Sbírka příkladů z okruhů a polynomů pro předmět Matematika II

Kapitoly a příklady označené hvězdičkou přesahují svým obsahem nebo obtížností požadavky ke zkoušce.

1 Okruhy

Komplexní čísla

1. Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

$[\ \sqrt[n]{2}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}); k = 0, \ldots, n-1\ ]$

2. Nalezněte rovnici, jejíž všechna komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostanný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v i.

$[x^3 = -i\ ]$

3. Řešte v $\mathbb{C}$ kvadratickou rovnici $x^2 + (1+3i)x + i - 2 = 0$.

$[-i, -1-2i\ ]$

4.* Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

$[$*Jsou to páté odmocniny z jedné, různé od* 1*; tj.* $x_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, k = 1,2,3,4$. *Jinak zapsáno:* $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i\ ]$

Okruhy, podokruhy

5. Rozhodněte, zda daná množina M je podokruhem okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:

a) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$, $[ne\ ]$
b) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$, $[ano\ ]$
c) $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$, $[ne\ ]$
d) $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, $[ne\ ]$
e) $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, $[ano\ ]$
f) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$. $[ano\ ]$

6. Určete, které prvky náleží nejmenšímu podokruhu okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahujícímu číslo a pro

a) $a = \sqrt{3}$, $[k + l\sqrt{3}; k, l \in \mathbb{Z}\ ]$
b) $a = \sqrt[5]{2}$, $[k_0 + k_1\sqrt[5]{2} + k_2\sqrt[5]{4} + k_3\sqrt[5]{8} + k_4\sqrt[5]{16}; k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}\ ]$
c) $a = i$, $[k + li; k, l \in \mathbb{Z}\ ]$
d) $a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \xi_3$, $[k_0 + k_1\xi_3; k_0, k_1 \in \mathbb{Z}\ ]$
e) $a = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7} = \xi_7$, $[k_0 + k_1\xi_7 + \ldots + k_5\xi_7^5; k_0, k_1, \ldots, k_5 \in \mathbb{Z}\ ]$
f) $a = \pi$, $[k_0 + k_1\pi + \ldots + k_n\pi^n; n \in \mathbb{N}; k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\ ]$
g) $a = \sqrt{n}$, $[k + l\sqrt{n}; k, l \in \mathbb{Z}\ ]$
h) $a = \sqrt[3]{n}$, $[k_0 + k_1\sqrt[3]{n} + k_2\sqrt[3]{n^2}; k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\ ]$
i) $a = \sqrt{n}i$. $[k + l\sqrt{n}i; k, l \in \mathbb{Z}\ ]$

7. Nechť $(R, +, \cdot)$ je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh taky

a) $(R, +, \square)$, kde $\square$ je operace definovaná vztahem $a \square b = a \cdot b + b \cdot a$ pro libovolné $a, b \in R$, $[Ne\ ]$
b) $(R, +, +)$. $[Ne\ ]$

Obory integrity, invertibilní prvky okuhů, tělesa

8. Rozhodněte, zda daná podmnožina A okruhu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

a) $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$ $[$*obor integrity; inv. prvky:* $\frac{p}{q}$*, kde* $p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p, q\ ]$
b) $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ $[$*obor integrity; inv. prvky:* $\pm 3^k$*, kde* $k \in \mathbb{Z}\ ]$
c) $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ $[$*obor integrity; inv. prvky:* $\pm 2^k \cdot 3^l$*, kde* $k, l \in \mathbb{Z}\ ]$

9. Rozhodněte, zda následující podmnožina M okruhu komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je okruh, obor integrity, případně těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

a) $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ [*obor integrity*]
b) $M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [*těleso*]
c) $M = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [*nic*]
d) $M = \{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [*těleso*]

10. Rozhodněte, zda $(M, \oplus, \odot)$ je okruh, obor integrity, těleso:

a) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x \cdot y - 1$ [*nic*]
b) $M = \mathbb{Z}$, $x \oplus y = x + y - 1$, $x \odot y = x + y - xy$ [*obor integrity*]
c) $M = \mathbb{Q}$, operace jako v b) [*těleso*]
d) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y) \odot (u, v) = (xu + 2yv, xv + yu)$ [*těleso*]
e) $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y) \odot (u, v) = (xu + yv, xv + yu + yv)$ [*těleso*]

11.* Nalezněte invertibilní prvky okruhu $(\{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$

[$1, -1, 1 - \xi, -1 + \xi, \xi, -\xi$, *kde* $\xi = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$]

12.* Pro prvky z příkladu 6 najděte nejmenší podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahující daný prvek.

