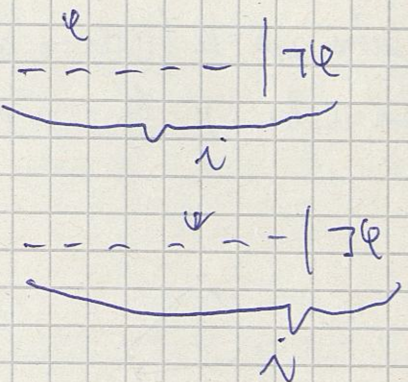
uzavřená instance formule – za volné proměnné dosadíme uzavřené termy

$\boxed{\text{1. PŘ.}}$

- zkouška – 20% za DÚ (4 nejlepší z 5 se počítají)
  – 80% zbytek
- materiály: slidy (stáhnout novější)

$\boxed{\text{2. PŘ.}}$

- na metaúrovni můžeme psát $A \vee B$ místo $(A \vee B)$
- korektnost dedukce: metaindukcí vzhledem k ~~délce vytv. posloupnosti~~ složitosti formule (délka minimální vytv. posloupnosti)



φ je tautologie $\Leftrightarrow \neg\varphi$ je nesplnitelná

$\models \varphi$ značí tautologie

SAT $\in$ NP

pravdivost $\in$ co-NP

$\boxed{\text{1. CV.}}$

- 5x domácí úkol – nepovinné (20% známky), po 5 bodech (+ bonusové), počítají se 4 nejlepší
  celkem 20 bodů
  zkouška 80 bodů
- účast nepovinná

* Jaké je ~~nejmenší~~ největší číslo, které lze zapsat méně než deseti slovy

x

$x+1$: nejmenší číslo, které nelze zapsat méně než deseti slovy
1 2 3 4 5 6 7 8 9

- Množina $|\{1,1,3\}| = 2$

$|\{x, 0\}| = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$, kde $x \in \mathbb{R}$

$|\emptyset| = 0$

$|\{\emptyset\}| = 1$

$|\{\{\emptyset\}, \emptyset\}|$

$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$

- relace $\sigma \subseteq M_1 \times M_2$

$\sigma \subseteq M \times M$ (relace na M)

σ je reflexivní $\overset{def}{\iff}$ pro všechna $a \in M$: $(a,a) \in \sigma$

Meta	formální
a, nebo, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
pro všechna, existuje	$\forall, \exists$
$\equiv$	$=$

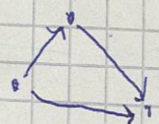
σ je symetrická $\overset{def}{\iff}$ pro všechna $a,b \in M$: $(a,b) \in \sigma \Rightarrow (b,a) \in \sigma$

σ je antisymetrická $\overset{def}{\iff}$ pro všechna $a,b \in M$: $((a,b) \in \sigma$ a $(b,a) \in \sigma) \Rightarrow a = b$

σ je tranzitivní $\overset{def}{\iff}$ pro všechna $a,b,c \in M$: $((a,b) \in \sigma$ a $(b,c) \in \sigma) \Rightarrow (a,c) \in \sigma$

$M = \{1,2,3\}$

$\sigma = \emptyset$ je SAT



relace nemůže být RSA (bez T)

RT: předuspořádání (kvaziuspořádání)

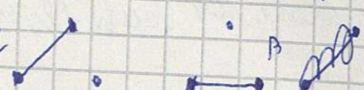
uspořádání, ekvivalence

* Nechť α, β jsou ekvivalence na M. Rozhodněte a dokažte, zda:

a) $\alpha \cap \beta$ je ekvivalence

b) $\alpha \cup \beta$ je ekvivalence

a) 

b) není α  (lepší psát na množinách)

a) ano, lehké

- $\sigma \subseteq A \times B$ je zobrazení $\overset{def}{\iff}$ pro všechna $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ takové, že $(a,b) \in \sigma$

~~- zobrazení [illegible] F~~

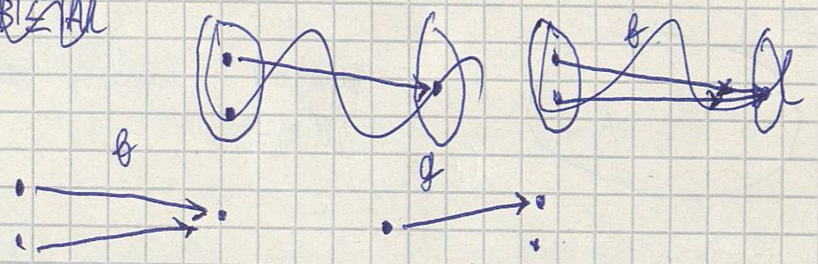
- surjekce, injekce, bijekce

* Zadejte množiny A, B a zobrazení $f: A \to B$, $g: B \to A$ tak aby f bylo surjekcí ale ne inj. a g

b) ~~f bylo surjekcí~~ bylo inj ale ne sur

a) $f: A \to B$, $g: B \to A$

$|B| \leq |A|$



b) $f: A \to B$, $g: A \to B$ $\quad |A| \leq |B| \quad |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$

~~$|A| \leq$~~ [illegible]

jde to $A = B = \mathbb{N}$

$f:$ $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$, $4 \mapsto 3$, $\vdots$

$g:$ $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 6$, $\vdots$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ldots x = 0 \\ x-1 \ldots \text{jinak} \end{cases}$$

$$g(x) = 2x$$

$$g = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$g = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y = 2x\}$$

$$f = \{(0,0), (x, x-1) \mid x \in \mathbb{N}^+\}$$

$$f = \{(0,0), (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x = y + 1\}$$

* Součet prvních n lichých čísel je roven n^2.

$\forall$ 1. $0 = 0^2$

2. $$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$\boxed{3. \text{ PŘ.}}$

X_1	X_2	$\ldots$	X_n	F
1	0		1	1
0	1		0	0
1	1		0	1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

$\varphi_F \equiv \bigvee \wedge$

$X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \ldots \wedge X_n \ \ldots \text{DNF}$

$F(\vec{u}) = 1 \iff v_{\vec{u}}(\varphi_F) = 1$

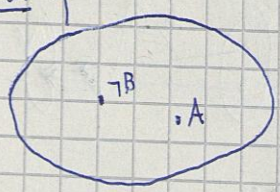
$\neg \hat{\varphi}_F \sim \bigvee \wedge \quad$ DNF $\qquad \neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$

