Sbírka příkladů z polynomů pro předmět Cvičení z algebry I

Dělení v okruzích polynomů

1. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy
a) $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$,
b) $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$,
c) $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$,
d) $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

2. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy:
a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$,
b) $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$.

Kořeny polynomů

3. Uvažme polynom $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem polynomu f a určete jeho násobnost n.

4. Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

5. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$ dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Taylorův rozvoj polynomu

6. Vyjádřete polynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

7. Vyjádřete polynom $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

Racionální kořeny polynomů

8. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.
a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$
b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$
c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$
d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$
e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$
f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$
g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$
m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$
n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$
o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$
p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$
q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$
r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

9. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

10. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro něž má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen.

Rozklad polynomů

11. Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
f) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$
g) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

12. Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 8, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

13. Určete všechny kořeny polynomu f, víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $f(x) = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$,
b) $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$.

Komplexně sdružené kořeny

14. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

15. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3 + 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

16. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 - i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

17. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen k nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $k = 1 - i$,
b) $k = 1 - 2i$.

18. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

19. Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu f.

20. Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je

a) $1 + i$,
b) $2 + \sqrt{3}i$,
c) $\sqrt{3} - 5i$.

Polynomy nad $\mathbb{Z}_p$

21. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$.

22. Určete všechny ireducibilní polynomy nad
a) $\mathbb{Z}_2$ stupně menšího než 5,
b) $\mathbb{Z}_3$ stupně menšího než 4.

23. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.

24. Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom $x^3 + x^2 + ax + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$.

25. Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom $x^3 + x^2 + x + a$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}_7$.

26. Udejte příklad polynomu
a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá,
b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny.

27. Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.
a) $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$
c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
d) $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$
e) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
f) $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
g) $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$
h) $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$

Eisensteinovo kritérium

28. Ukažte, že polynom $f(x)$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$:
a) $f(x) = x^n + p$; $n \in \mathbb{N}$, p je prvočíslo,
b) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$.

29. Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že polynom $x^2 - n$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

30. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $p(x) = x^n + n$
a) byl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$,
b) nebyl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

31. Určete, který z polynomů $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ a který lze nad $\mathbb{Z}$ rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.

Euklidův aloritmus, Bezoutova rovnost

32. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:
a) $x^2 + x - 6$,
b) $x^2 + x - 2$,
c) $x^2 + 2x - 3$.
Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

33. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:
a) $x^2 + x - 2$,
b) $x^2 + 2x - 3$,
c) $x^2 - 2x - 3$.
Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

34. Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.
a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$
b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

Násobné kořeny

35. Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu:
a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,
b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,
c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

36. Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom
a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,
b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.
c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.
d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.
e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.
f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

Faktorové okruhy

37. Buď $\epsilon \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $f = x^3 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ stupně. Vyjádřete prvky ϵ^{-1} , $(1 + \epsilon)^3$ a $(\epsilon^2 + 3\epsilon - 1)^{-2}$ ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot \epsilon + a_2 \cdot \epsilon^2$, kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$.

38. Buď $\epsilon \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $f = x^4 + 2x^2 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Vyjádřete čísla ϵ^{-1}, ϵ^6 a $(\epsilon^2 + \epsilon + 1)^{-1}$ ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot \epsilon + a_2 \cdot \epsilon^2 + a_3 \cdot \epsilon^3$, kde $a_i \in \mathbb{Q}$ pro $i = 0, \ldots, 3$.

39. Buď $f = x^2 + [1]_3 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Dokažte, že $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ je 9-prvkové těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_9$ prvek $\alpha = x + (f)$.
Určete $a_0, a = 1 \in \mathbb{Z}$ takové, že

i) $[a_0]_3 + [a_1]_3 \cdot \alpha = \alpha^4$;

ii) $[a_0]_3 + [a_1]_3 \cdot \alpha = (\alpha + [1]_3)^{-1}$.

40. Buď $f = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ a označme $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ příslušné těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$ prvek $\alpha = x + (f)$.
Určete $a_i \in \mathbb{Z}_2$ pro $i = 0, 1, 2, 3$ takové, že

i) $a_0 + a_1 \cdot \alpha + \cdots + a_3 \cdot \alpha^3 = \alpha^6$;

ii) $a_0 + a_1 \cdot \alpha + \cdots + a_3 \cdot \alpha^3 = (\alpha^2 + 1)^{-1}$.

41. Buď $f = x^3 - x + [2]_5 \in \mathbb{Z}_5[x]$ a nechť $\mathbb{F}_{125} = \mathbb{Z}_5[x]/(f)$ je 125-prvkové těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_{125}$ prvek $\alpha = x + (f)$. Určete $a, b, c \in \mathbb{Z}$ taková, že

i) $[a]_5 + [b]_5 \cdot \alpha + [c]_5 \cdot \alpha^2 = \alpha^5$,

ii) $[a]_5 + [b]_5 \cdot \alpha + [c]_5 \cdot \alpha^2 = (\alpha^4 + \alpha + 1)^{-1}$.