Homomorfismy okruhů

13. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, je-li pro $a, b \in \mathbb{R}$ dáno:

a) $f(a + bi) = a + b$, [*Ne*]
b) $f(a + bi) = a^2 + b^2$, [*Ne*]
c) $f(a + bi) = a - bi$. [*Ano*]

14.* Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

15. Dokažte, že okruh $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ z příkladu 10 b) je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

16. Určete všechny čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ takové, že předpis $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$, pro $r, s \in \mathbb{R}$, definuje homomorfismus $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ okruhu $\mathbb{C}$ do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

17.* Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

2 Polynomy

Dělení v okruzích polynomů

18. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy

a) $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$, [*podíl:* $-x^2 - 2$, *zbytek:* $x^2 + 3$]
b) $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$, [*podíl:* $\frac{3}{5}x - 1$, *zbytek:* $9x + 27$]
c) $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$, [*podíl:* $6x^2 + \frac{3}{2}x + 3$, *zbytek:* $-\frac{5}{2}x + 6$]
d) $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$. [*podíl:* $x^4 + x^3 + x^2$, *zbytek:* 1]

19. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy:

a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$, [*podíl:* $2x^2 + 7x + 10$, *zbytek:* 25]
b) $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$. [*podíl:* $\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{23}{27}x - \frac{4}{81}$, *zbytek:* $\frac{166}{81}$]

Kořeny polynomů

20. Uvažme polynom $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem polynomu f a určete jeho násobnost n.

$[n = 4\ ]$

21. Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

$[a = -5\ ]$

22. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$ dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Taylorův rozvoj polynomu

23. Vyjádřete polynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

$[f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1\ ]$

24. Vyjádřete polynom $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

$[f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8\ ]$

Racionální kořeny polynomů

25. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.

a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$

$[1, 2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ ]$

b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$

$[2, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ ]$

c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$

$[1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, -2\ ]$

d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$

$[3, 3, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1\ ]$

e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$

$[3, -2, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ ]$

f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$

$[-3, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ ]$

g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1\ ]$

h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$[-\frac{2}{5}\ ]$

i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\ ]$

j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$[0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\ ]$

k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\ ]$

l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3\ ]$

m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ ]$

n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$

$[2, 2, -1, -1, -1\ ]$

o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

$[-1, -1\ ]$

p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$[-1, 1, 1, 1, 2\ ]$

q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$

$[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ ]$

r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ ]$

26. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

$[a = 10$*; kořeny:* $2, 2, -2, -\frac{1}{2}\ ]$

27. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro něž má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen. $[a \in \{-83, -8, 4, 19\}\ ]$

Rozklad polynomů

28. Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} : (x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{2})(x - 1)\ ]$

b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 5(x + \frac{2}{5})(x^2 - 2x + 3)\ ]$

$[\mathbb{C} : 5(x + \frac{2}{5})(x - 1 - i\sqrt{2})(x - 1 + i\sqrt{2})\ ]$

c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$[\mathbb{Q} : 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4})(x^2 - x - 1)\ ]$

$[\mathbb{R}, \mathbb{C} : 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})\ ]$

d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 3x(x - \frac{2}{3})^2(x^2 + x + 1)\ ]$

$[\mathbb{C} : 3x(x - \frac{2}{3})^2(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})\ ]$

e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 6(x + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})(x^2 + x + 2)\ ]$

$[\mathbb{C} : 6(x + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2})\ ]$

f) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$[\mathbb{Q} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x^4 - 3)\ ]$

$[\mathbb{R} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})\ ]$

$[\mathbb{C} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x - i\sqrt[4]{3})(x + i\sqrt[4]{3})\ ]$

g) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$[\mathbb{Q} : (3x + 1)^2(x - 3)(x^3 + 2)\ ]$

$[\mathbb{R} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})\ ]$

$[\mathbb{C} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2})((x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}))\ ]$

29. Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 25, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

30. Určete všechny kořeny polynomu f, víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $f(x) = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$,

$[2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ ]$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)\ ]$

$[\mathbb{C} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$

b) $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$.

$[4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ ]$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)\ ]$

$[\mathbb{C} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$

Komplexně sdružené kořeny

31. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$[1+i, 1+i, 1-i, 1-i, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 2)^2\ ]$
$[\mathbb{C} : (x+1)(x-1+i)^2(x-1-i)^2(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$

32. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3 + 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$[x^5 - \frac{35}{3}x^4 + 58x^3 - \frac{406}{3}x^2 + 117x + \frac{169}{3}\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x + \frac{1}{3})(x^2 - 6x + 13)^2\ ]$
$[\mathbb{C} : (x + \frac{1}{3})(x - 3 + 2i)^2(x - 3 - 2i)^2\ ]$

33. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 - i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$[2-i, 2-i, 2+i, 2+i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x^2 - 4x + 5)^2(x^2 + x + 2)\ ]$
$[\mathbb{C} : (x-2+i)^2(x-2-i)^2(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i)\ ]$

34. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen k nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $k = 1 - i$,

$[x^6 - 5x^5 + \frac{49}{4}x^4 - 17x^3 + 14x^2 - 6x + 1\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - \frac{1}{2})^2(x^2 - 2x + 2)^2\ ]$
$[\mathbb{C} : (x - \frac{1}{2})^2(x - 1 + i)^2(x - 1 - i)^2\ ]$

b) $k = 1 - 2i$.

