1. PŘ

- písemná zkouška + 2 vnitrosemestrální testy (22.10., 26.11.)
  80 bodů 10+10 bodů
- vovo – podklady (není tam vše) + ukázky testů
  - Krame vovo úplnější text

termíny: 14.1., 20.1., 29.1., 4.2. od 8

$A \veebar B \iff \neg((A \vee B) \iff (A \wedge B)) \iff \neg(A \iff B)$

$\boxed{1.\ \text{PŘ}}$

- cvičení – zápočet za účast (3 neomluvená absence)
- zkouška – ústní + písemná – 2 hodiny 30 minut času
  100 bodů (nutnost 50 a více)
- literatura – Nešetřil – skripta, ne kniha (kniha moc podrobná)
  – Tero Harju

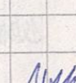
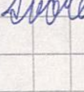
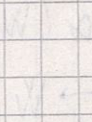
zakázány násobné hrany a smyčky

orientovaný graf: $E \subseteq V \times V$, E je tvořeno uspořádanými dvojicemi místo množin,
smyčky se zde připouští
directed aka digraph

~~místo $\{u,v\}$ a (u,v)~~

$\{u,v\} \in E$ ~~značíme~~
$(u,v\} \in E$ značíme stručně $uv \in E$

typy grafů

- úplný graf: $K_n = (V,E)$, $|V| = n$, $E = \{uv \mid u,v \in V, u \neq v\}$
- bipartitní graf: $V = U \cup W$, $U \cap W = \emptyset$, $E \subseteq$
- úplný bipartitní graf $K_{m,n}$  $K_{2,2}$
- cyklus: C_n C_4 
- cesta: P_n P_3 
- d-regulární graf: každý vrchol má stupeň d 

dva vrcholy spojený hranou jsou sousední
hrana vedoucí do vrcholu je s ním incidentní

- k-rozměrná krychle: $V = \{0,1\}^k$

  ~~hrana~~ $u,v \in V$; $uv \in E \iff$ se liší právě ve 1 složce

  k-krychle je k-regulární a bipartitní → parita!

  Ohodnocený graf (hrany mají váhu)

Reprezentace grafů:

- matice sousednosti (adjacency matrix)

  $V \times V$ matice nad $\{0,1\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

- matice incidence

  $E \times V$ matice nad $\{0,1\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline e & 1 & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- seznam následníků:

  1 → 2

  ↓

  2 → 1 → 3 (dvojice sousedů 1 a 3)

  ↓

  3 → 1

  seznam vrcholů

- Izomorfismus grafů (V,E) a (W,F):

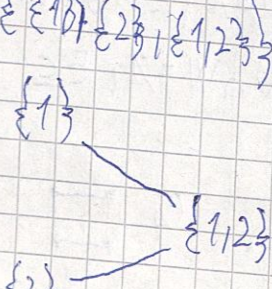
  bijekce $f: V \to W$ $\forall u,v \in V: uv \in E \iff f(u)f(v) \in F$

Příklad X množina, $V \subseteq P(X)$ konečná

  ~~subsets~~ power set - potenční množina

  průnikový graf: $G=(V,E)$; $A,B \in V$, $AB \in E \iff A \cap B \neq \emptyset$, $A \neq B$

  např. $X = \{1,2\}$ $V = \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$



- každý graf je izomorfní nějakému průnikovému grafu (najít důkaz) (najít důkaz!)

  důkaz: $X = E \cup V$

důkaz: $X = E \cup V$

pro $\forall v \in V$ def. $A_v = \{uv \in E \mid u \in V\} \cup \{v\}$

$\{A_v \mid v \in V\} \subseteq P(X)$

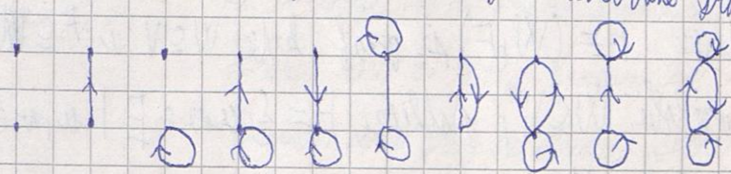
najít důkaz

- problém izomorfismu (neví se zda je NP úplný)
  - vstup (instance): 2 grafy
  - otázka: Jsou tyto grafy izomorfní
  - výpočetní obtížnost problému: Jak rychle rostou nároky na výpočetní čas se zvyšující se velikostí vstupu
  - polynomiální algoritmy P
  - nedet. polynomiální algoritmy NP
  - NP-úplné – nejtěžší mezi NP problémy

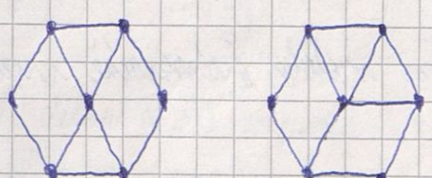
$\boxed{1.\ CV.}$

- nalezněte až na izomorfismus všechny grafy se 4 vrcholy

- nalezněte až na izomorfismus všechny orientované grafy se 2 vrcholy



- Jsou následující grafy izomorfní? Kolik mezi nimi existuje izomorfismů

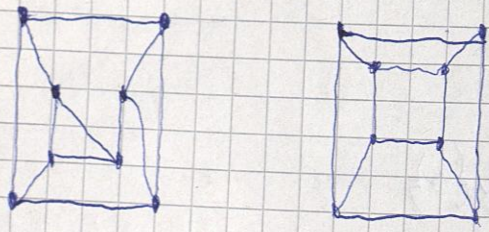


(2,2,3,3,3,3,4) .. stupně vrcholů

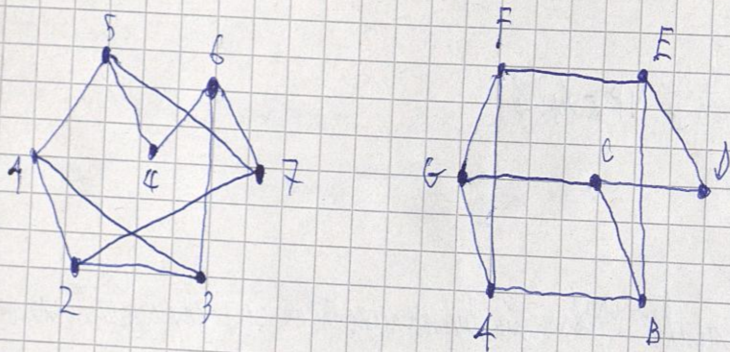
2 trojúhelníky, v jednom mají jen 1 společný vrchol a v druhém 2

vzdálenost vrcholů stupně 2 je v jednom 2 a v ~~jednom~~ druhém 4

také lze použít indukované podgrafy



Srovnávač: isomorfismy, bipartitnost



1→D, 4→D (~~1→A~~) 4A (oba mají stupeň 2)