$\hat{\varphi}_F \sim \bigwedge \vee \quad$ CNF

SAT CNF – NP-complete

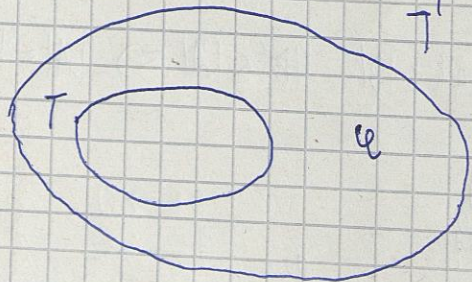
SAT DNF – P

věta 22: důkaz



$\nu(A)=1$ … hledaná valuace

$\nu(B)=0$



T' obsahuje buď φ nebo ¬φ (nemůže obě)

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$

T přidáme φ_1 pokud $T \cup \{\varphi_1\}$ je dobrá

přidáme $\neg\varphi_1$ jinak a $T \cup \{\neg\varphi_1\}$ je dobrá

nechť $T \cup \{\varphi_1\}$, $T \cup \{\neg\varphi_1\}$ nejsou dobré

existuje konečná $V_1 \subseteq T \cup \{\varphi_1\}$, $V_2 \subseteq T \cup \{\neg\varphi_1\}$, které nejsou splnitelné

$V_1 = T_1 \cup \{\varphi_1\}$

$V_2 = T_2 \cup \{\neg\varphi_1\}$

$T_1 \cup T_2$ je konečná část T $\Rightarrow$ ex. ν t. ž. $\nu(T_1 \cup T_2)=1$

pokud $\nu(\varphi_1)=1$, tak V_1 je splnitelný

–"– $\nu(\varphi_1)=0$ –"– V_2 –"–

T' je limita posloupnosti

sporem: TP nechť T' není dobrý, ex. konečná část taková, že V není splnitelný

$V = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ $\quad \psi_i \in \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

vezmeme "$\max_{i \le n} \psi_i$" a T_i

def. $\nu(A)=1 \iff A \in T'$, ukažme pro každé $\varphi \in T'$ platí $\nu(\varphi)=1$.

dokažme: pro každou formuli φ: $\varphi \in T' \iff \nu(\varphi)=1$

indukcí: $\varphi \equiv A$ ✓

a) $\varphi \equiv \neg \psi$

b) $\varphi \equiv \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$

c) $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$

d) $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$

a) ~~$\psi \in T' \iff v(\psi)=1$, navíc $\neg\psi \notin T'$~~

chci $\neg\psi \in T' \iff v(\neg\psi)=1$

vím: $\psi \in T' \iff v(\psi)=1$

$\neg\psi \in T' \iff \psi \notin T' \iff v(\psi)=0 \iff v(\neg\psi)=1$

b)

chci: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in T' \iff v(\varphi_1 \wedge \varphi_2)=1$

vím: $\varphi_1 \in T' \iff v(\varphi_1)=1$

$\varphi_2 \in T' \iff v(\varphi_2)=1$

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in T' \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2 \in T'$ (jinak by $\neg\varphi_1, \varphi_1 \wedge \varphi_2$ byly nesplnitelný)

$\Rightarrow v(\varphi_1)=v(\varphi_2)=1$

$\Rightarrow v(\varphi_1 \wedge \varphi_2)=1$ a podobně "$\Leftarrow$"

- <u>věta 35</u>: důkaz

"$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" ex. důkaz $\xi_1, \dots, \xi_n$ ukážeme: $T \vdash \psi \rightarrow \xi_i$ pro každé i

φ z $T \cup \{\psi\}$

metaindukce

- $T \vdash \psi \rightarrow \xi_1$

$\xi_1 =$
- ψ — $T \vdash \psi \rightarrow \psi$ ✓
- prvek T
- instance axiomu

} $\xi_1, \xi_1 \rightarrow (\psi \rightarrow \xi_1), \psi \rightarrow \xi_1$

- $T \vdash \psi \rightarrow \xi_i$

$\xi_i =$
- ψ ✓
- prvek T ✓
- instance axiomu ✓
- MP na $\xi_m, \xi_n = \xi_m \rightarrow \xi_i$ ... viz slidy

vím (~~[illegible]~~ pro předchozí)

- př. k lemmatu 39

$(A \to B) \to (B \to A)$

$v(A)=1$

$v(B)=0$ $\quad$ $\{A, \neg B\} \vdash (A \to B) \to (B \to A)$

$\boxed{\text{2. CV.}}$

* Jsou to formule?

$\varphi = ((A \to B) \wedge (C \vee \neg D))$ je to formule $(A, B, C, D, (A \to B), \neg D, (C \vee \neg D), \varphi)$

* $\varphi_n = (A_n \to (A_{n-1} \to \dots \to (A_1 \to A_0))$

$\varphi_0 = A_0$

$\varphi_{n+1} = (A_{n+1} \to \varphi_n)$

Dokážeme indukcí vzhledem k $n \in \mathbb{N}$, že každé slovo φ_n je formule:

Pro $n=0$: $\varphi_0 = A_0$, což má vytv. posloupnost (A_0)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a φ_n má vytv. posloupnost $(\psi_1, \dots, \psi_k)$.

Pak φ_{n+1} má vytv. posloupnost $(\psi_1, \dots, \psi_k, A_{n+1}, \varphi_{n+1})$.

Dokážeme, že vzhledem k $n \in \mathbb{N}$, že $|\varphi_n| = 4n+1$:

pro $n=0$ máme $|\varphi_0| = |A_0| = 1 = 4 \cdot 0 + 1$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $|\varphi_n| = 4n+1$, pak $|\varphi_{n+1}| = |(A_{n+1} \to \varphi_n)| = 4 + |\varphi_n| = 4 + (4n+1) = 4(n+1)+1$

- pozor: $\neg$ je taky spojka
- pozor: $(A \wedge A)$ obsahuje 1 výrokovou proměnnou, ale 2 výskyty výrokových proměnných

* Je $(A \wedge \vee B)$ formule? Ne. Nesedí $b(\varphi) = l(\varphi)$

Nechť $b(\varphi)$, resp. $l(\varphi)$ označuje počet výskytů binárních spojek, resp. počet výskytů levých závorek ve slově φ. Dokážeme pro každou formuli φ: $b(\varphi) = l(\varphi)$ strukturální indukcí.

