Zápočtová písemka — Cvičení Algebra II — jaro 2007

Na zápočtové písemce se objeví 4 z následujících 6 „algoritmických“ příkladů. (Maximální počet bodů na příklad bude 10, celkem 40. K zápočtu je třeba získat 20.)

1) Minimální polynom.
2) Počítání v jednoduchých rozšířeních:
  a) tělesa $\mathbb{Q}$;
  b) tělesa $\mathbb{Z}_p$.
3) Symetrické polynomy:
  a) symetrické systémy;
  b) polynom s kořeny vyjádřenými pomocí kořenů jiného polynomu.
4) Přirozené příklady svazů.
5) Svazy podalgeber a kongruencí.
6) Platnost konkrétních identity v dané algebře.

Jednotlivá zadání příkladů budou vypadat následovně.
(V rámečku je ta část, kde se zadání na písemce bude lišit — s výjimkou příkladů 3a, 4 kde je naopak podtržena ta část, která zůstane stejná.)

1) Určete minimální polynom prvku $\boxed{i\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}}$ nad $\mathbb{Q}$.

2a) Buď $\epsilon \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $f = \boxed{x^3 - x - 2} \in \mathbb{Q}[x]$ stupně $k = \boxed{3}$. Vyjádřete prvky $\boxed{\epsilon^{-1}}$, $\boxed{(1+\epsilon)^3}$ a $\boxed{(\epsilon^2 + 3\epsilon - 1)^{-2}}$ ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot \epsilon + \cdots + a_{k-1} \cdot \epsilon^{k-1}$, kde $a_i \in \mathbb{Q}$ pro $i = 0, \ldots, k-1$.

2b) Buď $p = \boxed{3}$ a $f = \boxed{x^2 + [1]_3} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polynom stupně $k = \boxed{2}$. Označme $n = p^k$, tj $n = \boxed{9}$. Nyní $\mathbb{F}_n = \mathbb{Z}_p[x]/(f)$ je n-prvkové těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_n$ prvek $\alpha = x + (f)$.
Určete $a_i \in \mathbb{Z}$ pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$ takové, že

i) $[a_0]_p + [a_1]_p \cdot \alpha + \cdots + [a_{k-1}]_p \cdot \alpha^{k-1} = \boxed{\alpha^4}$;

ii) $[a_0]_p + [a_1]_p \cdot \alpha + \cdots + [a_{k-1}]_p \cdot \alpha^{k-1} = \boxed{(\alpha + [1]_3)^{-1}}$.

3a) <u>Řešte v $\mathbb{C}$ následující soustavu rovnic.</u>

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 19$$
$$x_1 - x_1x_2 + x_2 = 7$$

3b) O kubickém polynomu $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ víme, že má tři různé kořeny x_1, x_2, x_3. Sestavte normovaný kubický polynom, jehož kořeny jsou $\boxed{x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3}$ — vyjádřete jeho koeficienty pomocí parametrů $a, b, c \in \mathbb{C}$.

4) Pro libovolná reálná čísla $a < b$ uvažujeme otevřený interval $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$. Nechť S je množina všech takových intervalů spolu s prázdnou množinou:

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

<u>Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(S, \subseteq)$ tvoří svaz, úplný svaz, podsvaz svazu</u> $(2^{\mathbb{R}}, \subseteq)$, kde $2^{\mathbb{R}}$ je systém všech podmnožin množiny reálných čísel.

Určete nejmenší a největší prvek $(S, \subseteq)$.
Popište co je infimem a supremem dvou prvků v $(S, \subseteq)$.

5) Buď dána $\boxed{\text{2-unární}}$ algebra $\mathcal{A} = \boxed{(A, f, g)}$, kde $\boxed{A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$ a operace jsou dány takto: $\boxed{f(4) = g(2) = 1, f(1) = g(3) = 2, f(2) = f(5) = f(6) = g(4) = 3, f(3) = g(1) = 4, g(5) = g(6) = 6}$.
Určete svaz všech podalgeber algebry $\mathcal{A}$.
Určete svaz všech kongruencí algebry $\mathcal{A}$.

6) Buď dána $\boxed{\text{2-unární}}$ algebra $\mathcal{A} = \boxed{(A, f, g)}$, kde $\boxed{A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$ a operace jsou dány takto: $\boxed{f(4) = g(2) = 1, f(1) = g(3) = 2, f(2) = f(5) = f(6) = g(4) = 3, f(3) = g(1) = 4, g(5) = g(6) = 6}$.
Je v algebře $\mathcal{A}$ splněna identita $\boxed{(fgf)(x) = f(x)}$, resp. $\boxed{(gfg)(x) = g(x)}$? Pro která $n, m \in \mathbb{N}$ je v algebře $\mathcal{A}$ splněna identita $\boxed{f^n(x) = f^m(x)}$, resp $\boxed{f^n(x) = f^m(y)}$, resp. $\boxed{g^n(x) = g^m(x)}$?

Poznámky:
ad **3a)** Jiný typ soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} &= 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 27 \end{aligned}$$

ad **4)** mohou se objevit např. relace (symetrické, tranzitivní, ...), zobrazení,....

ad **5),6)** mohou se objevit tyto typy algeber: monounární či n-unární; binární (tj. grupoidy); 2-binární (tj. např. svazy); a navíc libovolný počet konstant (tj. např. monoidy, omezené svazy).