Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 10. 11. 2003

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 25 bodů. Pro řešení požijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (4 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

(b) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$

(c) **ano** — **ne** $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \emptyset$

(d) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\} - \emptyset\}$

2. (6 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** nebo **ne**, jestliže daná relace ρ na množině $\mathbb{Z}$ splňuje příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a\ \rho\ b \iff a < b + 1$			
$a\ \rho\ b \iff a \leq 4 \ \wedge\ b \geq 7$			
$a\ \rho\ b \iff a \mid 2b$			
$a\ \rho\ b \iff a \neq b \ \wedge\ a + b = 0$			
$a\ \rho\ b \iff \lvert a \cdot b \rvert \geq 4$			
$a\ \rho\ b \iff a \cdot b > 0$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\{a, \emptyset, \{\emptyset\}\} \times \{a\}$ a vypište je.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množině a.)

4. (4 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C, D platí:

(a) $A \cap (C - D) = \emptyset \iff A \cap C \subseteq D$;

(b) $A \subseteq B,\ C \subseteq D \implies (A \cup D) \cap (B \cup C) = A \cup C \cup (B \cap D)$.

5. (3 body) Rozhodněte, zda pro libovolné dvě množiny A, B platí rovnost:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

(Buď rovnost dokažte, nebo udejte příklad dvou množin A, B pro které rovnost neplatí.)

6. (3 body) Nechť A je neprázdná konečná množina. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \to \mathcal{P}(A)$ dané předpisem $f(X) = \bigcup X$ je surjektivní.

Zdůvodněte, že f není bijekce.

7. (5 bodů) Buď $A = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte:
(Relace i zobrazení zadávejte výčtem prvků z množiny $A \times A$.)

(a) zobrazení $f : A \to A$ takové, že $f, f \circ f$ a $f \circ f \circ f$ jsou různá zobrazení;

(b) surjektivní zobrazení na $f : A \to A$, které není reflexivní relací;

(c) reflexivní relaci R na množině A, která není zobrazením;

(d) zobrazení $f : A \to A$, které je tranzitivní relací;

(e) dvojici relací $R \subseteq S$ na množině A takových, že $R \neq S$, R je zobrazení a S je symetrická relace.