$[x^6 - 5x^5 + \frac{73}{4}x^4 - 35x^3 + \frac{97}{2}x^2 - 30x + \frac{25}{4}\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - \frac{1}{2})^2(x^2 - 2x + 5)^2\ ]$
$[(x - \frac{1}{2})^2(x - 1 + 2i)^2(x - 1 - 2i)^2\ ]$

35. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

$[\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\ ]$

36. Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu f.

$[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ]$

37. Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je

a) $1 + i$,

$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 2x + 2\ ]$

b) $2 + \sqrt{3}i$,

$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 4x + 27\ ]$

c) $\sqrt{3} - 5i$.

$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^4 + 44x^2 + 784; \mathbb{R}[x] : x^2 - 2\sqrt{3}x + 28\ ]$

Polynomy nad $\mathbb{Z}_p$

38. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$.

$[[1]_7, [5]_7, [5]_7, [6]_7, [6]_7\ ]$

39. Určete všechny ireducibilní polynomy nad

a) $\mathbb{Z}_2$ stupně menšího než 5, $[x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1$]

b) $\mathbb{Z}_3$ stupně menšího než 4. $[x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2, x^2+1, 2x^2+2, x^2+x+2, x^2+2x+2, 2x^2+x+1, 2x^2+2x+1, x^3+2x+1, 2x^3+x+2, x^3+2x+2, 2x^3+x+1, x^3+x^2+2, 2x^3+2x^2+1, x^3+2x^2+1, 2x^3+x^2+2, x^3+x^2+x+2, 2x^3+2x^2+2x+1, x^3+x^2+2x+1, 2x^3+2x^2+x+2, x^3+2x^2+x+1, 2x^3+x^2+2x+2, x^3+2x^2+2x+2, 2x^3+x^2+x+1$]

40. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-x+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.
$[[-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [1]_3, [1]_3$]

41. Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom x^3+x^2+ax+1 je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$.
$[a \in \{[0]_5, [3]_5, [4]_5\}$]

42. Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom x^3+x^2+x+a ireducibilní nad $\mathbb{Z}_7$.
$[a \in \{[2]_7, [5]_7\}$]

43. Udejte příklad polynomu

a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá, $[x^3+x^2+x+3$]

b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^5+x^4+1$]

c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^4+2x^2+1$]

d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^5+x^4+2x^3+x+2$]

e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny. $[x^6+2x^5+3x^4+2x^3+4x^2+x-1$]

44. Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.

a) $x^6+x^5+x^2+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^3+x^2+1)(x^2+x+1)(x+1)$]

b) $x^7+3x^6+2x^5-x^4+3x^3-x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x+1)^2(x+2)^3(x^2+2)$]

c) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x+1)(x^2+x+1)^2$]

d) $x^7-x^6+2x^4+x^3-x^2+2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x+2)(x+1)^2(x^2+2)(x^2+3)$]

e*) $x^5+x^4+x^3-x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ $[(x-1)(x^2-x-1)(x^2+1)$]

f) $x^4+x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^2+x+1)(x+1)^2$]

g*) $x^5+3x^3+x+3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x+2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$]

h) $x^5+x^3+2x^2+2$ $[(x+2)(x^2+x+4)(x^2+2x+4)$]

Eisensteinovo kritérium *

45. Ukažte, že polynom $f(x)$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$:

a) $f(x)=x^n+p$; $n \in \mathbb{N}$, p je prvočíslo,
[*plyne z E. k. volbou prvočísla p*]

b) $f(x)=x^6+x^3+1$.
$[f(x)=(x-1)^6+6(x-1)^5+15(x-1)^4+21(x-1)^3+18(x-1)^2+9(x-1)+3$]
[*plyne z E. k. volbou prvočísla* $p=3$]

46. Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že polynom x^2-n je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.
$[n=8$]

47. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $p(x)=x^n+n$

a) byl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$,
$[n=2$]

b) nebyl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.
$[n=4 : p(x)=x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$, $n=27 : p(x)=x^{27}+27=(x^9+3)(x^{18}-3x^9+9)$]

