

# Sbírka příkladů z okruhů a polynomů pro předmět Matematika II

Kapitoly a příklady označené hvězdičkou přesahují svým obsahem nebo obtížností požadavky ke zkoušce.

## 1 Okruhy

### Komplexní čísla

1. Určete všechna komplexní řešení rovnice  $x^n = 2$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Nalezněte rovnici, jejíž všechna komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostanný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v  $i$ .
3. Řešte v  $\mathbb{C}$  kvadratickou rovnici  $x^2 + (1 + 3i)x + i - 2 = 0$ .
- 4.\* Určete všechna komplexní řešení rovnice  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ .

### Okruhy, podokruhy

5. Rozhodněte, zda daná množina  $M$  je podokruhem okruhu  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ :
  - a)  $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$ ,
  - b)  $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$ ,
  - c)  $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$ ,
  - d)  $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ ,
  - e)  $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ ,
  - f)  $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ .
6. Určete, které prvky náleží nejmenšímu podokruhu okruhu  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  obsahujícímu číslo  $a$  pro
  - a)  $a = \sqrt{3}$ ,
  - b)  $a = \sqrt[5]{2}$ ,
  - c)  $a = i$ ,
  - d)  $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \xi_3$ ,
  - e)  $a = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \xi_7$ ,
  - f)  $a = \pi$ ,
  - g)  $a = \sqrt{n}$ ,
  - h)  $a = \sqrt[3]{n}$ ,
  - i)  $a = \sqrt{ni}$ .
7. Nechť  $(R, +, \cdot)$  je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh taky
  - a)  $(R, +, \square)$ , kde  $\square$  je operace definovaná vztahem  $a \square b = a \cdot b + b \cdot a$  pro libovolné  $a, b \in R$ ,
  - b)  $(R, +, +)$ .

### Obory integrity, invertibilní prvky okruhů, tělesa

8. Rozhodněte, zda daná podmnožina  $A$  okruhu racionálních čísel  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
  - a)  $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$
  - b)  $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
  - c)  $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
9. Rozhodněte, zda následující podmnožina  $M$  okruhu komplexních čísel  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je okruh, obor integrity, případně těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
  - a)  $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
  - b)  $M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
  - c)  $M = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
  - d)  $M = \{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

10. Rozhodněte, zda  $(M, \oplus, \odot)$  je okruh, obor integrity, těleso:

- a)  $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x \cdot y - 1$
- b)  $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x + y - xy$
- c)  $M = \mathbb{Q}$ , operace jako v b)
- d)  $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), (x, y) \odot (u, v) = (xu + 2yv, xv + yu)$
- e)  $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, (x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), (x, y) \odot (u, v) = (xu + yv, xv + yu + yv)$

11.\* Nalezněte invertibilní prvky okruhu  $(\{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$

12.\* Pro prvky z příkladu 6 najděte nejmenší podtěleso tělesa  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  obsahující daný prvek.

### Homomorfismy okruhů

13. Rozhodněte, zda zobrazení  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je homomorfismus okruhu  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  do okruhu  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , je-li pro  $a, b \in \mathbb{R}$  dáno:

- a)  $f(a + bi) = a + b$ ,
- b)  $f(a + bi) = a^2 + b^2$ ,
- c)  $f(a + bi) = a - bi$ .

14.\* Určete, zda je okruh  $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  oborem integrity. Je izomorfní s okruhem  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ?

15. Dokažte, že okruh  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  z příkladu 10 b) je izomorfní s okruhem  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

16. Určete všechny čtveřice  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  takové, že předpis  $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$ , pro  $r, s \in \mathbb{R}$ , definuje homomorfismus  $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  okruhu  $\mathbb{C}$  do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

17.\* Buď  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  podokruh okruhu  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ . Ukažte, že  $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$  je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus  $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{C}$  je identický na množině racionálních čísel, tj.  $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$ . Popište všechny okruhové homomorfismy  $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Které z nich jsou izomorfismy?

## 2 Polynomy

### Dělení v okruzích polynomů

18. V  $\mathbb{Q}[x]$  dělte se zbytkem polynomy

- a)  $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$ ,
- b)  $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$ ,
- c)  $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$ ,
- d)  $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$ .

