Sbírka příkladů z okruhů a polynomů – Algebra I

Okruhy, podokruhy, obor integrity, těleso, homomorfismus

1. Rozhodněte, zda daná množina M je podokruhem okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:
a) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$, *[ne]*
b) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$, *[ano]*
c) $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$, *[ne]*
d) $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, *[ne]*
e) $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, *[ano]*
f) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$. *[ano]*

2. Nechť $(R, +, \cdot)$ je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh taky
a) $(R, +, \Box)$, kde $\Box$ je operace definovaná vztahem $a \Box b = a \cdot b + b \cdot a$ pro libovolné $a, b \in R$, *[Ne]*
b) $(R, +, +)$. *[Ne]*

3. Rozhodněte, zda daná podmnožina A okruhu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
a) $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$ *[obor integrity; inv. prvky: $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p, q$]*
b) $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *[obor integrity; inv. prvky: $\pm 3^k$, kde $k \in \mathbb{Z}$]*
c) $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *[obor integrity; inv. prvky: $\pm 2^k \cdot 3^l$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$]*

4. Rozhodněte, zda $(M, \oplus, \odot)$ je okruh, obor integrity, těleso:
a) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x \cdot y - 1$ *[nic]*
b) $M = \mathbb{Z}$, $x \oplus y = x + y - 1$, $x \odot y = x + y - xy$ *[obor integrity]*
c) $M = \mathbb{Q}$, operace jako v b) *[těleso]*
d) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y) \odot (u, v) = (xu + 2yv, xv + yu)$ *[těleso]*
e) $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y) \odot (u, v) = (xu + yv, xv + yu + yv)$ *[těleso]*

5. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, je-li pro $a, b \in \mathbb{R}$ dáno:
a) $f(a + bi) = a + b$, *[Ne]*
b) $f(a + bi) = a^2 + b^2$, *[Ne]*
c) $f(a + bi) = a - bi$. *[Ano]*

6. Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

7. Dokažte, že okruh $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ z příkladu 4 b) je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

8. Určete všechny čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ takové, že předpis $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$, pro $r, s \in \mathbb{R}$, definuje homomorfismus $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ okruhu $\mathbb{C}$ do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

9. Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

Dělení v okruzích polynomů

10. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy

a) $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$, [*podíl:* $-x^2 - 2$, *zbytek:* $x^2 + 3$]

b) $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$, [*podíl:* $\frac{3}{5}x - 1$, *zbytek:* $9x + 27$]

c) $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$, [*podíl:* $6x^2 + \frac{3}{2}x + 3$, *zbytek:* $-\frac{5}{2}x + 6$]

d) $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$. [*podíl:* $x^4 + x^3 + x^2$, *zbytek:* 1]

11. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy:

a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$, [*podíl:* $2x^2 + 7x + 10$, *zbytek:* 25]

b) $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$. [*podíl:* $\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{23}{27}x - \frac{4}{81}$, *zbytek:* $\frac{166}{81}$]

Kořeny polynomů

12. Uvažme polynom $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem polynomu f a určete jeho násobnost n.

[$n = 4$]

13. Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

[$a = -5$]

14. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$ dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Taylorův rozvoj polynomu

15. Vyjádřete polynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

[$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$]

16. Vyjádřete polynom $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

[$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8$]

Racionální kořeny polynomů

17. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.

a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$

[$1, 2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$]

b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$

[$2, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$]

c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$

[$1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, -2$]

d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$

[$3, 3, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1$]

e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$

[$3, -2, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$]

f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$

[$-3, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$]

g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

[$-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1$]

h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$[-\frac{2}{5}\ ]$

i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\ ]$

j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$[0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\ ]$

k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\ ]$

l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3\ ]$

m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ ]$

n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$

$[2, 2, -1, -1, -1\ ]$

o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

$[-1, -1\ ]$

p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$[-1, 1, 1, 1, 2\ ]$

q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$

$[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ ]$

r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ ]$

18. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

[$a = 10$; *kořeny:* $2, 2, -2, -\frac{1}{2}$]

19. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro něž má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen. [$a \in \{-83, -8, 4, 19\}$]

Komplexní kořeny polynomů

20. Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

[$\sqrt[n]{2}(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}); k = 0, \dots, n-1$]

21. Nalezněte rovnici, jejíž všechna komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostranný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v i.

[$x^3 = -i$]

22. Řešte v $\mathbb{C}$ kvadratickou rovnici $x^2 + (1 + 3i)x + i - 2 = 0$.

[$-i, -1 - 2i$]

23. Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

[*Jsou to páté odmocniny z jedné, různé od* 1; *tj.* $x_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k = 1, 2, 3, 4$. *Jinak zapsáno:* $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$]

Rozklad polynomů

24. Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} : (x + \tfrac{2}{3})(x - \tfrac{1}{2})(x - 1)\ ]$$

b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 5(x + \tfrac{2}{5})(x^2 - 2x + 3)\ ]$$
$$[\mathbb{C} : 5(x + \tfrac{2}{5})(x - 1 - i\sqrt{2})(x - 1 + i\sqrt{2})\ ]$$

c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$$[\mathbb{Q} : 12(x + \tfrac{2}{3})(x - \tfrac{1}{4})(x^2 - x - 1)\ ]$$
$$[\mathbb{R}, \mathbb{C} : 12(x + \tfrac{2}{3})(x - \tfrac{1}{4})(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2})(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2})\ ]$$

d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 3x(x - \tfrac{2}{3})^2(x^2 + x + 1)\ ]$$
$$[\mathbb{C} : 3x(x - \tfrac{2}{3})^2(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2})(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2})\ ]$$

e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 6(x + \tfrac{2}{3})(x - \tfrac{3}{2})(x^2 + x + 2)\ ]$$
$$[\mathbb{C} : 6(x + \tfrac{2}{3})(x - \tfrac{3}{2})(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{7}}{2})(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{7}}{2})\ ]$$

f) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$$[\mathbb{Q} : 4(x - \tfrac{3}{2})^2(x^4 - 3)\ ]$$
$$[\mathbb{R} : 4(x - \tfrac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})\ ]$$
$$[\mathbb{C} : 4(x - \tfrac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x - i\sqrt[4]{3})(x + i\sqrt[4]{3})\ ]$$

g) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$$[\mathbb{Q} : (3x + 1)^2(x - 3)(x^3 + 2)\ ]$$
$$[\mathbb{R} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})\ ]$$
$$[\mathbb{C} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x - \tfrac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2})((x - \tfrac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}))\ ]$$

25. Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 17, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

26. Určete všechny kořeny polynomu f, víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $f(x) = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$,

$$[2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ]$$
$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)\ ]$$
$$[\mathbb{C} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$$

b) $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$.

$$[4, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ]$$
$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)\ ]$$
$$[\mathbb{C} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$$

Komplexně sdružené kořeny

27. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$[1 + i, 1 + i, 1 - i, 1 - i, -1, \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\ ]$$
$$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 2)^2\ ]$$
$$[\mathbb{C} : (x + 1)(x - 1 + i)^2(x - 1 - i)^2(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$$

28. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3+2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

[$x^5 - \frac{35}{3}x^4 + 58x^3 - \frac{406}{3}x^2 + 117x + \frac{169}{3}$]
[$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x+\frac{1}{3})(x^2-6x+13)^2$]
[$\mathbb{C} : (x+\frac{1}{3})(x-3+2i)^2(x-3-2i)^2$]

29. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2-i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

[$2-i, 2-i, 2+i, 2+i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$]
[$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x^2-4x+5)^2(x^2+x+2)$]
[$\mathbb{C} : (x-2+i)^2(x-2-i)^2(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)$]

30. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen k nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $k = 1-i$,

[$x^6 - 5x^5 + \frac{49}{4}x^4 - 17x^3 + 14x^2 - 6x + 1$]
[$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x-\frac{1}{2})^2(x^2-2x+2)^2$]
[$\mathbb{C} : (x-\frac{1}{2})^2(x-1+i)^2(x-1-i)^2$]

b) $k = 1-2i$.

[$x^6 - 5x^5 + \frac{73}{4}x^4 - 35x^3 + \frac{97}{2}x^2 - 30x + \frac{25}{4}$]
[$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x-\frac{1}{2})^2(x^2-2x+5)^2$]
[$(x-\frac{1}{2})^2(x-1+2i)^2(x-1-2i)^2$]

31. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

[$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \frac{1-i\sqrt{11}}{2}$]

32. Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu f.

[$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$]

33. Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je

a) $1+i$,

[$\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 2x + 2$]

b) $2+\sqrt{3}i$,

[$\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 4x + 27$]

c) $\sqrt{3}-5i$.

[$\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^4 + 44x^2 + 784; \mathbb{R}[x] : x^2 - 2\sqrt{3}x + 28$]

Polynomy nad $\mathbb{Z}_p$

34. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$.

[$[1]_7, [5]_7, [5]_7, [6]_7, [6]_7$]

35. Určete všechny ireducibilní polynomy nad

a) $\mathbb{Z}_2$ stupně menšího než 5, [$x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1$]

b) $\mathbb{Z}_3$ stupně menšího než 4. $[x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2, x^2+1, 2x^2+2, x^2+x+2, x^2+2x+2, 2x^2+x+1, 2x^2+2x+1, x^3+2x+1, 2x^3+x+2, x^3+2x+2, 2x^3+x+1, x^3+x^2+2, 2x^3+2x^2+1, x^3+2x^2+1, 2x^3+x^2+2, x^3+x^2+x+2, 2x^3+2x^2+2x+1, x^3+x^2+2x+1, 2x^3+2x^2+x+2, x^3+2x^2+x+1, 2x^3+x^2+2x+2, x^3+2x^2+2x+2, 2x^3+x^2+x+1\ ]$

36. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.

$[[-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [1]_3, [1]_3\ ]$

37. Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom $x^3 + x^2 + ax + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$.

$[a \in \{[0]_5, [3]_5, [4]_5\}\ ]$

38. Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom $x^3 + x^2 + x + a$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}_7$.

$[a \in \{[2]_7, [5]_7\}\ ]$

39. Udejte příklad polynomu

a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá, $[x^3+x^2+x+3\ ]$

b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^5 + x^4 + 1\ ]$

c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^4 + 2x^2 + 1\ ]$

d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^5 + x^4 + 2x^3 + x + 2\ ]$

e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny. $[x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1\ ]$

40. Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.

a) $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)\ ]$

b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x + 1)^2(x + 2)^3(x^2 + 2)\ ]$

c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x + 1)(x^2 + x + 1)^2\ ]$

d) $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x + 2)(x + 1)^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)\ ]$

e) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ $[(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^2 + 1)\ ]$

f) $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^2 + x + 1)(x + 1)^2\ ]$

g) $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)\ ]$

h) $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$ $[(x + 2)(x^2 + x + 4)(x^2 + 2x + 4)\ ]$

Eisensteinovo kritérium

41. Ukažte, že polynom $f(x)$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$:

a) $f(x) = x^n + p$; $n \in \mathbb{N}$, p je prvočíslo,

[*plyne z E. k. volbou prvočísla* p]

b) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$.

$[f(x) = (x - 1)^6 + 6(x - 1)^5 + 15(x - 1)^4 + 21(x - 1)^3 + 18(x - 1)^2 + 9(x - 1) + 3\ ]$

[*plyne z E. k. volbou prvočísla* $p = 3$]

42. Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že polynom $x^2 - n$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

$[n = 8\ ]$

43. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $p(x) = x^n + n$

a) byl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$,

$[n = 2\ ]$

b) nebyl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

$[n = 4 : p(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2),$ $n = 27 : p(x) = x^{27} + 27 = (x^9 + 3)(x^{18} - 3x^9 + 9)\ ]$

44. Určete, který z polynomů $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ a který lze nad $\mathbb{Z}$ rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.

[*f je ireducibilní:* $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3$, *plyne z E. k. pro* $p = 3$]

[*g není ireducibilní:* $g(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 3)$]

Euklidův aloritmus, Bezoutova rovnost

45. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2 + x - 6$,

$[f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3); g(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x+3)^2$]

b) $x^2 + x - 2$,

$[f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2); g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$]

c) $x^2 + 2x - 3$.

$[f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3); g(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1)(x+3)^2$]

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

$[x^2 + x - 6 = f(-\frac{1}{5}) + g\frac{1}{5}; x^2 + x - 2 = f(-\frac{1}{3}) + g\frac{1}{3}; x^2 + 2x - 3 = f(-\frac{1}{4}) + g\frac{1}{4}$]

46. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2 + x - 2$, $[f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+3); g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x-1)(x+3)^3$]

b) x^2+2x-3, $[f(x) = x^4-6x^2+8x-3 = (x-1)^3(x+2); g(x) = x^4+8x^3+18x-27 = (x-1)(x+2)^3$]

c) x^2-2x-3. $[f(x) = x^4-8x^3+18x^2-27 = (x-3)^3(x+1); g(x) = x^4-6x^2-8x-3 = (x-3)(x+1)^3$]

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

$[x^2 + x - 2 = f(\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}) + g(-\frac{2}{27}x + \frac{5}{27}); x^2 + 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{5}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}); x^2 - 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{5}{32})$]

47. Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$

$[(f, g) = 1 = f(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) + g(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$]

b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$

$[(f, g) = x + 3 = f(\frac{3}{5}x - 1) + g(-\frac{x^2}{5} + \frac{2}{5}x)$]

c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

$[(f, g) = x^2 - 3x - 1 = f(\frac{5}{9}x + \frac{11}{9}) + g(-\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9})$]

Násobné kořeny

48. Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu:

a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,

$[-1 + i, -1 - i$]

b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,

$[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$]

c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

$[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$]

49. Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom

a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,

$[(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^2 (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^2$]

b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

$[(x - i)^3 (x + 3i)$]

c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.

$[(x + 2)^2 (x - 2 + 2i)(x - 2 - 2i)$]

d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.

$[(x - i)^4 (x + 4i)$]

e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.

$[(x + 1 + i)^2 (x - 2 - 2i)$]

f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

$[(x + i)^3 (x - 3i)$]

Generovaní podokruhů a podtěles

50. Rozhodněte, zda následující podmnožina M okruhu komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je okruh, obor integrity, případně těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

a) $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ [*obor integrity*]

b) $M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [*těleso*]

c) $M = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [*nic*]

d) $M = \{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [*těleso*]

51. Určete, které prvky náleží nejmenšímu podokruhu okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahujícímu číslo a pro

a) $a = \sqrt{3}$, $[k + l\sqrt{3}; k, l \in \mathbb{Z}$]

b) $a = \sqrt[5]{2}$, $[k_0 + k_1 \sqrt[5]{2} + k_2 \sqrt[5]{4} + k_3 \sqrt[5]{8} + k_4 \sqrt[5]{16}; k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$]

c) $a = i$, $[k + li; k, l \in \mathbb{Z}$]

d) $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \xi_3$, $[k_0 + k_1 \xi_3; k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$]

e) $a = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \xi_7$, $[k_0 + k_1 \xi_7 + \ldots + k_5 \xi_7^5; k_0, k_1, \ldots, k_5 \in \mathbb{Z}$]

f) $a = \pi$, $[k_0 + k_1 \pi + \ldots + k_n \pi^n; n \in \mathbb{N}; k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$]

g) $a = \sqrt{n}$, $[k + l\sqrt{n}; k, l \in \mathbb{Z}$]

h) $a = \sqrt[3]{n}$, $[k_0 + k_1 \sqrt[3]{n} + k_2 \sqrt[3]{n^2}; k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$]

i) $a = \sqrt{ni}$. $[k + l\sqrt{ni}; k, l \in \mathbb{Z}$]

52. Pro prvky z příkladu 51 najděte nejmenší podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahující daný prvek.

53. Nalezněte invertibilní prvky okruhu $(\{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$

$[1, -1, 1 - \xi, -1 + \xi, \xi, -\xi,$ *kde* $\xi = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$]

Faktorové okruhy

54. Buď $\epsilon \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $f = x^3 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ stupně. Vyjádřete prvky ϵ^{-1} , $(1 + \epsilon)^3$ a $(\epsilon^2 + 3\epsilon - 1)^{-2}$ ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot \epsilon + a_2 \cdot \epsilon^2$, kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$.

55. Buď $\epsilon \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $f = x^4 + 2x^2 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Vyjádřete čísla ϵ^{-1}, ϵ^6 a $(\epsilon^2 + \epsilon + 1)^{-1}$ ve tvaru $a_0 + a_1 \cdot \epsilon + a_2 \cdot \epsilon^2 + a_3 \cdot \epsilon^3$, kde $a_i \in \mathbb{Q}$ pro $i = 0, \ldots, 3$.

56. Buď $f = x^2 + [1]_3 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Dokažte, že $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ je 9-prvkové těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_9$ prvek $\alpha = x + (f)$.
Určete $a_0, a = 1 \in \mathbb{Z}$ takové, že

i) $[a_0]_3 + [a_1]_3 \cdot \alpha = \alpha^4$;

ii) $[a_0]_3 + [a_1]_3 \cdot \alpha = (\alpha + [1]_3)^{-1}$.

57. Buď $f = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ a označme $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ příslušné těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$ prvek $\alpha = x + (f)$.
Určete $a_i \in \mathbb{Z}_2$ pro $i = 0, 1, 2, 3$ takové, že

i) $a_0 + a_1 \cdot \alpha + \cdots + a_3 \cdot \alpha^3 = \alpha^6$;

ii) $a_0 + a_1 \cdot \alpha + \cdots + a_3 \cdot \alpha^3 = (\alpha^2 + 1)^{-1}$.

58. Buď $f = x^3 - x + [2]_5 \in \mathbb{Z}_5[x]$ a nechť $\mathbb{F}_{125} = \mathbb{Z}_5[x]/(f)$ je 125-prvkové těleso. Označme $\alpha \in \mathbb{F}_{125}$ prvek $\alpha = x + (f)$. Určete $a, b, c \in \mathbb{Z}$ taková, že

i) $[a]_5 + [b]_5 \cdot \alpha + [c]_5 \cdot \alpha^2 = \alpha^5$,

ii) $[a]_5 + [b]_5 \cdot \alpha + [c]_5 \cdot \alpha^2 = (\alpha^4 + \alpha + 1)^{-1}$.