- Je-li $\varphi = X$, pak $b(\varphi) = 0 = l(\varphi)$
- Nechť $\varphi = \neg\psi$, kde $b(\psi) = l(\psi)$. Pak $b(\varphi) = b(\neg\psi) = b(\psi) \overset{IP}{=} l(\psi) = l(\neg\psi) = l(\varphi)$
- Nechť $\varphi = (\psi \circ \xi)$, kde $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, $b(\psi) = l(\psi)$. Pak $b(\varphi) = 1 + b(\psi) + b(\xi) \overset{IP}{=} 1 + l(\psi) + l(\xi) = l(\varphi)$

* Jakou největší délku může mít formule, která má vytv. posloupnost délky $n\in\mathbb{N}^+$? (najděte $f(n)$)

$A, (A\to A)$, $\quad A, A, A \quad$ $A, (A\to A), ((A\to A)\to(A\to A))$

A, B $\quad$ ~~$A, B, (A\wedge B)$~~ ~~$A, \neg A, (\neg A\wedge\neg A)$~~

~~$A, \neg A, (\neg A\wedge\neg A), ((\neg A\wedge\neg A)\wedge(\neg A\wedge \neg A))$~~

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \qquad a_1 = 1 \qquad a_3 = 13$$
$$a_n = 2^{n+1} - 3 \qquad a_2 = 5 \qquad a_4 = 29$$
$$a_3 = \cancel{7} \qquad a_4 = \cancel{17} \qquad \vdots$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3$$
$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$
$$a_{n-1} = 2a_{n-2} + 3$$
$$\vdots$$
$$a_3 = 2a_2 + 3$$

Dokažme, že pro každé $n\in\mathbb{N}^+$ je $a_n = 2^{n+1}-3$.

Definujeme induktivně vzhledem k $n\in\mathbb{N}^+$ formule φ_n:

$\varphi_1 = A$

$\varphi_{n+1} = (\varphi_n \to \varphi_n)$

Pro $n=1$ máme $|\varphi_1| = |A| = 1 = 2^2-3$. Nechť $n\in\mathbb{N}^+$ a $|\varphi_n| = 2^{n+1}-3$. Pak $|\varphi_{n+1}| = 2|\varphi_n| + 3 \overset{IP}{=} 2(2^{n+1}-3)+3 = 2^{n+2}-3$.

[Tím jsme dokázali, že $f(n) \geq 2^{n+1}-3$].

Dokážeme, že je-li φ formule o vytv. posloupnosti délky $n\in\mathbb{N}^+$, pak $|\varphi| \leq 2^{n+1}-3$, a to strukturální indukcí vzhledem k n.

Nechť φ je formule s vytv. posloupností délky $n\in\mathbb{N}^+$ a pro každou formuli ψ s vytv. posloupností délky $k<n$ platí $|\psi| \leq 2^{k+1}-3$.

Je-li $\varphi = X$, kde X je výr. proměnná, pak $|\varphi| = |X| = 1 = 2^{1+1}-3 \leq 2^{n+1}-3$

Je-li $\varphi = \neg\psi$, kde $|\psi| \leq 2^n - 3$, pak $|\varphi| = |\neg\psi| = 1 + |\psi| \leq 1 + (2^n-3) < 2^{n+1}-3$

Je-li $\varphi = (\psi\circ\xi)$, kde $\circ\in\{\wedge, \vee, \to\}$ a $|\psi| \leq 2^n-3$, $|\xi| \leq 2^n-3$, pak $|\varphi| = |(\psi\circ\xi)| = |\psi| + |\xi| + 3 \overset{IP}{\leq} (2^n-3) + (2^n-3) + 3 \leq 2^{n+1}-3$.

Tedy $f(n) \leq 2^{n+1}-3$.

Celkem $f(n) = 2^{n+1}-3$

- valuace výr. proměnných: $v: Var \to \{0,1\}$
- valuace formulí $\bar{v}: For \to \{0,1\}$

$$\bar{v}(X) = v(X)$$
$$\bar{v}(\neg\varphi) = 1 - \bar{v}(\varphi)$$
$$\cancel{\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff \bar{v} =}$$
$$\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = \min\{\bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi)\} = \bar{v}(\varphi) \cdot \bar{v}(\psi)$$
$$\bar{v}(\varphi \vee \psi) = \max(\bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi))$$
$$\bar{v}(\varphi \to \psi) = \max\{1 - \bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi)\}$$

(píšeme pak $\bar{v} = v$)

- nesplnitelná, kontradikce (synonyma)

* Je následující formule splnitelná

$$(A \to \neg A) \wedge ((B \leftrightarrow C) \wedge (\neg A \to C))$$

Ano. $v(A) = 0$, $v(C) = 1$, $v(B) = 1$

Kolik existuje ~~formulí~~ valuací ~~$\bar{v}(A)$~~ v tak, že $v(X) = 0$ pro $X \in Var - \{a, b, c\}$

Jedna! viz dále

$$(A \to \neg A) \wedge ((B \leftrightarrow C) \wedge (\neg A \to C)) \approx \neg A \wedge \{(B \leftrightarrow C) \wedge (\neg A \to C)\} \approx$$
$$\approx \neg A \wedge (B \leftrightarrow C) \wedge C \approx \neg A \wedge B \wedge C$$

* Dejte příklad formulí φ, ψ takových že
$\varphi \to \psi$ je tautologie a zároveň $\psi \to \varphi$ je kontradikce

$v(\psi) = 1$
$v(\varphi) = 0$ (tedy ψ musí být tautologie a φ kontradikce)

$\varphi = \neg A \wedge A$ ~~$\approx$~~ nebo $A \to A$
$\psi = \neg A \vee A$ nebo $\neg(A \to A)$

* Rozhodněte a dokažte, zda existuje formule φ taková, že

$\varphi(A)$ $\quad \varphi \to (\varphi \to A) \approx A$

$v(A) = 0$
$v(\varphi) = 1$
$v(\varphi \to A) = 0$

$\neg A \to (\neg A \to A) \approx \neg A \to A \approx A$

$\varphi = \neg A$

$\varphi = T$ (tautologie)

$T \to (T \to A) \approx T \to A \approx A$

* $\varphi \to (\varphi \to A) \overset{?}{\sim} \neg A$

$v(A) = 1$ (zbytek libovolně)

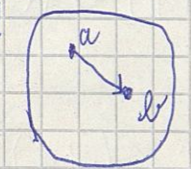
$v(\varphi) = 1$

$v(\varphi \to A) = 0$, spor ... nelze takové φ najít

$\boxed{6.\ \text{PŘ.}}$

- $e: Var \to M$ (ohodnocení)
- bacha: v termu

M



$b \in_M a$

$\boxed{3.\ \text{CV.}}$

množina výrokových ~~proměnných~~ formulí

* Induktivně zadefinujte zobrazení $F_{sub}: VF \to 2^{VF}$ takové, že pro každou formuli φ, $F_{sub}(\varphi)$ je množinou podformulí φ.

strukturální indukce:

$$F_{sub}(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup F_{sub}(\varphi)$$

$$F_{sub}((\varphi \circ \psi)) = F_{sub}(\varphi) \cup F_{sub}(\psi) \cup \{(\varphi \circ \psi)\}$$

$\circ \in \{\vee, \wedge, \to\}$

$$F_{sub}(A) = \{A\}$$

* ÚA

- $\mathcal{L}$ je plnohodnotný $\overset{def}{\iff}$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou funkci $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ existuje formule $\varphi \in \mathcal{L}$ a výrokové proměnné $A_1, \dots, A_n$ taková, že pro každou valuaci v: $v(\varphi) = F(v(A_1), \dots, v(A_n))$
- Nechť $\mathcal{L}$ je plnohodnotný, pak $\mathcal{L}'$ je plnohodnotný $\iff$ pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}$ existuje $\varphi' \in \mathcal{L}'$ taková, že $\varphi \sim \varphi'$.

