Zápočtová písemka Cvičení Algebra II
jaro 2002, 1. termín

Jméno: ....

Login/UČO: ....

Hodnocení					

1. (5b) Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu rovnic

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 13$$
$$x_1 - x_1x_2 + x_2 = 1$$

2. (4b) Určete minimální polynom prvku $\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

3. (7b) Označme $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+[1]_2)$ osmiprvkové těleso a $\alpha \in \mathbb{F}_8$ prvek $\alpha = x+(x^3+x+[1]_2)$.

(a) Určete $a, b, c \in \mathbb{Z}$ takové, že
  i. $[a]_2 + [b]_2 \cdot \alpha + [c]_2 \cdot \alpha^2 = \alpha^4$
  ii. $[a]_2 + [b]_2 \cdot \alpha + [c]_2 \cdot \alpha^2 = (\alpha + [1]_2)^{-1}$

(b) rozhodněte, zda $(\mathbb{F}_8, +, \cdot)$ obsahuje čtyřprvkové podtěleso

(c) popište všechny ideály okruhu $(\mathbb{F}_8, +, \cdot)$

(d) určete, kolik existuje podgrup aditivní grupy $(\mathbb{F}_8, +)$

(e) určete stupeň rozšíření $\mathbb{F}_8/\mathbb{Z}_2$.

Všechny svoje odpovědi zdůvodněte.

4. (4b) Na množině celých čísel $\mathbb{Z}$ definujte uspořádání $\preceq$ takové, že $(\mathbb{Z}, \preceq)$ je svaz, který není samoduální a který

(a) je úplný a distributivní

(b) je úplný, modulární a není distributivní

(c) je úplný a není modulární

(d) není úplný, ale má největší a nejmenší prvek.

Uspořádání můžete definovat obrázkem, bude-li z něj zcela zřejmé, o jaké uspořádání se jedná.

5. (5b)

(a) Rozhodněte, zda je každý ideál svazu $(\mathbb{N}_0, |)$ hlavní.

(b) Popište všechny ideály svazu $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$, kde $\leq$ označuje obvyklé uspořádání na $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Rozhodněte, zda je svaz všech ideálů uspořádaných inkluzí $\subseteq$ izomorfní svazu $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$.

(c) Rozhodněte, zda existuje svaz $(L, \leq)$ a podmnožina $A \subseteq L$, $\emptyset \neq A \neq L$ taková, že A je zároveň ideál a filtr svazu $(L, \leq)$.

Všechny svoje odpovědi zdůvodněte.

Požadovaný zisk: 10 bodů.