4. test — Algebra I — jaro 2006 — 4. 5. — sk. A

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (5 bodů) Označme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & 2d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Víme, že G společně s operací násobení matic tvoří grupu $(G, \cdot)$ a dále, že H je podgrupa grupy G. Poznamenejme, že v grupě G platí:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že H je normální podgrupa grupy G.

Popište rozklad G/H, tj. charakterizujte kdy dvě matice náleží do stejné třídy rozkladu.

Určete, které grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$ pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

2. (2 body) Buď α homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ do grupy $(\mathbb{S}_{24}, \circ)$ definovaný předpisem $\alpha([a]_{24}) = (1,2)^a \circ (3,4,5)^a$. Určete jádro a obraz homomorfismu α.

3. (3 body) Nechť jsou dány grupy $(G, \cdot)$, $(H, \circ)$. Dokažte, že $K = G \times \{1_H\}$ je normální podgrupa grupy $(G, \cdot) \times (H, \circ)$.

Popište rozklad $G \times H/K$, tj. charakterizujte kdy dva prvky grupy $G \times H$ náleží do stejné třídy rozkladu.

Určete, které grupě $(N, \Box)$ je izomorfní faktorgrupa $G \times H/K$, tj. popište grupu $(N, \Box)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \times H \to N$ pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je K.

4. test — Algebra I — jaro 2006 — 4. 5. — sk. B

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení			

K řešení použijte volné místo. Všechny odpovědi musí být řádně zdůvodněny. Na vypracování je 45 minut.

1. (5 bodů) Označme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3d & e \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Víme, že G společně s operací násobení matic tvoří grupu $(G, \cdot)$ a dále, že H je podgrupa grupy G. Poznamenejme, že v grupě G platí:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že H je normální podgrupa grupy G.

Popište rozklad G/H, tj. charakterizujte kdy dvě matice náleží do stejné třídy rozkladu.

Určete, které grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa G/H, tj. popište grupu $(K, \cdot)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$ pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

2. (2 body) Buď β homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ do grupy $(\mathbb{S}_{24}, \circ)$ definovaný předpisem $\beta([a]_{24}) = (1,2)^a \circ (3,4,5,6)^a$. Určete jádro a obraz homomorfismu β.

3. (3 body) Nechť je dána komutativní grupa $(G, \cdot)$. Dokažte, že $H = \{(g, g) \mid g \in G\}$ je normální podgrupa grupy $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$.

Popište rozklad $G \times G/H$, tj. charakterizujte kdy dva prvky grupy $G \times G$ náleží do stejné třídy rozkladu.

Určete, které grupě $(N, \Box)$ je izomorfní faktorgrupa $G \times G/H$, tj. popište grupu $(N, \Box)$ a definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \times G \to N$ pro něž dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.