* Ukažte, že $\mathcal{L}_1(\neg)$ není plnohodnotný, ~~tyan~~
víme, že $\mathcal{L}(\neg, \vee, \wedge, \to)$ je plnohodnotný

Uvažme $\varphi = A \vee \neg A$

Nechť $v_1(X) = 1$ a $v_0(X) = 0$ pro všechny proměnné X.

Ukážeme, že každá formule $\varphi_1 \in \mathcal{L}_1$: $v_1(\varphi_1) \neq v_0(\varphi_1)$

1. $\varphi_1 = X$, $v_1(X) = 1 \neq 0 = v_0(X)$
2. $\varphi_1 = \neg\psi_1$ $v_1(\varphi_1) = 1 - v_1(\psi_1) \neq 1 - v_0(\psi_1) = v_0(\varphi_1)$ } indukcí

* Je $\mathcal{L}_2(|)$ plnohodnotný? Ano!

$\neg\varphi \approx \varphi | \varphi$

$(\varphi \wedge \psi) \approx \neg(\varphi | \psi) \approx (\varphi|\psi)|(\varphi|\psi)$ } tohle stačí, protože $\mathcal{L}(\wedge,\neg)$ je plnohodnotný

$(\varphi \vee \psi) \approx \neg\varphi | \neg\psi \approx (\varphi|\varphi)|(\psi|\psi)$

$(\varphi \to \psi) \approx \neg\varphi \vee \psi \approx \varphi | \neg\psi \approx \varphi|(\psi|\psi)$

* Je $\mathcal{L}_3(\wedge, \vee)$ plnohodnotný? Ne!

~~Uvažme~~

Každá formule $\varphi_3 \in \mathcal{L}_3$ dává $v_1(\varphi_3) = 1$

1. $\varphi_3 = X$, $v_1(X) = 1$
2. $\varphi_3 = \psi_3 \wedge \psi_3'$
   $v_1(\varphi_3) = v_1(\psi_3) \cdot v_1(\psi_3') = 1$
3. $\varphi_3 = \psi_3 \vee \psi_3'$
   $v_1(\varphi_3) = \max\{v_1(\psi_3), v_1(\psi_3')\} = 1$

Ale, $v_1(\neg A) = 0$, spor.

- MP: $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$

- odvozovací pravidlo je vlastně funkce (a axiómy jsou nulární odvozovací pravidla)

- Łukasiewicz (není třeba to umět)
- A_1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- A_2: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \longrightarrow ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- A_3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \longrightarrow (\psi \to \varphi)$

* Dokažte

a) $P \to (Q \to P)$ to je přece instance axiomu A_1

b) $P \to Q$ nelze dle věty o korektnosti, protože $P \to Q$ není tautologie

stačí to dokázat tak, že axiomy jsou tautologie a ~~ta~~ MP zachovává tautologie

A_1: $\varphi \to (\psi \to \varphi) \sim \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \varphi) \sim \neg\varphi \vee \varphi$

A_2: $\neg(\varphi \to (\psi \to \chi)) \vee ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \sim$

$\sim (\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\chi)) \vee ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \vee \chi)) \sim \chi \vee \neg\varphi \vee \neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi \wedge \neg\chi)$

A_3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \sim (\neg\varphi \wedge \psi) \vee \neg\psi \vee \varphi$

MP: lehké

$P \to (P \to P)$

$(P \to (P \to P)) \to ((P \to P) \to (P \to P))$

$((P \to P) \to (P \to P))$

c) $P \to P$

$P \to (P \to P)$

$(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$

$P \to P$

1. $P \to (P \to P)$ A_1

~~$(P \to (P \to P)) \to ($~~

2. $P \to ((P \to P) \to P)$ A_1

Bl

~~$(P \to (P \to P)) \to (P \to P) \to$~~

3. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$ A_2

4. $((P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ MP na 2, 3 (záleží na pořadí)

5. $P \to P$ MP na 1, 4

* uvažme systém A_1: $\varphi \to \varphi$ a MP. Jsou tyto dokazatelný

a) $\neg A \to \neg A$ ano!

b) $A \to B$ ne! Dle věty o korektnosti, protože ~~A~~ A_1 je tautologie, ale $A \to B$ není

c) $A \to (A \to A)$ tohle je tautologie, ale není dokazatelný

Pro každou formuli dokazatelnou φ platí, že má sudý počet výskytů proměnných. Indukcí $F(A \to (A \to A)) = 3$

1. $\varphi = \psi \to \psi$, $F(\varphi) = 2 \cdot F(\psi)$ (počet výskytů)
2. φ je MP na ~~φ~~ ψ a ~~$\varphi \to \psi$~~ $\psi \to \varphi$, pak $2 \mid F(\psi)$, $2 \mid F(\psi \to \varphi)$ (dokázáno), tedy $2 \mid F(\varphi) = F(\psi \to \varphi) - F(\psi)$

7. CV.

Pred. logika

- abecedy: - ∀
  - x, y, z
  - →, ¬
  - (,), ,
  - např. - P, Q, F, g   - = (u jazyka s rovností)
- jazyk ... množina symbolů s aritou, např. $\mathcal{L} = \{P, Q, F, g\}$

P - pred. 1
Q - pred. 2
F - fun. 2
g - fun. 3

- Termy:
  1. každá proměnná x je term
  2. Nechť F je funkce ar. n, $t_1, \dots, t_n$ jsou termy, pak i $F(t_1, \dots, t_n)$ je term.
- atomické formule:
  1. Nechť P je pre ar. n a $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou termy, pak $P(t_1, \dots, t_n)$ je AF
  2. $t_1 = t_2$ je AF
- formule:
  1. φ je formule $\Rightarrow$ $\neg\varphi$ je formule
  2. φ, ~~že~~ ψ jsou formule $\Rightarrow$ $\varphi \to \psi$ je formule
  3. φ je formule $\Rightarrow$ $\forall x \varphi$ je formule (x je proměnná)
- Realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$:
  1. M - neprázdný nosič
  2. Pro každý funkční symbol F arity n máme funkci $F_{\mathcal{M}}: M^n \to M$
  3. Pro každý predikátový symbol P arity n máme relaci $P_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ ($M^n \to \{0, 1\}$)
     predikátový symbol arity 0 je buď pravda nebo nepravda
- ohodnocení: funkce $e: Var \to M$
- $\mathcal{M} \models \varphi[e]$

- Termy:

1. $s = x \Rightarrow s[e] = e(x)$
2. $s = F(s_1, \dots, s_n) \Rightarrow s[e] = F_m(s_1[e], \dots, s_n[e])$

- atomické formule:

1. $\varphi \equiv P(s_1, \dots, s_n)$

   $\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow (s_1[e], \dots, s_n[e]) \in P_m$

2. $\varphi \equiv s_1 = s_2$

   $\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow s_1[e] = s_2[e]$

- formule:

1.
2.
3. $\varphi \equiv \forall x \, \psi$

   $\mathcal{M} \models \varphi[e] \Leftrightarrow$ pro lib. $i \in M$: $\mathcal{M} \models \psi[e_{x=i}]$, kde $e_{x=i}$ je ohodnocení: $e_{x=i}(y) = e(y)$ pro $y \neq x$ a $e_{x=i}(x) = i$.