19. V  $\mathbb{Q}[x]$  dělte se zbytkem polynomy:

- a)  $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$ ,
- b)  $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$ .

### Kořeny polynomů

20. Uvažme polynom  $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$ . Dokažte, že  $c = 2$  je kořenem polynomu  $f$  a určete jeho násobnost  $n$ .

21. Určete hodnotu koeficientu  $a \in \mathbb{Q}$  tak, aby polynom  $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$  měl dvojnásobný kořen  $c = -1$ .

22. Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $c = 1$  dvojnásobným kořenem polynomu  $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ .

### Taylorův rozvoj polynomu

23. Vyjádřete polynom  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$  v mocninách lineárního polynomu  $x + 1$ .

24. Vyjádřete polynom  $f(x) = (x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$  bez počítání jednotlivých mocnin polynomu  $x - 2$ .

## Racionální kořeny polynomů

**25.** Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v  $\mathbb{C}[x]$  a určete jejich násobnost.

- a)  $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$
- b)  $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$
- c)  $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$
- d)  $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$
- e)  $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$
- f)  $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$
- g)  $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
- h)  $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
- i)  $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
- j)  $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
- k)  $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
- l)  $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$
- m)  $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$
- n)  $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$
- o)  $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$
- p)  $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$
- q)  $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$
- r)  $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

**26.** Určete takové  $a \in \mathbb{C}$ , pro něž má polynom  $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$  kořen 2. Pro toto  $a$  určete všechny racionální kořeny polynomu  $f$  včetně násobností.

**27.** Určete všechna  $a \in \mathbb{Z}$ , pro něž má polynom  $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$  racionální kořen.

## Rozklad polynomů

**28.** Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ :

- a)  $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
- b)  $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
- c)  $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
- d)  $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
- e)  $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
- f)  $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$
- g)  $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

**29.** Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  těch polynomů z Příkladu 25, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

**30.** Určete všechny kořeny polynomu  $f$ , víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte  $f$  na ireducibilní faktory postupně nad  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ :

- a)  $f(x) = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ ,
- b)  $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$ .

## Komplexně sdružené kořeny

**31.** Určete všechny kořeny polynomu  $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$ , víte-li, že má dvojnásobný kořen  $1 + i$ . Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

**32.** Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen  $-\frac{1}{3}$  a dvojnásobný kořen  $3 + 2i$ , nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

**33.** Určete všechny kořeny polynomu  $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$ , víte-li, že má dvojnásobný kořen  $2 - i$ . Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

**34.** Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen  $\frac{1}{2}$  a dvojnásobný kořen  $k$  naleznete polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ :

- a)  $k = 1 - i$ ,
- b)  $k = 1 - 2i$ .

**35.** Naleznete všechny kořeny polynomu  $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$  a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo  $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ .

**36.** Víme, že polynom  $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$  má dvojnásobný kořen  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ . Určete zbývající kořeny polynomu  $f$ .

**37.** Uveďte příklad polynomu v  $\mathbb{R}[x]$ , resp. v  $\mathbb{Z}[x]$ , jehož kořenem je

- a)  $1 + i$ ,
- b)  $2 + \sqrt{3}i$ ,
- c)  $\sqrt{3} - 5i$ .

### Polynomy nad $\mathbb{Z}_p$

**38.** Naleznete všechny kořeny polynomu  $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$  v  $\mathbb{Z}_7$ .

**39.** Určete všechny ireducibilní polynomy nad

- a)  $\mathbb{Z}_2$  stupně menšího než 5,
- b)  $\mathbb{Z}_3$  stupně menšího než 4.

**40.** Naleznete všechny kořeny polynomu  $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$  v  $\mathbb{Z}_3[x]$  a určete jejich násobnost.

**41.** Určete nějaký prvek  $a \in \mathbb{Z}_5$  takový, že polynom  $x^3 + x^2 + ax + 1$  je ireducibilní nad  $\mathbb{Z}_5$ .

**42.** Určete všechny prvky  $a \in \mathbb{Z}_7$ , pro které je polynom  $x^3 + x^2 + x + a$  ireducibilní nad  $\mathbb{Z}_7$ .

