Základy matematiky — podzim 2003 — 1. termín — 8.1.2004

Jméno: ....

UČO: ....

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Hodnocení		

1. (8krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Složení reflexivních relací je reflexivní relace.

(b) **ano — ne** $(\mathbb{R}, +, +)$ je okruh.

(c) **ano — ne** Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost.

(d) **ano — ne** Maximální prvek uspořádané množiny je minimální prvek duálně uspořádané množiny.

(e) **ano — ne** Každý úplný svaz má nejmenší a největší prvek.

(f) **ano — ne** Každá dvě injektivní zobrazení $f : A \to B$, $g : A \to C$ mají stejné jádro.

(g) **ano — ne** Složení izotonních zobrazení je izotonní zobrazení.

(h) **ano — ne** V $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ má každý prvek inverzi.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace mezi množinami A, B. Pomocí něj definujte formálně pojem zobrazení z množiny A do množiny B. Definujte operace skládání zobrazení a skládání relací, která je jejím zobecněním.

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) spočetného tělesa;

(b) surjektivního zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takového, že $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \ldots$ jsou po dvou různá zobrazení;

(c) uspořádání R na množině $\mathbb{N}$ a relace ekvivalence S na množině $\mathbb{N}$ takových, že $R \subseteq S$;

(d) systému množin $\mathcal{A}$ takového, že $\bigcup \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A} = \mathbb{N}$;

(e) množiny X takové, že množina $\mathcal{P}(X) \cap X$ má dva prvky.

4. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem $x \circ y = xy + x + y$ pro $x, y \in \mathbb{Z}$. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, \circ)$ je grupa. Odpověď zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť množina A má 10 prvků. Uvažujme její čtyřprvkové podmnožiny B a C, které jsou disjunktní. Kolik existuje takových (uspořádaných) dvojic (B, C)?
(Tj. určete počet prvků množiny $\{(B, C) \mid B \subseteq A, C \subseteq A, |B| = |C| = 4, B \cap C = \emptyset\}$.)

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace ρ vztahem $x \rho y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$ a popište rozklad $\mathbb{R} \backslash \rho$. Kolik má tento rozklad prvků?

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ definujeme relaci $\preceq$ takto:

$$x \preceq y \iff (\exists c)(0 < c \leq 1 \ \wedge \ x \cdot c = y).$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání. Naznačte hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \preceq)$. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \preceq)$.

8. (10 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$, kde $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ je množina všech relací ekvivalence na množině $\mathbb{N}$. Jedná se o úplný svaz? (Zdůvodněte.) Mějme zobrazení $f : \mathcal{E}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, které relaci ekvivalence $\rho \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ přiřazuje třídu rozkladu $\mathbb{N} \backslash \rho$ obsahující číslo 1. Rozhodněte, zda zobrazení $f : (\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ je izotonní. Rozhodněte, zda zobrazení f je injektivní resp. surjektivní.