* $\mathcal{L} = \{P, F\}$ s rovností; P predikátový s ar. 1
F je funkční s ar. 2

1. $\mathcal{M}_1$:

   $M_1 = \{1, 2, 3\}$

   $P_m = \{1, 2\}$

   $F_m = \{(1,1,1), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,1), (2,2,2), (2,3,2), (3,1,2), (3,2,3), (3,3,3)\}$

2. $\mathcal{M}_2$:

   $M_2 = \{1\}$

   $P_{m_2} = \{1\}$

   $F_{m_2} = \{(1,1,1)\}$

3. $\mathcal{M}_3$

   $M_3 = \mathbb{N}$

   $P_{m_3} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

   F je realizuje jako sčítání

Najděte ohodnocení e takové, že $\mathcal{M} \models P(F(x,y))[e]$

1. $e_1(x) = e_2(y) = 1$ ostatní libovolné

2. ~~$e_2(x) = 1$ pro xx nelze, protože $P_{\mathcal{M}_2}$ je prázdná~~

   $e_2(x) = 1$ ~~pro všechny proměnné x~~

   $e_2(y) = 1$

3. $e_3(x) = 1$

   $e_3(y) = 1$

Najděte: $\mathcal{M} \models \forall x \exists y\, P(F(x,y))[e]$

1. Platí při lib. ohodnocení
2. platí při lib. ohodnocení
3. platí při lib. ohodnocení

Najděte: $\mathcal{M} \models (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(F(x,y))$

1. v $\mathcal{M}_1$ platí
2. v $\mathcal{M}_2$ platí
3. v $\mathcal{M}_3$ platí

~~Platí~~ Neplatí např. v $\mathcal{M}'_3$ pro lichý čísla

* $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ s rovností, P, Q s ar. 1

Dokažte (nebo vyvraťte), že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ platí

a) $\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \longleftrightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \longleftrightarrow \forall x Q(x))$

b) $\mathcal{M} \models$ — " — $\leftarrow$ — " —

~~a)~~ platí ~~a) neplatí~~

~~a)~~ ~~neplatí~~ b) neplatí

např. $M = \{1, 2\}$ zřejmě $\mathcal{M} \models \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

$P_{\mathcal{M}} = \emptyset$ $\quad \mathcal{M} \not\models \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$

$Q_{\mathcal{M}} = \{1\}$

a) platí, rozvěďme význam formule:

LHS - pro každý prvek univerza u platí $u \in P_{\mathcal{M}} \iff u \in Q_{\mathcal{M}}$ tedy $P_{\mathcal{M}} = Q_{\mathcal{M}}$

RHS – $P_{\mathcal{M}} = M \iff Q_{\mathcal{M}} = M$

ale zřejmě pokud $P_{\mathcal{M}} = Q_{\mathcal{M}}$, tak i $P_{\mathcal{M}} = M \iff Q_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} = M$

* Rozhodněte a dokažte, zda pro libovolný ~~daný~~ jazyk $\mathcal{L}$, jeho formuli φ a realizaci $\mathcal{M}$ platí: $\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M} \not\models \neg\varphi$

$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ ~~Vskutku to plyne ihned z definice splňování vztahu~~

~~$\mathcal{M} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{M} \not\models \varphi[e]$~~ v obměna

(platí pouze pro uzavřené formule)

např. $\neg(\forall x P(x)) \not\equiv \forall x (\neg P(x))$

formule platí, právě když platí její univ. uzávěr

– následující příklady určitě budou typově na písemce

* $\mathcal{L} = \{\sim\}$ s rovností, $\sim$ je pred. s ar. 2.

Dejte příklad teorie T takové, že její modely jsou právě ty realizace $\mathcal{M}$ ve kterých se $\sim$ realizuje jako relace ekvivalence.

$\mathcal{M} \models T$ ($\mathcal{M}$ je model T)

$\varphi_1 \equiv \forall x (x \sim x)$

$\varphi_2 \equiv \forall x \forall y (x \sim y \rightarrow y \sim x)$ (lze to použít i bez kvantifikátorů)

$\varphi_3 \equiv \forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z)$

$T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

* $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, $\cdot$ je funkční arity 2.

Dejte příklad teorie T takové, že její modely jsou právě všechny

a) pologrupy $T = \{\varphi_1\}$

b) monoidy $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$

c) grupy $T = \{\varphi_1, \varphi_3\}$

$\varphi_1 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

$\varphi_2 \equiv \exists y \forall x (x \cdot y = x \wedge y \cdot x = x)$

$\varphi_3 \equiv \exists n (\forall y (n \cdot y = y \wedge y \cdot n = y) \wedge \forall y \exists x (x \cdot y = n \wedge y \cdot x = n))$

* $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, $\cdot$ je funkční arity 2

Nechť $\mathcal{M}$ je realizace

$M = \mathbb{N}^+$

• se realizuje jako ~~nás~~ násobení

Dejte příklad formule $\varphi(x)$ s jednou volnou proměnnou t. ž.

$\mathcal{M} \models \varphi(x)[e] \iff e(x)$ je prvočíslo. pro všechna e.

$\cancel{\varphi(x) \equiv \forall \exists x \exists y (x \cdot y \neg \exists y \exists z (y \cdot z = x)}$

~~nebo $\varphi(x) \equiv \forall y \forall z$~~

~~$\varphi(x) \equiv \neg \exists y$~~

$\cancel{\varphi(x) \equiv \neg \exists y \exists z (y \cdot z = x \wedge \exists a (x \cdot a = x \wedge \neg y \cdot b = y\ y \cdot a = y))}$

$\varphi(x) \equiv \forall a \forall b \forall c \forall d ((a \cdot b = x \wedge c \cdot d = x) \rightarrow (a = c \vee a = d) \wedge (a \neq b))$

$Jed(x) \equiv \forall y (x \cdot y = y)$

$\varphi(x) \equiv \neg Jed(x) \wedge \forall a \forall b (a \cdot b = x \rightarrow (Jed(a) \vee Jed(b)))$

Dejte příklad formule ~~$\psi(x)$~~ $\psi(x, y, z)$ takovou, že právě 3 volný proměnný x, y, z $\mathcal{M} \models \psi(x, y, z)[e] \iff gcd(e(x), e(y)) = e(z)$

~~$\psi(x, y, z) \equiv$~~ $del(x, y) \equiv \exists z (x \cdot z = y)$

$\psi(x, y, z) \equiv del(z, x) \wedge del(z, y) \wedge$
$\wedge \forall a ((del(a, x) \wedge del(a, y)) \rightarrow del(a, z))$

$\boxed{8.\ \text{PŘ.}}$

– Presburgerova aritmetika

$\boxed{7.\ \text{CV.}}$

– Nechť $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ jsou realizace jazyka $\mathcal{L}$.

