$\boxed{1.\ \text{CV.}}$

*IMC 2000/1/1

a) Je dána fce $f: [0,1] \to [0,1]$ rostoucí. Musí ~~...~~ existovat $x \in [0,1]$ takové, že $f(x)=x$

1) $f(0)=0$ ✓

2) $f(0)>0$ $\quad A = \{x \in [0,1];\ \forall s \in [0,x]: f(s)>s\}$

$0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

A je ohraničená

$y = \sup A$

Dokažme $f(y)=y$

a) ~~Kdyby f(y)... zvolme~~ $f(y)>y$, pak zvolme $0<\varepsilon<f(y)-y$

$\forall s \in [y, y+\varepsilon]: f(s) \geq f(y) > y+\varepsilon \geq s$, tedy $f(s)>s$

$y<1$ $\quad$ spor s tím, že y je supremum

b) Kdyby $f(y)<y$ ... spor

b) – ‖ – klesající, neplatí 

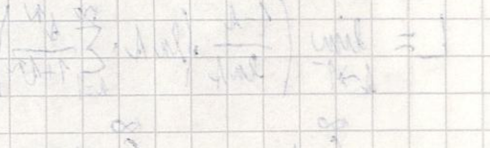
- $A \subseteq \mathbb{R}$ je hustá, pokud každý otevřený interval obsahuje prvek z A
- funkce se nazývá nikde monotónní, pokud neexistuje žádný otevřený ~~...~~ interval, na kterém je monotónní

lze taky definovat nikde hustá podmnožina

*IMC 2000/2/2

- Je dána $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nikde monotónní. Dokažte, že množina všech lokálních minim f je hustá podmnožina $[0,1]$.

$\lim_{x \to a} f(x) = a$



$(u,s) \subseteq [0,1]$

$0 \leq u < s \leq 1$

~~Ze Weierstrassovy věty má na $[u,s]$ minimum y~~

~~Dokažme $y \notin \{u,s\}$~~

$y = u$

$[u,v]$ + Weierstrassova věta, tedy existuje lokální minimum na (u,v)

* IMC 2001/1/3

$$\lim_{t\to 1^-} (1-t)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = L$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^n}} < 1$$

$$t\in(0,1):\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} < \sum_{n=1}^{\infty} t^n < \infty \text{ konverguje}$$

$$u = 1-t:\quad L = \lim_{u\to 0^+} u\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(1-u)^{-n}}$$

$$\lim_{u\to 0^+} u\cdot\sum_{n=1}^{\infty} f(n\cdot u) = \int_0^{\infty} f(u)\,du$$

pomocná úloha: $\displaystyle\lim_{t\to 1^-}\frac{\ln t}{1-t} = \lim_{t\to 1}\frac{1/t}{-1} = -1$

zpět k úloze:

$w = -\ln t \qquad t = e^{-w}$

$$L = \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{1-t}{\ln t}\cdot\left(\ln t\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}\right)\right) = -\lim_{t\to 1^-}\ln t\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \lim_{w\to 0^+} w\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nw}} =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x} = \int_1^{\infty}\frac{dy}{y(y+1)} = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \left[\ln\left(\frac{y}{y+1}\right)\right]_1^{\infty} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\ln 2}$$

$y = e^x$

$x = \ln y \qquad dx = \frac{dy}{y}$

* IMC 2002/1/2

její derivace je spojitá funkce

– Existuje $\underbrace{\text{spojitě diferencovatelná}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taková, že $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)>0$ a $f'(x) = f(f(x))$

$$\lim_{x\to a} f(f(x)) = \lim_{x\to a} f'(x) = f'(a) = f(f(a))$$

- $f'(x) > 0$ … f je rostoucí

$f(x)>0 \Rightarrow f(f(x)) > f(0) \Rightarrow f'(x) > f(0) > 0$

$$\exists\, y\in(x,0):\quad f'(y) = \frac{f(0)-f(x)}{0-x} > f(0)$$

$f(x) < f(0)(x+1) < 0$ pro $x < -1$

- ~~Euler-Mascheroni~~

$\boxed{2.\check{R}N}$

- Euler - Mascheroniho konstanta

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} = \infty$

protože $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \Big[\ln(\ln(x))\Big]_2^{\infty} = \infty$