**43.** Udejte příklad polynomu

- a)  $g \in \mathbb{Z}_5[x]$ , který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá,
- b)  $g \in \mathbb{Z}_2[x]$ , který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
- c)  $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ , který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
- d)  $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ , který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
- e)  $g \in \mathbb{Z}_5[x]$ , který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny.

**44.** Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.

- a)  $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
- b)  $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- c)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
- d)  $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- e\*)  $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
- f)  $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
- g\*)  $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- h)  $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$

### Eisensteinovo kritérium \*

**45.** Ukažte, že polynom  $f(x)$  je ireducibilní nad  $\mathbb{Q}$ :

- a)  $f(x) = x^n + p$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  je prvočíslo,
- b)  $f(x) = x^6 + x^3 + 1$ .

**46.** Najděte  $n \in \mathbb{N}$  takové, že polynom  $x^2 - n$  je ireducibilní nad  $\mathbb{Q}$ , ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

47. Najděte  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby polynom  $p(x) = x^n + n$

- a) byl ireducibilní nad  $\mathbb{Q}$ ,
- b) nebyl ireducibilní nad  $\mathbb{Q}$ .

48. Určete, který z polynomů  $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$  a  $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$  je ireducibilní nad  $\mathbb{Z}$  a který lze nad  $\mathbb{Z}$  rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů  $f$  a  $g$  na ireducibilní faktory nad  $\mathbb{Z}$ .

### Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost

49. Nalezněte polynomy  $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

- a)  $x^2 + x - 6$ ,
- b)  $x^2 + x - 2$ ,
- c)  $x^2 + 2x - 3$ .

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů  $f, g$  Bezoutovou rovností.

50. Nalezněte polynomy  $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

- a)  $x^2 + x - 2$ ,
- b)  $x^2 + 2x - 3$ ,
- c)  $x^2 - 2x - 3$ .

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů  $f, g$  Bezoutovou rovností.

51. Pro dané dvojice polynomů  $f, g \in \mathbb{R}[x]$  najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

- a)  $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$
- b)  $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
- c)  $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

### Násobné kořeny \*

52. Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu:

- a)  $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$ ,
- b)  $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ ,
- c)  $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ .

53. Rozložte v  $\mathbb{C}[x]$  na lineární faktory polynom

- a)  $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$ , víte-li, že má dvojnásobný kořen,
- b)  $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$ , víte-li, že má trojnásobný kořen.
- c)  $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$ , víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.
- d)  $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$ , víte-li, že má čtyřnásobný kořen.
- e)  $x^3 - 6ix + 4 - 4i$ , víte-li, že má dvojnásobný kořen.
- f)  $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$ , víte-li, že má trojnásobný kořen.

### Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

54. Rozložte racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků nad  $\mathbb{Q}$ .

- a)  $\frac{x^2 - x + 1}{x^6 + 2x^4 + x^2}$
- b)  $\frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 2}{x^6 - 2x^3 + 1}$
- c)  $\frac{3x^4 + 3x^2 - 7x - 7}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}$
- d)  $\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^6 - 10x^3 + 25}$
- e)  $\frac{x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1}{x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8}$
- f)  $\frac{4x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7}{x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 9x - 18}$
- g)  $\frac{8x^3 - 9x^2 - 18x + 22}{4x^4 - 16x^3 + 25x^2 - 21x + 9}$

$$\begin{aligned}
\text{h)} & \frac{21x^3-16x^2-12x+1}{9x^4-3x^3+13x^2+11x+2} \\
\text{i)} & \frac{3x^4+2x^3-17x^2-7x-7}{2x^5-7x^4+6x^3-3x^2+4x+4} \\
\text{j)} & \frac{8x^4+2x^3+3x^2+3x+6}{3x^5+5x^4+7x^3+9x^2+2x-2} \\
\text{k)} & \frac{5x^3+7x^2-6x-10}{x^5+4x^4+2x^3-4x^2+8x+16} \\
\text{l)} & \frac{x^3-2x^2-x+16}{x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8}
\end{aligned}$$