Izomorfismus realizací $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ je bijekce $h: M \rightarrow M'$ taková, že pro každý n-ární pred. symbol P a každé $u_1, \dots, u_n \in M$ platí

$(u_1, \dots, u_n) \in P_{\mathcal{M}} \iff (\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)) \in P_{\mathcal{M}'}$

pro každý ~~...~~ n-ární funkční symbol a každé $u_1 \dots u_n \in M$ platí

$$\alpha\left(f_{\mathcal{M}}(u_1, \dots, u_n)\right) = f_{\mathcal{M}'}(\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n))$$

pro jazyk bez rovnosti není třeba injektivita (implicitně znamená i třeba s rovností? nebo i bez)

* Nechť $\alpha: M \to M'$ je izomorfismus realizací $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ jazyka $\mathcal{L}$.

Pak pro každou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ a každé ohodnocení e v $\mathcal{M}$ platí

$\mathcal{M} \models \varphi[e] \iff \mathcal{M}' \models \varphi[\alpha \circ e]$

$e: Var \to M$

$\alpha: M \to M'$

indukcí:

báze: $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e] \overset{?}{\iff} \mathcal{M}' \models P(t_1, \dots, t_n)[\alpha \circ e]$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$(t_1[e], \dots, t_n[e]) \in P_{\mathcal{M}}$ $\qquad$ $(t_1[\alpha\circ e], \dots, t_n[\alpha \circ e]) \in P_{\mathcal{M}'}$

$\Updownarrow$

$(\alpha(t_1[e]), \dots, \alpha(t_n[e])) \in P_{\mathcal{M}'}$

ukažme, že pro každý term t platí $t[\alpha \circ e] = \alpha(t[e])$

indukcí: $\cancel{t[\alpha \circ e] = \alpha(t[e])}$

báze $x[\alpha \circ e] = (\alpha \circ e)(x) = \alpha(e(x)) = \alpha(x[e])$

$t_1, \dots, t_n$

ind. krok:

$f(t_1, \dots, t_n)[\alpha \circ e] = f_{\mathcal{M}'}(t_1[\alpha \circ e], \dots, t_n[\alpha \circ e]) \overset{IP}{=} \dots$

$= f_{\mathcal{M}'}(\alpha(t_1[e]), \dots, \alpha(t_n[e])) = \alpha(f_{\mathcal{M}}(t_1[e], \dots, t_n[e])) =$

$= \alpha(f(t_1, \dots, t_n)[e])$

$\mathcal{M} \models t_1 = t_2[e] \iff \mathcal{M}' \models t_1 = t_2[\alpha \circ e]$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$t_1[e] = t_2[e]$ $\qquad$ $t_1[\alpha \circ e] = t_2[\alpha \circ e]$

$\Updownarrow$

$\alpha(t_1[e]) = \alpha(t_2[e])$

indukční krok:

$\mathcal{M} \circlearrowright$

$\mathcal{M} \models \neg\varphi[e] \Longleftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi[e] \overset{IP}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}' \not\models \varphi[\alpha \circ e] \Longleftrightarrow \mathcal{M}' \models \neg\varphi[\alpha \circ e]$

$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi[e] \Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \not\models \varphi[e] \overset{IP}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}' \not\models \varphi[\alpha \circ e]$

nebo nebo

$\mathcal{M} \models \psi[e] \overset{IP}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}' \models \psi[\alpha \circ e]$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \varphi \to \psi[\alpha \circ e]$

značení $\dot{e}[x \to a]$

$\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi[e] \overset{?}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}' \models \forall x\, \varphi[\alpha \circ e]$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

pro každé $a \in M$ platí $\mathcal{M} \models \varphi[e[x \to a]]$

pro každé $b \in M'$ platí $\mathcal{M}' \models \varphi[(\alpha \circ e)[x \to b]]$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$?

pro každé $a \in M$ platí $\mathcal{M}' \models \varphi[\alpha \circ (e[x \to a])]$

$\Downarrow$: $b = \alpha(a)$, tedy $\mathcal{M}' \models \varphi[(\alpha \circ e)[x \mapsto \alpha(a)]]$, slože

$\mathcal{M}' \models \varphi[\alpha \circ (e[x \to a])]$, protože

$\alpha \circ (e[x \to a]) = (\alpha \circ e)[x \mapsto \alpha(a)]$ jsou stejné zobrazení (chovají se stejně na všech argumentech)

$\Uparrow$: $\mathcal{M}' \models$ $a = \alpha^{-1}(b)$, tedy $\mathcal{M}' \models \varphi[\alpha \circ (e[x \mapsto \alpha^{-1}(b)])]$

stačí surjektivita a analogicky rozšíření

□

– ~~Dokažme~~ navíc za předpokladů z předchozí věty máme

$\mathcal{M} \models \varphi \overset{?}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M}' \models \varphi$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

pro každé oh. e v $\mathcal{M}$ platí $\mathcal{M} \models \varphi[e]$

pro každé oh. e' v $\mathcal{M}'$ platí $\mathcal{M}' \models \varphi[e']$

$\Updownarrow$?

$\Updownarrow$ $\mathcal{M}' \models \varphi[\alpha \circ e]$

$\Downarrow$: zvolme $e' = \alpha \circ e$

$\Uparrow$: zvolme $e = \alpha^{-1} \circ e'$
opět stačí pravá inverze tedy surjektivita, tedy není třeba injektivita

- $\mathcal{M} \models \varphi[e]$
  $\mathcal{M} \models \varphi$ (pro všechna e) (φ platí v $\mathcal{M}$)
  $\mathcal{M} \models T$ ($\mathcal{M}$ je modelem T)
  $T \models \varphi$ (φ platí ve všech modelech T)
  $T \vdash \varphi$ (φ je dokazatelné z T)

- T je sporná $\Leftrightarrow$ ~~exist~~ pro každou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ platí $T \vdash \varphi$

$\Uparrow$ $\Updownarrow$ $\Uparrow$ ~~funguje pro nesplnitelné~~

existuje formule φ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$
platí pouze za existence formule φ, tedy jazyk musí mít rovnost nebo predikátový symbol

- T je bezesporná $\Leftrightarrow$ T není sporná
- T je úplná $\Leftrightarrow$ T je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli φ (jazyka $\mathcal{L}$) platí $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$

to je požadováno, protože neplatí $\mathcal{M} \models \varphi$ nebo $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ obecně.

* Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Dále je dána teorie $T = \{f(x) = f(y) \rightarrow x = y\}$ jazyka $\mathcal{L}$. Rozhodněte a dokažte, zda:
  a) $T \models f(x) = x \equiv \varphi$
  b) T je bezesporná
  c) T je úplná

  a) není, kde máme protipříklad: $\mathcal{M} = \{1, 2\}$
  $f_{\mathcal{M}}: 1 \mapsto 2$
  $\quad 2 \mapsto 1$

~~a)~~ jelikož $f_{\mathcal{M}}$ je injektivní, platí $\mathcal{M} \models$ ~~φ~~ ψ, a tedy $\mathcal{M} \models T$.
a navíc $\mathcal{M} \not\models \varphi$, takže dohromady $T \not\models \varphi$

b) ~~dle věty o korektnosti~~ $T \not\models \varphi$, tedy dle věty o korektnosti $T \nvdash \varphi$
~~je bezesporná~~

c) není úplná.
~~Ať~~ Uvažme $\mathcal{M}'$, kde $M' = \{1\}$, $f_{\mathcal{M}'} = \{(1,1)\}$.
Označme $\overline{\varphi} \equiv \forall x \varphi$. Pak opět $f_{\mathcal{M}'}$ je injektivní, $\mathcal{M}' \models T$. Dále $\mathcal{M}' \models \overline{\varphi}$
takže $\mathcal{M}' \not\models \neg\overline{\varphi}$, a tedy dle věty o korektnosti $T \nvdash \neg\overline{\varphi}$.
Dále víme, že $T \not\models \varphi$, a tedy $T \not\models \overline{\varphi}$, a tak dle věty o kor. $T \nvdash \overline{\varphi}$.

* Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je un. funkční symbol.
Dále je dána teorie $T = \{\underbrace{\exists x \exists y\, (x \neq y \wedge \forall z\, (z = x \vee z = y))}_{\varphi}, \underbrace{f(x) = f(y)}_{\psi}\}$
Dokažte, že T je úplná.

Uvažme realizaci ~~M~~ $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde $M = \{1,2\}$, $f_{\mathcal{M}} = \{(1,1),(2,1)\}$.
Jelikož $|M| = 2$ a $f_{\mathcal{M}}$ je konst., platí $\mathcal{M} \models T$. Nyní ukážeme, že každý model teorie T je izomorfní s $\mathcal{M}$.
Nechť tedy $\mathcal{M}'$ je lib. model teorie T. Jelikož ~~M~~ $\mathcal{M}' \models \varphi$, platí $|M| = 2$,
nechť tedy $M = \{a,b\}$. Jelikož $\mathcal{M}' \models \psi$, je $f_{\mathcal{M}'}$ konstantní, BÚNO nechť ~~$f_{\mathcal{M}'}(M')$~~
$f_{\mathcal{M}'}(M') = \{a\}$. Uvažme zobrazení $g : M \to M'$, kde $g = \{(1,a),(2,b)\}$.
Pak $g(f_{\mathcal{M}}(1)) = g(1) = a = f_{\mathcal{M}'}(a) = f_{\mathcal{M}'}(g(1))$, podobně
$g(f_{\mathcal{M}}(2)) = g(1) = a = f_{\mathcal{M}'}(b) = f_{\mathcal{M}'}(g(2))$
Navíc g je zřejmě bijekce, takže g je izomorfismus realizací $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$.

* Je dán ~~jazyk~~ jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ bez rovnosti, P je un. pred. symbol
f je un. fun. symbol
c je konstanta

Uvažme teorii $T = \{P(c)\}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T.

$M = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\} = \{f^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$
$c_{\mathcal{M}} = c \qquad f_{\mathcal{M}}(f^n(c)) = f^{n+1}(c)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
~~f~~

$P_M = \{ s \in M \mid T \vdash P(s) \}$

obecně

$P_M \overset{?}{=} \{c\}$

~~platí~~ $c \in P_M$, protože $P(c) \in T$

$T \nvdash P(f^n(c))$ pro žádné $n \in \mathbb{N}^+$

$\Uparrow$

$T \not\models P(f^n(c))$ pro žádné $n \in \mathbb{N}^+$ $M = \{a, b\}$

$f_M = \{(a,b), (b,b)\}$

$P_M = \{a\}$

c_M ... lib

* stejný, ale $T = \{P(x)\}$

f_M, M, c_M jsou stejné

ukažme $P_M = M$

1. $P(x)$ $\in T$
2. $\forall x P(x)$ GEN na 1
3. $\forall x P(x) \rightarrow P(f^n(c))$ P4
4. $P(f^n(c))$ MP

$\boxed{\text{6. CV.}}$

- $\mathcal{L}'$ je rozšířením $\mathcal{L} \overset{def}{\iff} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ (a oba jsou buď s rovností nebo bez)
- T jazyka $\mathcal{L}$, T' jazyka $\mathcal{L}'$

  T' je rozšíření $T \overset{def}{\iff} \mathcal{L}'$ je rozšířením $\mathcal{L}$, pro všechna $\varphi \in T$: $T' \vdash \varphi$
- T' je konzervativní rozšíření $\overset{def}{\iff} T'$ je rozš. T a pro každou $\varphi \in For(\mathcal{L})$: $T' \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

* $\mathcal{L} = \{P\}$, P je pred. binární, bez rovnosti

  $\mathcal{L}' = \{P, c\}$ P je bin. pred., c je konst, bez rovnosti

  $T = \{\exists y P(x,y)\}$, $T' = \{P(x,c)\}$

  ~~T' je rozš~~ Rozhodněte a dokažte, zda T' je (konzerv.) rozš. T.

zřejmě T' je rozšíření T (z věty o úplnosti a korektnosti)

$T' \models \exists y P(x,y)$ (třeba y jako c)

$T' \vdash \exists y P(x,y)$

$\forall \varphi \in For(\mathcal{L}): T' \vdash \varphi$

~~není konz. rozšíření~~

$\mathcal{M}$: $M = \{a, b\}$

$c_{\mathcal{M}} = b$

$P_{\mathcal{M}} = \{(a,a), (b,a)\}$

pozn. $\models$ je vyplývá

ofic. řešení: $\forall x \exists y P(x,y)$ $\forall x P(x,c)$

$\mathcal{M} \models T' \wedge \mathcal{M} \not\models \forall x \exists y P(x,y)$

$\Downarrow$

$\mathcal{M} \models \exists x \forall y \neg P(x,y)$

$\Downarrow$

$\mathcal{M} \models \exists x \neg P(x,c)$

$\Downarrow$

$\mathcal{M} \not\models \forall x P(x,c)$

T' je rozšíření

$\forall x P(x,c) \Rightarrow T' \models \underbrace{\exists y \forall x P(x,y)}_{\psi}$

$\mathcal{M}$: $M = \{1,2\}$

$P_{\mathcal{M}} = \{(1,1),(2,2)\}$

$\mathcal{M} \models T$

$\mathcal{M} \not\models \psi$

$T \not\models \psi$

$T \nvdash \psi$

$T' \models \psi$

$T' \vdash \psi$

T' není konz. rozšířením T.