48. Určete, který z polynomů $f(x)=x^5+3x^3-9x+3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g(x)=x^4+4x^3+5x^2-3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ a který lze nad $\mathbb{Z}$ rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.
[f *je ireducibilní:* $f(x)=x^5+3x^3-9x+3$, *plyne z E. k. pro* $p=3$]
[g *není ireducibilní:* $g(x)=(x^2+x-1)(x^2+3x+3)$]

Euklidův aloritmus, Bezoutova rovnost

49. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2 + x - 6$,
$[f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3); g(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x+3)^2$]

b) $x^2 + x - 2$,
$[f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2); g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$]

c) $x^2 + 2x - 3$.
$[f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3); g(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1)(x+3)^2$]

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.
$[x^2 + x - 6 = f(-\frac{1}{5}) + g\frac{1}{5}; x^2 + x - 2 = f(-\frac{1}{3}) + g\frac{1}{3}; x^2 + 2x - 3 = f(-\frac{1}{4}) + g\frac{1}{4}$]

50. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) x^2+x-2, $[f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+3); g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x-1)(x+3)^3$]

b) $x^2 + 2x - 3$, $[f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+2); g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x - 27 = (x-1)(x+2)^3$]

c) $x^2 - 2x - 3$. $[f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = (x-3)^3(x+1); g(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x-3)(x+1)^3$]

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.
$[x^2 + x - 2 = f(\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}) + g(-\frac{2}{27}x + \frac{5}{27}); x^2 + 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{5}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}); x^2 - 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{5}{32})$]

51. Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$
$[(f, g) = 1 = f(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) + g(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$]

b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
$[(f, g) = x + 3 = f(\frac{3}{5}x - 1) + g(-\frac{x^2}{5} + \frac{2}{5}x)$]

c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$
$[(f, g) = x^2 - 3x - 1 = f(\frac{5}{9}x + \frac{11}{9}) + g(-\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9})$]

Násobné kořeny *

52. Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu:

a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,
$[-1 + i, -1 - i$]

b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,
$[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$]

c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.
$[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$]

53. Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom

a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,
$[(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^2$]

b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.
$[(x - i)^3(x + 3i)$]

c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.
$[(x + 2)^2(x - 2 + 2i)(x - 2 - 2i)$]

d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.
$[(x - i)^4(x + 4i)$]

e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.
$[(x + 1 + i)^2(x - 2 - 2i)$]

f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.
$[(x + i)^3(x - 3i)$]

Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

54. Rozložte racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x^2-x+1}{x^6+2x^4+x^2}$ $\quad [\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\ ]$

b) $\frac{x^3-4x^2-4x-2}{x^6-2x^3+1}$ $\quad [\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\ ]$

c) $\frac{3x^4+3x^2-7x-7}{x^5-3x^4+4x^3-12x^2+4x-12}$ $\quad [\frac{2}{x-3}+\frac{x+3}{x^2+2}+\frac{2x-1}{(x^2+2)^2}\ ]$

d) $\frac{x^4+x^2-1}{x^6-10x^3+25}$ $\quad [\frac{x}{x^3-5}+\frac{x^2+5x-1}{(x^3-5)^2}\ ]$

e) $\frac{x^5-x^4-x^3+x^2+x-1}{x^6-6x^4+12x^2-8}$ $\quad [\frac{x-1}{x^2-2}+\frac{3x-3}{(x^2-2)^2}+\frac{3x-3}{(x^2-2)^3}\ ]$

f) $\frac{4x^4+2x^3+15x^2+7}{x^5-2x^4+6x^3-12x^2+9x-18}$ $\quad [\frac{3}{x-2}+\frac{x+4}{x^2+3}+\frac{2x-2}{(x^2+3)^2}\ ]$

g) $\frac{8x^3-9x^2-18x+22}{4x^4-16x^3+25x^2-21x+9}$ $\quad [\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{(2x-3)^2}+\frac{x+3}{x^2-x+1}\ ]$

h) $\frac{21x^3-16x^2-12x+1}{9x^4-3x^3+13x^2+11x+2}$ $\quad [\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{(3x+1)^2}+\frac{2x-3}{x^2-x+2}\ ]$

i) $\frac{3x^4+2x^3-17x^2-7x-7}{2x^5-7x^4+6x^3-3x^2+4x+4}$ $\quad [\frac{-1}{2x+1}+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{x^2+1}\ ]$

j) $\frac{8x^4+2x^3+3x^2+3x+6}{3x^5+5x^4+7x^3+9x^2+2x-2}$ $\quad [\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{3x-1}+\frac{x-2}{x^2+2}\ ]$

k) $\frac{5x^3+7x^2-6x-10}{x^5+4x^4+2x^3-4x^2+8x+16}$ $\quad [\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{x-1}{x^2-2x+2}\ ]$

l) $\frac{x^3-2x^2-x+16}{x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8}$ $\quad [\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\ ]$