
Algebra I - 2007/8 - opravná zápočtová písemka

1. Faktorová grupa.

Množina $G = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ spolu s operací sčítání tvoří grupu $(G, +)$. Víme, že množina $G_n^m = \{ma + nbi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, pro $m, n \in \mathbb{N}$, je podgrupou této grupy. Nechť m, n jsou pevná a pro stručnost pišme $H = G_n^m$.

- Ukažte, že H je dokonce normální podgrupou.
- Popište $(G, +)/H$ (výsledek závisí na m a n).

2. Inverze ve faktorových okruzích.

Uvažujme polynom $f = x^3 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

- Dokažte, že f je ireducibilní nad \mathbb{Q} .
- Najděte inverzi k $x^2 + 1 + (f)$ v tělese $(\mathbb{Q}[x]/(f), +, \cdot)$. Tj. najděte polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ takový, že $(x^2 + 1) \cdot g \equiv 1$ modulo f .
- Proveďte zkoušku.