* stejné zadání i chovat $T = \{\exists y \forall x P(x,y)\}$

T' je opět rozšíření T.

ukažme, že T' je konz. rozšíření T.

$\mathcal{M} \models T$

$\mathcal{M}'$: $M' = M$, $P_{\mathcal{M}'} = P_{\mathcal{M}}$, $c_{\mathcal{M}'} = m \in M$

def. rozšíření

Ukažme, že pro každý model $M \models T$ existuje rozšíření M do L' M' takový, že $M' \models T'$.
Pak totiž $T \nvdash \varphi \Rightarrow T \not\models \varphi \Rightarrow$ existuje model $M \not\models \varphi \Rightarrow$ existuje $M' \not\models \varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow T' \not\models \varphi \Rightarrow T' \nvdash \varphi$

vskutku, c_M vezměme jako "y" pro které to platí.

* $L = \{Q\}$

$L' = \{Q, F, c\}$

Q je ternární pred.
F je unární fun
c je nulární fun.

$T' = \{Q(x, F(x), c)\}$

Nalezněte T teorii jazyka L takovou, že T' je konz. rozš. T.

~~$T = \{\forall \exists z \forall x\, Q(x, F(x), z)\}$~~

~~$\exists z \forall x \forall y (\exists x, F(x)$~~

~~Zřejmě $\exists$~~

$T = \{\exists z \forall x \exists y\; Q(x, y, z)\}$

k důkazu třeba AC!
analogicky: céčko vezmeme jako to zetko pro které $\forall x \exists y\, Q(x, y, z)$, $F(x)$ vezmeme jako libovolné takové y. (zde je třeba AC)

* $L = \emptyset$ s rovností. Dejte příklad teorie T takovou, že všechny její modely ~~nejsou~~ ~~nekonečný~~ ~~nosič~~ jsou právě ty realizace jazyka L, které mají nekonečný nosič

$\varphi_1 \equiv \exists x_1 (x_1 = x_1)$

$\varphi_2 \equiv \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$

$\vdots$

$\varphi_i \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_i \left(\bigwedge_{j=1}^{i} \bigwedge_{k=j+1}^{i} x_j \neq x_k \right)$

$T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$

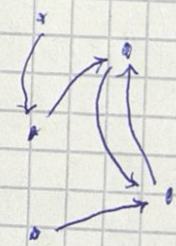
* ~~stejné zadání~~, ale $\mathcal{L} =$

$\mathcal{L} = \{F\}$, F je funkční arity 1, s rovností

Dejte příklad teorie T takové, že všechny její modely mají nekonečný nosič a T je konečná a splnitelná

$F^{(n)} \wedge$

$\cancel{\forall x \forall y (F(x)}$



$\cancel{\forall x \forall y (F(x) = y}$ $\quad \cancel{\forall y\, F^3(x) = F^2(x)}$

$\cancel{\forall x \forall y \exists n \in \mathbb{N} (F^n(x)}$

$\cancel{\exists x \forall n, m \in \mathbb{N} (F^n(x) \neq F^{(m)}(x))}$

$\cancel{\exists x}$

$T = \{\forall y \exists x\, F(x) = y,\ \exists x \exists y (F(x) = F(y) \wedge x \neq y)\}$

surj. $\qquad$ neinj.

* ~~Dejte pro~~ $\mathcal{L} = \emptyset$ s rovností

Dejte příklad teorie T takové, že její modely jsou právě realizace M jazyka $\mathcal{L}$ s konečným nosičem

$U = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}^+\}$ $\qquad \varphi_i \equiv \exists x_1 \dots \exists x_i \left(\bigwedge_{j=1}^{i} \bigwedge_{k=j}^{i} x_j \neq x_k\right)$

sporem: nechť T vyhovuje

$T \cup U \vdash \forall x (x \neq x)$

tedy existuje důkaz
1) δ_1
2) δ_2
k) $\delta_k = \forall x (x \neq x)$ $\quad \Longrightarrow T \cup U_{max} \vdash \forall x (x \neq x)$

$\forall\ U_{max} = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}^+, i \leq max\}$

~~x~~ Nechť M je model T a má víc než max prvků, tak je to i model U_{max}. M je i model U_{max}, spor, protože M je modelem sporné teorie $T \cup U_{max}$

KONZULTACE

- zkouška - 80 bodů
  - 6 až 8 úloh
  - třetina - výroková logika
  - dvě třetiny - predikátová logika
  - první úloha: definice (jediná taková úloha)
  - slidy se neučit nazpaměť (důkazy se neučit ze slidů nazpaměť) ale ideji důkazu se v některých úlohách mohou hodit
  - ~~Aristoteles~~
- Aristotelova logika - neučit (prvních 23 slidů)
- názvy Schröderovo a Shefferovo operátor nemusíme znát
- CNF, DNF se na písemce může objevit
- MP znát, ale ty 3 axiomy (schémata) ~~odvozovací~~ Łukasiewiczův systém netřeba znát
- lemma 37 netřeba znát
- lemma 39 a netřeba znát
- historické poznámky - netřeba znát
- určitě znát definice!
- "dejte příklad" znamená, že příklad takový existuje
- ~~lemma 66 netřeba~~
- lemma 66 netřeba znát
- na písemce bude jeden těžký "áčkový" příklad za 10 bodů (tam může být třeba Henkinovská T, nebo třeba neexistence formule která rozpoznává rotaci o +60°)
- AC se nezkouší a Zornovo lemma
- Kanonickou strukturu třeba znát (def.)
- Löwenheimova - Skolemova věta netřeba znát
- v áčkovém příkladu se může objevit i ~~to~~ něco z Gödelovy věty o úplnosti

- ~~k~~ znát formulace ~~gödelův~~ Gödelových vět o neúplnosti, predikát B.
- úlohová část – něco těžšího, ~~ze~~ ze standardních pojmů nebo henkinovskost nebo Gödelova věta o neúplnosti nebo neexistence formule daných vlastností

- zkouška lze prodloužit až na 4 hodiny
- minulé zkoušky jsou rozebrány na diskuzních fórech z minulých let.

*