \in \mathbb{R}$) předpisem $f(a + bi) = a - bi$ je homomorfismus z okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

5. (10 bodů) Kolik je rozkladů n-prvkové množiny, které mají právě dvě třídy?

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je definována relace ρ vztahem $(x_1, x_2)\rho(y_1, y_2) \iff (x_1)^2 = (y_1)^2$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a popište rozklad $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \rho$. Kolik má tento rozklad prvků?

7. (10 bodů) Definujme relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{N}$ takto:

$$x \preceq y \iff x = y \vee y - x \geq 2.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání na $\mathbb{N}$. Naznačte Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \preceq)$. Popište minimální a maximální prvky $(\mathbb{N}, \preceq)$. Rozhodněte, zda má libovolná konečná podmnožina v $(\mathbb{N}, \preceq)$ supremum.

8. (10 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ je množina všech uspořádání na množině $\mathbb{N}$. Jedná se o úplný svaz? Popište minimální a maximální prvky v uspořádané množině $(\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Mějme zobrazení $f : \mathcal{U}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definované tak, že pro uspořádání $R \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ je $f(R)$ množina všech maximálních prvků v $(\mathbb{N}, R)$. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : (\mathcal{U}(\mathbb{N}), \subseteq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní.