Zápočtová písemka Cvičení Algebra II
jaro 2002, 2. termín

Jméno: ....

Login/UČO: ....

Hodnocení						

1. (3b) Řešte v $\mathbb{R}$ následující soustavu rovnic.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 27$$

2. (3b) Určete minimální polynom prvku $i\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}$ nad $\mathbb{Q}$.

3. (4b) V $\mathbb{Z}_{20}$ uvažme podmnožinu $I = \{[0]_{20}, [5]_{20}, [10]_{20}, [15]_{20}\}$.

(a) Dokažte, že I je ideál okruhu $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$.

(b) Rozhodněte, zda je I maximální ideál.

(c) Rozhodněte, zda je I prvoideál.

(d) Určete kolik prvků má faktorokruh $\mathbb{Z}_{20}/I$.

(e) Rozhodněte, zda je faktorokruh $\mathbb{Z}_{20}/I$ těleso.

(f) Rozhodněte, zda je I podokruh okruhu $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$.

(g) Rozhodněte, zda je $(I, +, \cdot)$ okruh.

Všechny svoje odpovědi zdůvodněte.

4. (4b) Buď $\epsilon \in \mathbb{R}$ kořen polynomu $x^3 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Určete stupeň rozšíření tělesa $\mathbb{Q}(\epsilon)$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ a udejte bázi tohoto rozšíření; svoji odpoveď zdůvodněte. Vyjádřete prvky ϵ^{-1} a $(1+\epsilon)^3$ v této bázi.

5. (4b) Nechť je dána množina $A = \{a, b, c, d, e\}$ a její podmnožina $B = \{a, b, c, d\}$. Dále je dáno uspořádání $\leq$ množiny B takto: $a \leq b \leq d$, $a \leq c \leq d$. Definujte na množině A uspořádání $\preceq$ tak, aby na množině B splývalo s uspořádáním $\leq$ a aby $(A, \preceq)$

(a) nebyl svaz,

(b) byl svaz, ale B nebyl podsvaz svazu $(A, \preceq)$,

(c) byl svaz, který není modulární,

(d) byl svaz, který není distributivní,

(e) byl svaz, který není samoduální,

(f) byl samoduální a modulární svaz,

(g) byl samoduální a distributivní svaz.

6. (4b) Buď množina $\mathcal{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{a\}$ uspořádána takto:

$$x \leq y \quad \iff \quad y = a \ \vee \ x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2.$$

($(\mathcal{N}, \leq)$ je svaz, který je součin dvou kopií svazu $(\mathbb{N}, \leq)$, k němuž je přidán největší prvek a.) Rozhodněte, zda $(\mathcal{N}, \leq)$ je úplný svaz, distributivní svaz, modulární svaz — svoje odpovědi zdůvodněte. Dejte příklad ideálu svazu $(\mathcal{N}, \leq)$, který není hlavní. Pokuste se popsat všechny ideály, které nejsou hlavní.

Požadovaný zisk: 10 bodů.