- mocninné řady, testy konvergence
- Poloměr konvergence: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$
- pokud $|x| < R$, pak $f(x)$ konverguje
- pokud $|x| > R$, pak $f(x)$ diverguje   důkaz najít
- Dedekind - complete, Cauchy - complete
- Cauchyovská posloupnost
- zúplnění metrických prostorů
- absolutní konvergence: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ koverguje
- abs. konv $\Rightarrow$ konv

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > m \geq N: \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv $\Leftrightarrow$ -||- : $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$ $\square$

- Pokud $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, pak je rovna $\frac{1}{R}$

* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1$, $R = 1$

Pro $x \in (-1,1)$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = -\ln(1-x)$

platí to i pro $x = -1$.

$\boxed{3.\text{CV.}}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$ komplexní mocninná řada

$$f(z) = \begin{cases} \text{konverguje abs} & \text{pro } |z-z_0| < R \\ \text{diverguje} & \text{pro } |z-z_0| > R \\ ? & \text{pro } |z-z_0| = R \end{cases}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_2 - z_1 = 2k\pi i$$

$f(z) = e^z \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

~~ln(z)~~

log — komplexní

ln — reálný

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg z$$

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n} \qquad R = 1$$

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| < C$$ ohraničené částečné součty

* $z \in \mathbb{C} \wedge |z| \cancel{\leq 1} \wedge z \neq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje

$z = e^{is}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(ns)}{n} + i \frac{\sin(ns)}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ns)}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ns)}{n}$$

⌜ ~~ts~~

$\forall s \in \mathbb{R}$ má $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(ns)$ ohraničené částečné součty

$\forall s \in \mathbb{R},\ s \neq 2k\pi$ má $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(ns)$ ohraničené částečné součty

dokažme to

$$\left|\sum_{n=0}^{k} (\cos(ns) + i \sin(ns))\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} (\cos s + i \sin s)^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} (e^{is})^n\right|$$

$$= \left| \frac{(e^{is})^{k+1} - 1}{e^{is} - 1} \right| < C \qquad \square$$

⌞ ⌟

abelovská sumace $\{a_n\}, \{b_n\}$, $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{k} (s_n - s_{n-1}) b_n = s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \dots + (s_{k-1} - s_{k-2}) b_{k-1} + (s_k - s_{k-1}) b_k =$$

$$= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \dots + s_k (b_{k-1} - b_k) + s_k b_k =$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} s_n (b_n - b_{n+1}) + s_k b_k \qquad \square$$

Věta (Dirichletovo kritérium): Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s ohraničenými částečnými součty a $\{b_n\}$ je posl., která je monotónní (nerostoucí) a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Důkaz: Stačí ukázat, že pro $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall N < n < m: \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i b_i\right| < \varepsilon$.

$|s_i| \le C$

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i b_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_m b_m\right| \le \sum_{i=n+1}^{m-1} |s_i| |b_i - b_{i+1}| + |s_m| \cdot |b_m| \le$$

$$\le C\left(\sum_{i=n+1}^{m-1} |b_i - b_{i+1}| + |b_m|\right) = C\left(\left|\sum_{i=n+1}^{m-1} (b_i - b_{i+1})\right| + |b_m|\right) =$$

$$= C\left(|b_{n+1} - b_m| + |b_m|\right) \le C\left(|b_{n+1}| + 2|b_m|\right) < \varepsilon$$

$\exists N \in \mathbb{N}: \forall i \ge N: |b_i| < \frac{\varepsilon}{3C}$

$\square$

Z toho už úloha plyne $\square$

*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots =$$

* $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$

$$-\log(1-i) = \frac{i}{1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \dots$$

$$-\log(1+i) = -\frac{i}{1} - \frac{1}{2} + \frac{i}{3} + \frac{1}{4} - \frac{i}{5} - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\log(1+i) - \log(1-i)}{2i} = \frac{\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}}{2i} = \frac{\pi}{4} \quad \square$$

alt. řešení:

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{4.\ \text{CV.}}$

$$* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right) = \frac{\pi}{8}$$

$$* \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

$P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$

$P(x), Q(x)$ mají kladné vedoucí členy

$Q(x)$ nemá kořen v $\mathbb{N}_0$

Kdy konverguje?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \deg P > \deg Q \\ \frac{a_k}{b_k} & \deg P = \deg Q = k \\ 0 & \deg P < \deg Q \end{cases}$$

S konv. $\iff$ $\deg Q \geq \deg P + 2$, dokažme to

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)/Q(x)}{1/x^{\deg Q - \deg P}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\deg P - \deg Q}\cdot P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}^+$

S konv. $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\deg Q - \deg P}}$ konv. $\square$

* $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$

s kladnými reálnými kořeny $\deg P \leq \deg Q$

Q nemá násobné kořeny, všechny reálné $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$, $d = \deg Q$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{c_k}{x-\alpha_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

Jak poznám, že $\deg P + 2 \leq \deg Q$

$$P(x) = \sum_{k=1}^{d} c_k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} (x-\alpha_j) \implies \text{koef. } P(x) \text{ u } x^{d-1} \text{ je } \sum_{k=1}^{d} c_k$$

$$\deg P + 2 \leq \deg Q \iff \sum_{k=1}^{d} c_k = 0 \qquad \square$$

* $d \in \mathbb{N}$, $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leq d-2$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{(dn+1)(dn+2)\cdots(dn+d)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{d} \frac{c_l}{dn+l} \right)$$

⌜ $\zeta_d = e^{2\pi i/d}$ $d \nmid m$ $\quad -\log(1-\zeta_d^m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta_d^m)^n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{d} \frac{\zeta_d^{lm}}{dk+l} \right)$ ⌝

kde $n = dk + l$ ⌟

⌜ Chci dokázat: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ po dvou různá, pak ⌝

$(1, \alpha_1, \dots, \alpha_1^{n-1})^T, \dots, (1, \alpha_n, \dots, \alpha_n^{n-1})^T$ jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{C}^n$ ~~tedy generují~~

tedy generují $\mathbb{R}^n$, tedy ~~$\forall (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, pak $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: $(b_1, \dots, b_n)^T = c_1(1, \alpha_1, \dots, \alpha_1^{n-1})^T + \dots + c_n(1, \alpha_n, \dots, \alpha_n^{n-1})$~~

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} & b_n \end{array}\right)$$

dokažme $\exists (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n : A\mathbb{c} = \mathbb{b}$

$f(x) = c_n x^{n-1} + \dots + c_2 x + c_1 \qquad A\mathbb{c} = \mathbb{b} \iff f(\alpha_1) = b_1, \ \dots, \ f(\alpha_n) = b_n \qquad f(x) = \frac{\prod_{j\neq k}(x-\alpha_j)}{\prod_{j\neq k}(\alpha_k - \alpha_j)}$

$$\alpha_1 = \xi_d^0 \qquad (1, \dots, 1)^T$$
$$\alpha_2 = \xi_d \qquad (1, \xi_d, \dots, \xi_d^{d-1})^T$$
$$\vdots$$
$$\alpha_d = \xi_d^{d-1} \qquad (1, \xi_d^{d-1}, \dots, \xi_d^{(d-1)^2})$$

$\left.\right\}$ LN v $\mathbb{C}$ $\in V$, kde $V = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid \sum_{i=1}^{d} z_i = 0\}$

$\square$

* IMC 2010/day 1/2

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1/6}{4n+1} - \frac{1/2}{4n+2} + \frac{1/2}{4n+3} - \frac{1/6}{4n+4} \right)$$

$(1/6, -1/2, 1/2, -1/6)$

$d=4$ $(i, -1, -i, 1) = v_1$

$(-1, 1, -1, 1) = v_2$

$(-i, -1, i, 1) = v_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & -i & 1/6 \\ -1 & 1 & -1 & -1/2 \\ -i & -1 & i & 1/2 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1/6} \end{array}\right) \sim \dots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1+i & -2i & 1/6 - \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & -2+2i & 1/3\, i \end{array}\right) \end{array}$$

$c_3 = \frac{1-i}{12}$

$c_2 = -\frac{1}{3}$

$c_1 = \overline{c_3} = \frac{1+i}{12}$

$$S = c_1(-\log(1-i)) + c_2(-\log 2) + c_3(-\log(1+i))$$

$$S = \frac{1-i}{12}\left(\frac{1}{2}\ln 2 \cancel{\ldots} - i\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1+i}{12}\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}\right)$$

$$S = -\frac{\pi}{24} + \frac{\ln 2}{4}$$

$\square$

alt. řešení $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+4}}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$

$f''''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$ a 4krát zintegrovat

$\boxed{5. \text{ cv.}}$

* $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$

Dokážeme najít $M > 0$. $\forall c \in \mathbb{R}: f(c) = 0 \Rightarrow |c| < M$

$$M = 1 + \frac{\max_{i \in \{0,\dots,n-1\}} |a_i|}{a_n} \quad \text{funguje} \qquad m = \max$$

sporem: $|c| \geq M$ $\quad f(c) = 0 \Rightarrow -a_n c^n = a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |a_n||c|^n = |a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_0| \leq |a_{n-1}| \cdot |c|^{n-1} + \dots + |a_0| \leq m(|c|^{n-1} + \dots + 1)$$

$$= m \cdot \frac{|c|^n - 1}{|c| - 1} < m \frac{|c|^n}{|c| - 1}$$

$$|a_n| < \frac{m}{|c|-1} \Rightarrow |c| < 1 + \frac{m}{|a_n|} = M, \text{ spor.} \quad \square$$

c je kořen $f(x)$ násobnosti $k \Rightarrow$ c je kořen $f'(x)$ násobnosti $k-1$

$\gcd(f(x), f'(x))$ má za kořeny právě násobné kořeny $f(x)$

$f(x) \in \mathbb{C}[x]$

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_s)^{k_s}$$

$$\gcd(f(x), f'(x)) = (x - c_1)^{k_1 - 1} \cdots (x - c_s)^{k_s - 1}$$

$$\frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))} = a_n (x - c_1) \cdots (x - c_s)$$

* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, předpokládejme, že nemá násobné kořeny (Sturmova věta)

$f_0(x) = f(x)$

$f_1(x) = f'(x)$

$f_2(x) = -Zb(f_0(x), f_1(x))$ $\qquad Zb \dots$ zbytek

$f_3(x) = -Zb(f_1(x), f_2(x))$

$\vdots$

Sturmova posloupnost $f_0, f_1, \dots, f_m$

$f_m(x) = c$

$f_{m+1}(x) = 0$

př. $f_0(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

$f_1(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$

$f_2(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}$

$f_3(x) = -32x - 64$

$f_4(x) = -\frac{3}{16}$

$f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $f_0, f_1, \dots, f_m$ jeho Sturmova posloupnost, $a\in\mathbb{R}$

$\sigma(a)$ ... počet znaménkových změn v posloupnosti $f_0(a), \dots, f_m(a)$

- Věta (Sturmova): Nechť $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ bez násobných kořenů. Potom počet reálných kořenů v intervalu $(a,b]$ je roven $\sigma(a)-\sigma(b)$.
- důkaz: Nechť $c_1<c_2<\dots<c_k$ jsou kořeny alespoň jednoho $f_0,\dots,f_m$.
  - Posloupnost $f_0(t),\dots,f_m(t)$, $t\in\mathbb{R}$ nemůže obsahovat 2 po sobě jdoucí nuly
  - pokud pro $i\geq 1$ platí $f_i(t)$, tak $f_{i-1}(t)$ = $f_{i+1}(t)$ mají opačná znaménka

  najít důkaz

- Věta (Sturmova, silnější): Nechť $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, nechť $a<b\in\mathbb{R}$, a,b nejsou násobné kořeny $f(x)$. Pak počet navzájem různých kořenů $(a,b]$ je $\sigma(a)-\sigma(b)$
- důkaz: $d(x)=\gcd(f(x),f'(x))$, $g(x)=\frac{f(x)}{d(x)}$

  Pro $f(x)$ máme Sturmovu posloupnost $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$

  Pro $g(x)$ máme Sturmovu posloupnost $g_0(x),\dots,g_m(x)$

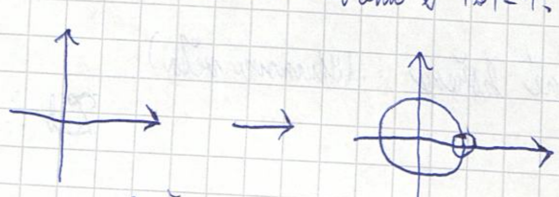
  Počet znaménkových změn pro $f_0(x),\dots,f_m(x)$ je stejný jako pro $\frac{f_0(x)}{d(x)},\dots,\frac{f_m(x)}{d(x)}$

  pokud $d(x)\neq 0$, víme $d(a)\neq 0\neq d(b)$

  ~~najít~~ najít důkaz

$\boxed{\text{6. CV.}}$

* $f(z)\in\mathbb{C}[z]$, kolik má $f(z)$ kořenů s $|z|=1$.



$M:\mathbb{R}\to S_1$ kružnice

$M(x)=\frac{x-i}{x+i}$ funguje

$x\in\mathbb{R}\Rightarrow |M(x)|=1$

$M^{-1}(z)=\frac{z+1}{i(z-1)}$

$|z|=1 \iff |z|^2=z\cdot\bar z=1$

$\overline{M^{-1}(z)} = \frac{\bar z+1}{-i(\bar z-1)} = \frac{\frac{1}{z}+1}{-i(\frac{1}{z}-1)} = \frac{z+1}{i(z-1)} = M^{-1}(z) \Rightarrow M^{-1}(z)\in\mathbb{R}$

$M(M^{-1}(z)) = M^{-1}(M(z)) = z$

1) zjistím, jestli je 1 kořenem (a násobnost)

2)
$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$
$$f(M(x)) = a_n \frac{(x-i)^n}{(x+i)^n} + a_{n-1} \frac{(x-i)^{n-1}}{(x+i)^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{x-i}{x+i} + a_0$$
$$f^*(x) = (x+i)^n f\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = a_n (x-i)^n + a_{n-1}(x-i)^{n-1}(x+i) + \dots + a_1 (x-i)(x+i)^{n-1} + a_0 (x+i)^n$$
$$n = \deg f$$
$$\deg f^* \le n$$

3) $f^*(x) = a(x) + i\, b(x)$ $\quad a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$

$g(x) = \gcd(a(x), b(x))$

Aplikujeme Sturma na $g(x)$

* př. $f(z) = z^4 + i z^3 - 2iz + 1$ $\quad f(1) \neq 0$

$f^*(x) = (x-i)^4 + 2i(x-i)^3(x+i) - 2i(x-i)(x+i)^3 + (x+i)^4 = 2x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 8x + 2 = a(x)$

$b(x)$

$g(x) = a(x) = f^*$ má 2 reálné kořeny dle Sturma

- Cesta v $\mathbb{C}$ je $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$, která je (po částech) diferencovatelná

obraz φ značíme Γ — gamma

$\varphi'(t)$ existuje $\forall t \in [a,b]$ až na nejvýše konečně mnoho bodů

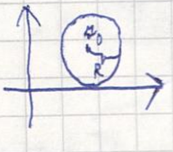
Uzavřená cesta, která sama sebe neprotíná se nazývá Jordanova cesta

končí, kde začíná (tj. $\varphi(a) = \varphi(b)$)

př. $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$

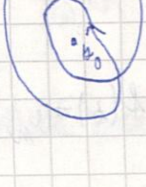
$\varphi(t) = z_0 + R \cdot e^{2\pi i t}$

$t \in [0,1]$



- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na Γ

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$



$\text{ind}_{z_0} \Gamma = 2$

př. $n \in \mathbb{Z}$ $\quad \varphi(t) = R \cdot e^{i 2\pi t}$, $t \in [0,1]$

$\Gamma = S_1(0,R)$

$\int z^n\,dz$

$$\int_\Gamma z^n\,dz = \int_0^1 (R\cdot e^{2\pi i\cdot t})^n\cdot R\cdot e^{2\pi i t}\cdot 2\pi\cdot i\,dt = R^{n+1}\cdot 2\pi i\cdot \int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t}\,dt =$$

- Vě

$$\int_\Gamma z^n\,dz = \begin{cases} R^{n+1}\cdot 2\pi i\left[\frac{1}{2\pi i(n+1)}\cdot e^{2\pi i(n+1)t}\right]_0^1 = 0 & n\neq -1 \\ 2\pi i & n=-1 \end{cases}$$

* $a\in\mathbb{C}$, $\gamma = R\cdot e^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$, $|a|\neq R$ $\quad \Gamma = S_1(0,R)$

- Vě

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = ?$$

1) $|a|<R \Rightarrow$ pro $|z|=R$: $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}$

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \int_\Gamma\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{n-1}\int_\Gamma\frac{dz}{z^n}\right) = 2\pi i$$

2) $|a|>R$: $a\neq 0$

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} \Longrightarrow \int_\Gamma \frac{dz}{z-a}\cancel{dz} = 0$$

- $f(z)$ je holomorfní uvnitř a na $\Gamma \Longrightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

* $\cancel{l}$ – Γ je Jordanovská, $a\in\mathbb{C}$, $a\notin\Gamma$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 1 & a \text{ je uvnitř } \Gamma \\ 0 & a \text{ je vně } \Gamma \end{cases}$$

- Γ je uzavřená cesta, $a\in\mathbb{C}$, $a\notin\Gamma$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dz}{z-a} = \underbrace{\operatorname{ind}_a\Gamma}_{\text{index}}$$

- $f(z)\in\mathbb{C}[z]$, $f(z) = a_n(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_s)^{k_s}$

$\frac{f'(z)}{f(z)}$ … logaritmická derivace

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{S} \frac{K_n}{z-z_n}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{n=1}^{K} K_n$$

z_n je uvnitř Γ

– f je ~~konst~~ nekonst. (nenulový) $f(\Gamma): t \to f(r(t))$, $0 \notin f(\Gamma)$, $t \in [a,b]$

$$\mathrm{ind}_0 f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\Gamma)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(r(t)) \cdot r'(t)}{f(r(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{n=1}^{S} K_n = \text{počet kořenů } f(z) \text{ uvnitř } \Gamma \text{ vč. násobnosti}$$

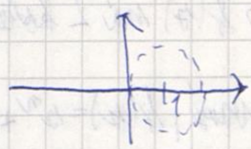
K_n je uvnitř Γ

– $f, g \in \mathbb{C}[z]$ nemají kořeny na Γ, $f-g$ je "malý" $\Rightarrow$ f a g mají stejný počet kořenů uvnitř Γ

$$0 = \mathrm{ind}_0 \frac{f(\Gamma)}{g(\Gamma)} \Leftrightarrow \mathrm{ind}_0(f(\Gamma)) = \mathrm{ind}_0(g(\Gamma))$$

– pokud pro $z \in \Gamma$ platí $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$, pak

$$\frac{f(z)}{g(z)} = 1 + \frac{f(z)-g(z)}{g(z)}$$



– DÚ – dokažte základní větu algebry

$f(z)$ nekonst. pol., deg $f = n > 0$

$g(z) = a_n z^n$ $\quad \Gamma = S_1(0, R)$

pro "velké" R.

– $\forall A, B \in \mathbb{C}: |A+B| \leq |A| + |B|$

rovnost: $A = 0 \vee B = 0 \vee \underbrace{(A \neq 0 \wedge B \neq 0 \wedge \exists r \in \mathbb{R}^+ : B = r \cdot A)}_{\boxed{\mathbb{Z}, \mathbb{C}]}\ \frac{B}{A} \in \mathbb{R}}$

– Rouchéova věta (silná verze, pro polynomy):

Γ je j. cesta, $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\forall z \in \Gamma: \underbrace{|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|}_{f(z) \neq 0 \neq g(z) \text{ pro } z \in \Gamma,\ \frac{f(z)}{g(z)} \notin \mathbb{R}}$.

Pak f a g nemají kořeny na Γ a mají stejný počet kořenů včetně násobnosti uvnitř Γ

– Rouchéova věta (slabá verze)

Γ je j. cesta, $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\forall z \in \Gamma: |f(z) - g(z)| < |g(z)|$