4→D	4→D
5→C	6→C
6→E	5→E
7→B	7→B
1→G	3→G
3→F	1→F
2→A	2→A

(společný soused)

ověřit izomorfismy pomocí překreslení

Dokažte, že v každém grafu o alespoň 2 vrcholech existují alespoň 2 vrcholy stejného stupně

$\boxed{\text{Z. PŘ}}$

- H je podgraf grafu $G=(V,E)$, jestliže $H=(W,F)$ je graf, kde $W \subseteq V$ a $F \subseteq E$.
- H je indukovaný podgraf množinou vrcholů $W \subseteq V$, jestliže $F = \{uv \in E \mid u,v \in W\}$
- $G \setminus A$ je podgraf indukovaný množinou $V \setminus A$

  někdy se místo $G \setminus \{v\}$ píše $G \setminus v$
- problém rekonstrukce – je graf s alespoň ~~2~~ třemi vrcholy jednoznačně určen svými podgrafy $G \setminus v$

  hypotéza

  např.

- $G(V,E)$, $H=(W,F)$. Jestliže existuje bijekce $f: V \to W$ taková, že ~~G~~ $\forall v \in V$: $G \setminus v \cong H \setminus f(v)$, pak $G \cong H$
- problém izomorfismu podgrafu:
  - vstup: Grafy G a H
  - Otázka: Je H izomorfní podgrafu G

  NP-úplný problém i pokud H bereme jen úplné grafy.

~~– skóre grafu: G = (V,E)~~ notace: [illegible]

– stupeň vrcholu $v \in V$: $d_G(v) = |\{uv \in V \mid uv \in E\}|$

– handshaking lemma: $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$ ~~[illegible]~~

– důkaz: počítání 2 způsoby: počítáme vrcholohrany

– důsledek: počet vrcholů lichého stupně je sudý

– skóre grafu G je $(d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n))$, kde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $d_G(v_1) \le d_G(v_2) \le \dots \le d_G(v_n)$

– Problém: Je každá neklesající posloupnost skórem nějakého grafu?

Řešení: Neklesající posloupnost $D = (d_1, \dots, d_n)$ je skórem nějakého grafu $\iff$ neklesající posloupnost D' vzniklá přeuspořádáním posloupnosti $\underbrace{(d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n}-1, \dots, d_{n-1}-1)}_{(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})}$ je skóre nějakého grafu

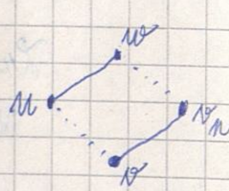
Důkaz: "$\Leftarrow$" Nový vrchol spojím právě s posledními d_n vrcholy

"$\Rightarrow$" G je graf takový, že $d_G(v_i) = d_i$ a přitom splňující, že součet stupňů vrcholů sousedících s v_n je nejvyšší možný

Předpokládejme, že v_n nesousedí právě s vrcholy nejvyšších stupňů, tj. je

$\exists v, w \in V: d(v) < d(w), v v_n \in E, w v_n \notin E, w \neq v_n$

Pak existuje $u \in V$ ~~[illegible]~~ takový, že $uw \in E$ a $uv \notin E$



Hrany uw a $v v_n$ zaměním za uv a $v_n w$

Dostali jsme graf se stejným skóre, kde součet stupňů vrcholů sousedících s v_n je vyšší, to je spor s ~~předpokladem~~ maximalitou sumy. Proto v G ~~[illegible]~~ sousedí v_n právě s vrcholy nejvyšších stupňů. Odstraněním v_n dostaneme graf se skóre $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$

– sled (walk) délky $k \ge 0$ v grafu (V, E) je konečná posloupnost vrcholů $v_0, \dots, v_k$ taková, že $\forall i \in [k]: v_{i-1} v_i \in E$.

– v je sled z v_0 do v_k délky k – ~~[illegible]~~ notace $v: v_0 \xrightarrow{k} v_k$, při ~~[illegible]~~ bez délky $v: v_0 \xrightarrow{*} v_k$

– tah (trail) – sled s po dvou různými hranami $v_{i-1} v_i$ (může se vracet do vrcholů)

– cesta (path) – tah, kde vrcholy v_i jsou po dvou různé

– Uzavřený sled – $v_0 = v_k \wedge k \neq 0$

– Kružnice: uzavřený tah takový, že $v_i \in [k]$ jsou po 2 různé

tah je to kvůli: •—•

- Z každého sledu z u do v lze vybrat cestu z u do v.
- Z každého uzavřeného tahu z u do u lze vybrat kružnici z u do u.
- vzdálenost z $u \in V$ do $v \in V$: $d_G(u,v) = \begin{cases} \min\{k \mid \exists p: u \xrightarrow{k} v\} \\ \infty, \text{ pokud } \nexists p: u \xrightarrow{k} v \end{cases}$

$\forall u,v,w \in V: d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

u nesouvislých neorientovaných grafů je to metrika

- nejkratší cesta: zobecnění vzdálenosti na ohodnocené grafy $G=(V,E,w)$

váha sledu $p = v_0, \dots, v_k$ $\quad w(p) = w(v_0v_1) + \dots + w(v_{k-1}v_k)$

$d_G(u,v) = \min\{w(p) \mid p: u \xrightarrow{*} v\}$

- Dijkstrův algoritmus:

$w: E \to \mathbb{R}_0^+$, $u \in V$ daný vrchol

Úkol: Určit vzdálenosti z u do všech vrcholů grafu.

Postup: V každém kroku máme $U \subseteq V$ s již spočítanými vzdálenostmi a pro každý vrchol $v \notin$ hodnotu $\ell(v)$, což je délka nejkratší cesty z u do v používající pouze vrcholy z U.
Přitom víme, že vzdálenost všech vrcholů z U od u je menší nebo rovna vzdálenosti všech vrcholů ve $V \setminus U$

Zahájení: $U = \{u\}$, $d(u,u) = 0$, $\ell(v) = \begin{cases} w(uv), & \text{pokud } uv \in E \\ \infty, & \text{pokud } uv \notin E \end{cases}$

Krok: Vybereme libovolný $v \notin U$ s minimální hodnotou $\ell(v)$

$U = U \cup \{v\}$, $d(u,v) = \ell(v)$

$\forall w \notin U: \quad \ell(w) = \min(\ell(w), \ell(v) + w(vw))$

- Algoritmus Floyda a Warshalla:

$w: E \to \mathbb{R}_0^+$, pevně uspořádané vrcholy $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

Úkol: určit vzdálenosti mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Postup: Pro $\ell = 0, 1, \dots, n$ počítáme hodnoty

$d_\ell(u,v) = \min\{w(p) \mid p = v_{i_0}, \dots, v_{i_k}, v_{i_0} = u, v_{i_k} = v, \forall 1 \leq j \leq k-1: i_j \leq \ell\}$

délka nejkratší cesty z u do v používající pouze vrcholy $v_1, \dots, v_\ell$.

Zahájení: $d_0(u,v) = \begin{cases} w(uv) & \text{pokud } uv \in E \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$

Krok: $d_{\ell+1}(u,v) = \min(d_\ell(u,v), d_\ell(u,v_{\ell+1}) + d_\ell(v_{\ell+1},v))$

Konec: $d(u,v) = d_n(u,v)$

– nejkratší cesty pomocí maticových operací (algoritmus):

A matice $n \times n$, kde $n = |V|$ $\quad a_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{, pokud } u = v \\ w(u,v) & \text{, pokud } uv \in E \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$

Použijeme násobení matic, kde místo + a · máme min a +.

~~Dkz~~ Pak A^k je ~~A~~ matice, kde na souřadnicích (u,v) je nejmenší váha cesty z u do v a nejvýše k hranách

Důkaz indukcí: $a^k_{u,v}$ — index, ne mocnina
prvek A^k na souřadnici (u,v).

$$A^{k+1} = A^k \cdot A$$

$$a^{k+1}_{u,v} = \min_{w \in V} \left(a^k_{u,w} + a_{w,v} \right) = \min \left(a^k_{u,v}, \min_{wv \in E} \left(a^k_{u,w} + w(wv) \right) \right)$$

~~A~~ Tedy A^{n-1} má na souřadnicích (u,v) délku nejkratší cesty z u do v

– Předpokládejme, že G je orientovaný graf bez kružnic.

Nejdelší cestu v v G spočítame stejným algoritmem, jestliže místo minima použijeme maximum a místo ∞ na začátku $-\infty$

– počet sledů délky k z u do v:

A matice sousednosti, obvyklé násobení matic $(+,\cdot)$

$a^k_{u,v}$ = počet ~~sled~~ sledů délky k z u do v

důkaz: ~~$a^{k+1}_{u,v}$~~ indukce $\quad a^{k+1}_{u,v} = \sum_{w \in V} a^k_{u,w} \cdot a_{w,v} = \sum_{\substack{w \in V \\ wv \in E}} a^k_{u,w}$

– Markovský řetězec: orientovaný ohodnocený graf (V, E, w),
kde $w: E \to \mathbb{R}^+_0$ splňuje $\forall v \in V: \sum_{\substack{w \in V \\ vw \in E}} w(vw) = 1$

$w(vw)$ určuje pravděpodobnost, že v následujícím bodu přejdeme z vrcholu v do vrcholu w

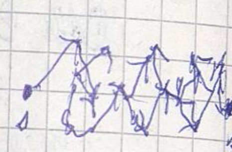
$$a_{u,v} = \begin{cases} w(uv) & \text{, pokud } uv \in E \\ 0 & \text{, pokud } uv \notin E \end{cases}$$

A^k má na souřadnicích (u,v) pravděpodobnost, že v k krocích přejdeme z vrcholu u do vrcholu v (obvyklé násobení)

Toky $\boxed{3.\ PŘ}$

toky v sítích

- otázka: Jaké množství lze daným systémem dopravit
- pravidlo: zachování množství
- síť: (V, E, c, s, t), kde (V, E, c) je orientovaný graf bez smyček

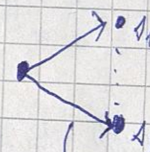


  $c: E \to \mathbb{R}^+$ ... kapacita hran

  $s \in V$ ... zdroj (source)

  $t \in V$ ... ~~[illegible]~~ stok (spotřebič, sink)

- kdyby bylo více zdrojů: přidáme jeden zdroj s



kapacita např. ~~[illegible]~~ součet ohodnocení hran

- označení: - $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ libovolné zobrazení

  pro $F \subseteq E$ označíme $f(F) = \sum_{e \in F} f(e)$

  pro $A \subseteq V$ označíme $In(A) = \{uv \in E \mid u \in V \setminus A, v \in A\}$

  $Out(A) = \{uv \in E \mid u \in A, v \in V \setminus A\} = In(V \setminus A)$

  pozn. $In(v) = In(\{v\})$

  např. $f(In(A)) = \sum_{\substack{u \in V \setminus A \\ v \in A \\ uv \in E}} f(uv)$

- definice: zobrazení $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ je tok, jestliže:

  $\forall e \in E: f(e) \le c(e)$

  $\forall v \in V \setminus \{s, t\}: f(In(v)) = f(Out(v))$

  def. toku oblíbená otázka do písemky

- velikost toku f je $vel(f) = f(Out(s)) - f(In(s))$
- Maximální tok je tok největší velikosti
- ~~[illegible]~~
- tvrzení: Maximální tok existuje
  - důkaz: Velikost toku je omezená číslem $c(Out(s))$, takže existuje $\sup_{f\ tok}(vel(f)) =: m$.

    Ukážeme, že existuje tok velikosti m.

$(f_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ posloupnost toků takových, že $vel(f_\ell) \xrightarrow{\ell\to\infty} m$

Tok můžeme chápat jako bod v prostoru $\mathbb{R}^{|E|}$ ležící v kvádru $\prod_{e\in E} \langle 0, c(e)\rangle$.

Protože kvádr je kompaktní, existuje podposloupnost $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ posloupnosti $(f_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$, která je konvergentní. Definujme $\tilde{f} := \lim_{j\to\infty} f(j)$

$$\left.\begin{array}{l} f \to f(In(v)) \\ \mathbb{R}^E \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{lineární funkce (spojitá) pro každé } v\in V$$

$\forall v\in V\setminus\{s,t\}$: $\tilde{f}(In(v)) = (\lim_{j\to\infty} f_j)(In(v)) = \lim_{j\to\infty}(f_j(In(v))) = \lim_{j\to\infty}(f_j(Out(v))) = \tilde{f}(Out(v))$

$\tilde{f}$ je tok. $vel(\tilde{f}) = \tilde{f}(Out(s)) - \tilde{f}(In(s)) = (\lim_{j\to\infty} f_j)(Out(s)) = \dots = \lim_{j\to\infty} vel(f_j) = m$ $\square$

- Tvrzení: Je-li f tok a $A\subseteq V$, pak

$$f(Out(A)) - f(In(A)) = \begin{cases} 0 & s,t\in A \vee s,t\notin A \\ vel(f) & s\in A, t\notin A \\ -vel(f) & s\notin A \wedge t\in A \end{cases}$$

speciálně $f(Out(t)) - f(In(t)) = -vel(f)$

Důkaz: $f(Out(A)) - f(In(A)) = \sum_{\substack{u\in A\\ v\in V\setminus A\\ uv\in E}} f(uv) - \sum_{\substack{u\in A\\ v\in V\setminus A\\ vu\in E}} f(vu) + \underbrace{\sum_{\substack{u,v\in A\\ uv\in E}} f(uv) - \sum_{\substack{u,v\in A\\ vu\in E}} f(vu)}_{\text{umělé přidané sumy}}$

$$= \sum_{\substack{u\in A\\ v\in V\\ uv\in E}} f(uv) - \sum_{\substack{u\in A\\ v\in V\\ vu\in E}} f(vu) = \sum_{u\in A}\big(f(Out(u)) - f(In(u))\big)$$

$$= \begin{cases} 0 & s,t\notin A \\ vel(f) & s\in A, t\notin A \end{cases}$$

$$= f(Out(A)) - f(In(A)) = f(In(V\setminus A)) - f(Out(V\setminus A))$$

$$= \begin{cases} 0 & s,t\in A \\ -vel\, f & s\notin A, t\in A \end{cases}$$ $\square$

- řez sítě (V,E,c,s,t) je libovolná množina $S\subseteq V$ taková, že $s\in S \wedge t\notin S$

- kapacita řezu: $c(S) = c(Out(S))$
- Minimální řez: řez nejmenší kapacity
- Tvrzení: Je-li f tok a S řez, pak $vel(f)\leq c(S)$

rovnost právě když $\forall u\in S, v\in V\setminus S$: $uv\in E \Rightarrow f(uv) = c(uv) \wedge vu\in E \Rightarrow f(vu) = 0$

Důkaz: $f(Out(S)) \leq c(Out(S)) \wedge f(In(S)) \geq 0$

$$vel(f) = f(Out(S)) - f(In(S)) \leq c(Out(S)) = c(S) \qquad \square$$

- důsledek: Je-li f tok a S řez takový, že $vel(f) = c(S)$, tak f je max. tok a S je min. řez

- Def. Nechť f je tok:
  - Rezervní polocesta pro tok f do vrcholu $v \in V$ je střídavá posloupnost vrcholů a hran začínající a končící vrcholem $p = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$, kde $e_i \in E$, $v_i \in V$, $v_0 = s$, $v_k = v$, v_i po dvou ..., přičemž pro všechna $i = 1, \dots, k$ platí buď
    $e_i = v_{i-1}v_i$ a $c(e_i) > f(e_i)$ nebo
    $e_i = v_i v_{i-1}$ a $f(e_i) > 0$

  Pokud $e_i = v_{i-1}v_i$ (dopředná hrana), tak $r(e_i) = c(e_i) - f(e_i) > 0$

  $e_i = v_i v_{i-1}$ (zpětná hrana), tak $r(e_i) = f(e_i)$

  - rezerva polocesty p je $r(p) = \min_{i=1,\dots,k} r(e_i)$. Platí $r(p) > 0$

- Tvrzení: Je-li p rezervní polocesta do t pro tok f, potom existuje tok g splňující $vel(g) = vel(f) + r(p)$.
  Pro max. tok tedy žádná rezervní polocesta do t neexistuje.

  Důkaz: $p = \underset{s}{\underset{\shortparallel}{v_0}}, e_1, \dots, e_k, \underset{t}{\underset{\shortparallel}{v_k}}$ rez. polocesta do t

  $g(e) := f(e)$, pokud $\forall i: e \neq e_i$

  $g(e_i) := f(e_i) + r(p)$, je-li e_i dopředná

  $g(e_i) := f(e_i) - r(p)$, je-li e_i zpětná

  např. pro dopřednou $\forall e \in E: 0 \leq g(e) \leq c(e)$ $\qquad g(e_i) = f(e_i) + r(p) \leq f(e_i) + c(e_i) - f(e_i) = c(e_i)$

  $\forall v \in V \setminus \{s,t\}: g(In(v)) = g(Out(v))$:

  Pokud $v \neq v_i \; \forall i$, tak $g(In(v)) = f(In(v))$ a $g(Out(v)) = f(Out(v))$

  Pokud $v = v_i$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$:

  $\xrightarrow{e_i} v_i \xrightarrow{e_{i+1}}$ $\Big\}$ $g(In(v_i)) = f(In(v_i)) + r(p)$, $g(Out(v_i)) = f(Out(v_i)) + r(p)$ $\Rightarrow$

  $\xrightarrow{e_i} v_i \xleftarrow{e_{i+1}}$ $\Big\}$ $g(In(v_i)) = f(In(v_i)) + r(p) - r(p) = f(In(v_i))$, $g(Out(v_i)) = f(Out(v_i))$

  $\longleftarrow v_i \longrightarrow$

  $\longleftarrow v_i \longleftarrow$ $\Big\}$ analogicky

  $$vel(g) = g(Out(s)) - g(In(s)) \begin{cases} f(Out(s)) + r(p) - f(In(s)) = vel(f) + r(p) & \text{pokud } s \xrightarrow{e_1} \\ f(Out(s)) - (f(In(s)) - r(p)) & \text{pokud } s \xleftarrow{e_1} \end{cases}$$

$\square$

- věta o max. toku (max-flow min-cut):
  - Tok je maximální $\iff$ pro něj neexistuje rezervní polocesta do stoku.
  Přitom velikost max. toku je rovna kapacitě min. řezu
  - Důkaz:

  "$\Rightarrow$" máme

  "$\Leftarrow$" předp., že f nemá rez. polocestu do t

  Buď S množina všech vrcholů do nichž vede rezervní polocesta.

  Je-li $u \in S$ libovolné, $v \in V \setminus S$ takové, že $uv \in E$ platí $f(uv) = c(uv)$ a $f(vu) = 0$

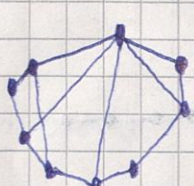
  (Kdyby ne, šlo by prodloužit rezervní polocestu)

  Proto $val(f) = f(Out(S)) - f(In(S)) = c(S) - 0 = c(S)$ $\square$

- Algoritmus Forda a Fulkersona: ~~Stačí~~
  - Jsou-li kapacity hran celočíselné, můžeme zvyšovat velikost toku pomocí rez. polocest, až najdeme maximální. Dává celočíselné ~~(často racionální)~~ řešení
  - Jsou-li iracionální nemusí ani konvergovat k max. velikosti toku
- Algoritmus Edmondse a Karpa: ~~Vždy volíme rezervní pol~~
  - Vždy volíme rezervní polocestu, která používá nejméně hran

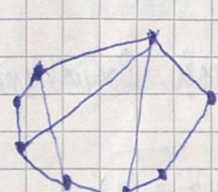
$\boxed{3.\ CV}$

- Obsahuje graf



tenhle nejde použít, pak by tam byl trojúhelník

Obsahuje indukovaný podgraf izomorfní C_5?

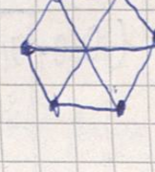


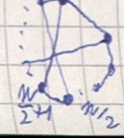
tenhle —||—, bylo by tam C_4

a dokončit lehké

- Pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje 3-regulární graf s n vrcholy?

  n sudé, $n \geq 4$

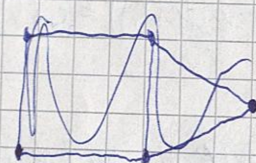




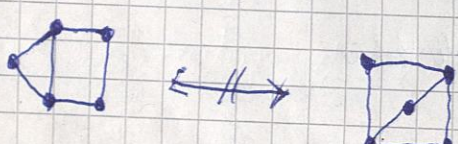
$\boxed{4.\ PŘ.}$

$\boxed{4.\ CV.}$

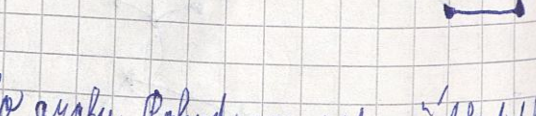
* Dejte příklad 2 grafů s nejmenším počtem vrcholů, které mají stejné skóre, ale nejsou izomorfní

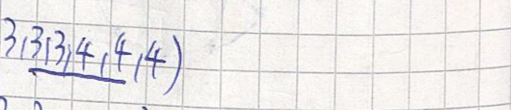


tyhle dva nejsou



skoroblastně





* Rozhodněte zda následující posloupnost je skórem nějakého grafu. Pokud ano, dejte příklad takového grafu

(2, 2, 3, 3, 6, 6, 6, 6)

(1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4)

(2, 1, 2, 2, 5, 5, 5)

(1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)

(1, 2, 2, 2, 5, 5, 5)

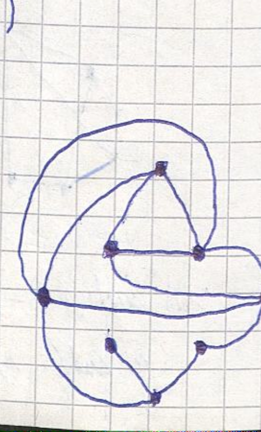
(1, 1, 2, 2, 2, 2)

(1, 1, 1, 1, 4, 4)

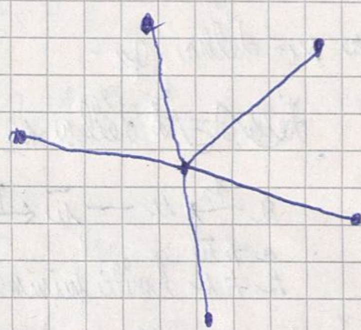
(1, 1, 1, 1, 2)

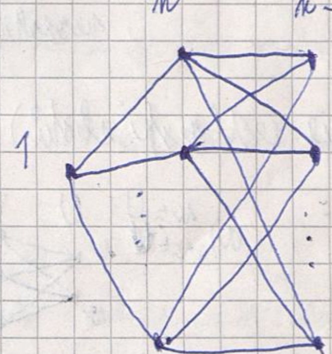
(0, 0, 0, 1, 3) X

(0, 0, 1, 1)



* určete, jaký je nejmenší počet vrcholů n-regulárního grafu, který neobsahuje kružnici délky 3. Popište všechny takové grafy s min. počtem vrcholů.





$K_{n,n}$

nejmenší počet vrcholů je $2n$

* Dokažte, že graf je bipartitní $\Longleftrightarrow$ neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: "$\Longrightarrow$" triviální

"$\Longleftarrow$" ~~nalezení rozkladu~~ BÚNO graf je souvislý

$v \in V$, def. $u \in U \Longleftrightarrow d(v,u)$ je sudá

$u \in W \Longleftrightarrow d(v,u)$ je lichá

zbývá ukázat, že neexistuje hrana mezi vrcholy v U ani mezi vrcholy v W.

spor

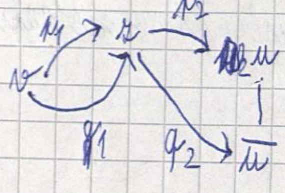
p: cesta sudé délky ~ nejkratší

$p: v \xrightarrow{*} u$ $\quad u \in U$

$q: v \xrightarrow{*} \bar{u}$ $\quad v'$ $\quad \bar{u} \in U$

cesta sudé délky q ~ nejkratší

v' je poslední vrchol na p, který leží i na q.



Chceme ukázat, že $z \xrightarrow{r_2} u - \overline{w} \xleftarrow{q_2}$ je kružnice liché délky

délka r_1 = délka q_1

~~délka~~ $\equiv$ délka $r_2 \equiv$ délka $q_2 \pmod 2$.

$z \xrightarrow{r_2} u - \overline{w} \xleftarrow{q_2}$ má lichou délku

$z \neq \overline{w}$

$z \neq u$ kvůli minimalitě ~~...~~ r a q s paritou r a q

Podle volby z ~~...~~ žádný vrchol na cestě vrchol na cestě $z \xrightarrow{r_2} u$ není současně vrcholem na q_2. A na cestě r_2 se žádný vrchol neopakuje z def. cesty

* Určete kolik existuje cest (resp. sledů) délky k mezi 2 danými vrcholy v K_n (resp. $K_{m,n}$)

sledy v $K_{m,n}$:

a) $u \in U$, $v \in U$

$|U| = m$

$|W| = n$

$\boxed{m^{\frac{k}{2}-1} \cdot n^{\frac{k}{2}}}$ pro k sudé, $\boxed{0}$ pro k liché

b) $u \in U$, $v \in W$: $\boxed{0}$ pro k sudé, $(m \cdot n)^{\frac{k-1}{2}}$ pro k liché

cesty v $K_{m,n}$:

a) $u \in U$, $v \in U$

$n \cdot (m-2) \cdot (n-1) \cdot (m-3) \cdot \ldots$

$$\boxed{\frac{n!}{(n-\frac{k}{2})!} \cdot \frac{(m-2)!}{(m-\frac{k}{2}-1)!}}$$ pro k sudé a $k \leq \min(2n, 2(m-1))$

$\boxed{0}$ pro k liché

cesty v K_n:

$$\boxed{\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}}$$ pro $k \leq n-1$

sledy v K_n: Nechť a_k je počet sledů délky k.

$$a_k = (n-1)^{k-1} - a_{k-1}$$

$$a_k = (n-1)^{k-1} - (n-1)^{k-2} + (n-1)^{k-3} - \dots + (-1)^k a_0$$

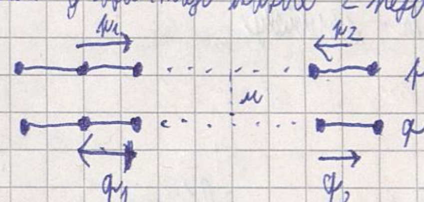
$$a_0 = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0 & u \neq v \end{cases}$$

$$a_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} \quad \text{pro } u \neq v$$

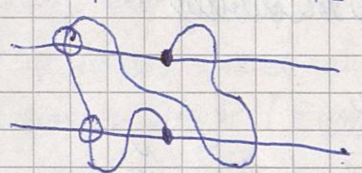
$$a_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} + (-1)^k \quad \text{pro } u = v$$

* dokažte, že v souvislém grafu mají každé 2 nejdelší cesty společný vrchol

sporem:



nejdelší cesty, nemají společný vrchol

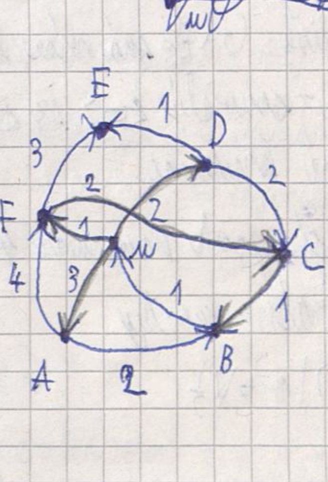


nechť r je nejkratší cesta spojující nějaký vrchol p s nějakým vrcholem q.

pro nějaká i, j je $p_i r q_j$ delší cesta než p.

* Pomocí Dijkstrova algoritmu určete vzdálenosti z vrcholu u do všech vrcholů. Vyznačte nějaký strom nejkratších cest

	u	A	B	C	D	E	F
u	0	3	∞	∞	2	∞	1
F		3	∞	3	2	4	
D		3	∞	3		3	
A			5	3		3	
C			4			3	
E			4				



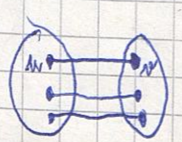
$\boxed{5. \text{PŘ.}}$ vše je defaultně vrcholové
implicitně

- graf je **souvislý**, jestliže se z každého vrcholu dá dostat do každého vrcholu cestou
- **komponenta grafu** = max. souvislý podgraf
- komponenty tvoří **rozklad**
- Množinu $A \subseteq V$ nazveme vrcholovým řezem $G=(V,E)$, jestliže $G \setminus A$ je nesouvislý
- graf má vrcholový řez $\Leftrightarrow$ není úplný
- **vrcholová souvislost** $\kappa(G) = \min\{|A| \mid A \subseteq V \wedge G\setminus A$ je nesouvislý nebo triviální$\}$
kappa — graf o 1 vrcholu

$\kappa(G)$ je nejmenší velikost vrcholového řezu, je-li G neúplný, jinak $\kappa(K_n) = n-1$

- graf G je **k-souvislý**, pokud $k \leq \kappa(G)$.
- $\kappa(G)$ je největší k takové, že G je k-souvislý
- $F \subseteq E$, def. $G \setminus F = (V, E \setminus F)$
  $G = (V, E)$
- F je **hranový řez**, jestliže $G \setminus F$ je nesouvislý
- každý netriviální graf má hranový řez
- **hranová souvislost** $\kappa'(G)$ je nejmenší velikost hran. řezu, navíc $\kappa'(K_1)=0$
- říkáme, že G je **hranově k-souvislý**, jestliže $k \leq \kappa'(G)$.
- platí $\kappa(G)=0 \Leftrightarrow \kappa'(G)=0 \Leftrightarrow G$ je nesouvislý nebo triviální
- netriviální graf je 1-souvislý $\Leftrightarrow$ hranově 1-souvislý $\Leftrightarrow$ je souvislý — obměna
- $v \in V$ je **bod artikulace**, jestliže $G \setminus v$ má více komponent než G
- neúplný graf je 2-souvislý $\Leftrightarrow$ je souvislý a neobsahuje bod artikulace
- hrana $e \in E$ se nazývá **most**, jestliže $G \setminus e$ má více komponent než G
- netriviální graf je hranově 2-souvislý $\Leftrightarrow$ je souvislý a neobsahuje most
- hrana je most $\Leftrightarrow$ neleží na žádné kružnici
- tvrzení: odebráním k mostů se zvýší počet komponent právě o k.
  Nepřibudou a ani se neztratí mosty
- věta: $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \min\{d(v) \mid v \in V\}$
  (triviální)

důkaz: předpoklad $\kappa'(G) \geq 1$
F ... hranový řez, $|F| = \kappa'(G)$



Nechť $uv \in F$ je lib. hrana
Pro každou hranu z $F \setminus \{uv\}$ jeden její vrchol různý od u a v vložím do do množiny A.

$|A| \leq |F| - 1$. Hrana uv je mostem grafu $G \setminus A$, to protože je mostem $G \setminus (F \setminus \{uv\})$ a platí $G \setminus A = (G \setminus F \setminus \{uv\}) \setminus A$

a) Je-li $G \setminus A$ nesouvislý, pak $k(G) \leq |A| \leq k'(G)$

b) Je-li $G \setminus A$ souvislý:

1) $V \setminus A = \{u, v\}$, potom $G \setminus (A \cup \{u\})$ je triv., takže $k(G) \leq |A| + 1 \leq k'(G)$

2) aspoň jedna ze 2 komponent grafu $(G \setminus A) \setminus \{uv\}$ obsahuje alespoň 2 vrcholy, řekněme komponenta vrcholu u. Proto $G \setminus \{A \cup \{u\}\}$ je nesouvislý, takže $k(G) \leq |A| + 1 \leq k'(G)$ □

- Mengerova věta (vztah mezi velikostí řezu a počtem nezávislých cest)

varianty: hrany nebo vrcholy, orientované nebo neorientované, lokální nebo globální

- věta (hrany, orient., lok.):

$G = (V, E)$ orient. graf, $u, v \in V$, $u \neq v$. Potom největší počet hranově disjunktních cest z u do v je roven nejmenší velikosti množiny $F \subseteq E$ takové, že v grafu $G \setminus F$ neexistuje cesta z u do v (F odděluje u od v.)

Důkaz: síť $N = (V, E, c, u, v)$, kde $c(e) = 1$ pro každou $e \in E$

v N existuje celočíselný tok velikosti $m \Leftrightarrow$ existuje m hranově disjunktních cest z u do v.

Nejmenší kapacita řezu v N je rovna nejmenšímu počtu hran oddělujících u od v, protože

S řez N. Potom $F = Out(S)$ odděluje u od v a $|F| = c(S)$.

Naopak, pokud $F \subseteq E$ odděluje u od v, zvolíme S jako množinu všech vrcholů krátitelných v $G \setminus F$ z vrcholu u. Pak S je řez, $Out(S) \subseteq F \Rightarrow$

$$c(S) = c(Out(S)) \leq |F|$$

největší počet hran. disj. cest = největší velikost celočíselného toku
= největší velikost toku
= nejmenší kapacita řezu
= nejmenší počet hran oddělující u od v □

- věta (hrany, neorient., lok.): totéž

důkaz: uvážíme orient. graf $H = (V, E')$, kde $E' = \{(w, q) \mid wq \in E\}$

k hranově disj. cest v G určuje k hranově disj. cest v H – zřejmé k hranově disj. cest v H s minim. možným součtem délek. Ukažme, že nepoužívají zbytečné hrany (q, w) i (w, q).

Kdyby ano, pak máme cesty $p: u \xrightarrow{*} w \to q \to v$

$p': u \xrightarrow{*} q \to w \xrightarrow{*} v$ ← a ty můžeme nahradit

lib. cestami vybranými ze sledů $u \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} v$

$u \xrightarrow{*} q \xrightarrow{*} v$ ← spor.

Proto nahrazením hran (q, w) hranami $\{q, w\}$ dostáváme k hranově disj. cest v G.

Pokud $F \subseteq E'$ odděluje u od v v H, tak představuje F množinu oddělující u od v v G.

Předp., že $F \subseteq E$ odděluje u od v v G. Nechť S je komponenta grafu $G-F$ obsahující u. Potom $Out_H(S)$ odděluje u od v v H, a přitom $|Out_H(S)| \leq |F|$

Největší počet hran. disj. cest v G =

= ——— " ——— H =

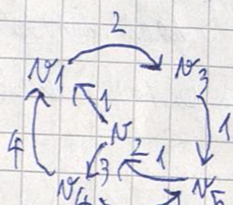
= nejmenší velikost množiny hran oddělující u od v v H =

= ——— " ——— G □

- Důsledek (globální, hrany): Netriv. graf je hranově k-souvislý alespoň k ⟺ každé 2 různé vrcholy jsou spojeny alespoň k hranově disj. cestami

$\boxed{\text{5. CV.}}$

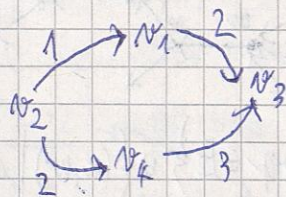
* pomocí násobení matic určete vzdálenosti pro všechny dvojice vrcholů v grafu



$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ v_2 & 1 & 0 & \infty & 3 & \infty \\ v_3 & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 \\ v_4 & 4 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ v_5 & \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{array} = A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \infty & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & & 0 & & 1 \\ & & & 0 & \\ & 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

* pomocí algoritmu Floyda a Warshalla určete největší váhy cest pro všechny dvojice vrcholů v grafu

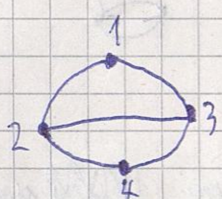


$$d_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 2 & -\infty \\ 1 & 0 & -\infty & 2 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad d_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 2 & -\infty \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = d_1 \qquad d_3 = d_2 = d_1$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 2 & -\infty \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

* pomocí násobení matic určete počet sledů délky 6 mezi každými 2 vrcholy v grafu.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 15 & 14 & 9 \\ 9 & 14 & 15 & 9 \\ 10 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

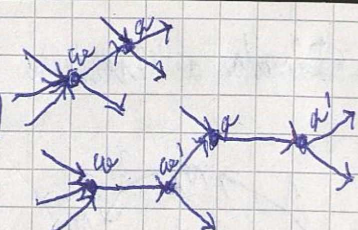
$$A^6 = \begin{pmatrix} 58 & 65 & 65 & 58 \\ 65 & 91 & 90 & 65 \\ 65 & 90 & 91 & 65 \\ 58 & 65 & 65 & 58 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{6. PŘ}}$

- **věta** (orient., vrcholová, lokální):
  - $G=(V,E)$ orient. graf, $u, v \in V$, $u \neq v$, $uv \notin E$

    Potom největší počet vrcholově nezávislých cest z u do v je roven nejmenší velikosti množiny $A \subseteq V \setminus \{u,v\}$ takové, že v grafu $G \setminus A$ neexistuje cesta z u do v.

- **důkaz**: převedeme na hranovou verzi.



Definujeme orient. graf $H=(V',E')$

$V' = V \cup \{w' \mid w \in V \setminus \{u,v\}\}$

$E' = \{(w',q) \mid w \in V\setminus\{u,v\}, q \in V, wq \in E\} \cup \{(u,w) \mid w \in V, uw \in E\} \cup$

$\cup \{(w,w') \mid w \in V\setminus\{u,v\}\}$

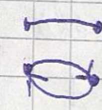
Hranově disjunktní cesty z u do v v H odpovídají disjunktním cestám z u do v v G.

Odděluje-li $A \subseteq V$ u od v v G, tak $\{ww' \mid w \in A\} \subseteq E'$ odděluje u od v v H.

Odděluje-li $F \subseteq E'$ u od v v H, tak $A = \{w \mid ww' \in F$ nebo $uw \in F$ nebo $\exists q \in V \ldots$ odděluje u od v v G. $|A| \le |F|$

Tedy nejmenší počet vrcholů odd. u od v v G je stejný jako nejmenší počet hran odd. u od v v H. □

- **věta** (neorient., vrcholy, lok.): totéž
  - **důkaz**: stejný jako pro hrany, ale bez komplikací, převedení na orient. □



- **věta** (vrcholy, glob.):
  - Neorient. graf je k-souvislý $\iff$ každé 2 různé jsou ~~spojeny~~ spojeny alespoň k nezávislými cestami
- **důkaz**: Pro K_n to platí. Uvažujme neúplný G.

G je k-souvislý $\iff$ neexistuje množina $A \subseteq V$ méně než k vrcholů, taková že A odděluje nějaké 2 ~~vrcholy~~ ~~nesousední~~ vrcholy grafu G nesousední

$\iff$ lib. dva nesousední vrcholy jsou spojeny alespoň k nezávislými cestami

z toho plyne "$\Leftarrow$"

Zbývá ukázat, že v k-souvislém grafu jsou i lib. 2 sousední vrcholy spojeny alespoň k nezávislými cestami.

$uv \in E$. Ukážeme, že $G \setminus \{uv\}$ je $(k-1)$ souvislý: Sporem. Předp. existuje $A \subseteq V$, $|A| < k-1$ taková, že $(G \setminus \{uv\}) \setminus A$ je nesouvislý

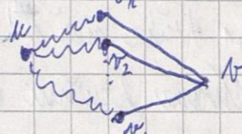
$= (G \setminus A) \setminus \{uv\}$, tedy

$\kappa'(G \setminus A) \le 1$, tedy $\kappa(G \setminus A) \le 1$

Proto $\kappa(G) \le |A| + 1 \le k-1$, spor s k-souvislostí

Víme, že v $G \setminus \{uv\}$ nejsou u, v sousední, takže je lze spojit $k-1$ nezávislými cestami, které spolu s hranou uv tvoří k nezávislých cest z u do v. $\square$

- <u>Důsledek</u>: κ i κ' lze počítat v polynomiálním čase pomocí toků v sítích
- <u>spec. případ pro $k=2$</u>: G je 2-souvislý $\Leftrightarrow$ každé 2 vrcholy leží na společné kružnici
- <u>Důsledek</u>: Graf $G=(V,E)$ je k-souvislý $\Leftrightarrow$ má alespoň $k+1$ vrcholů a pro libovolné $u \in V$ a $S \subseteq V$, $|S|=k$, $u \notin S$, existují nezávislé cesty z u do všech vrcholů množiny S.

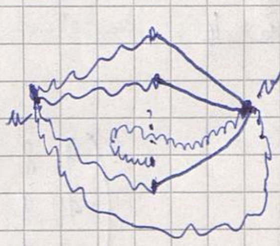


- důkaz: "$\Rightarrow$": $G' := \{V \cup \{v\}, E \cup \{wv \mid w \in S\}\}$ je k-souvislý a podle Mengerovy věty existuje k nezávislých cest z u do v, z nichž odebráním posledních hran dostaneme nezávislé cesty do všech vrcholů S.

"$\Leftarrow$": $u, v \in V$ různé nesousední vrcholy. Chceme ukázat, že jsou spojeny k nezávislými cestami.

$|V| \geq k+1 \Rightarrow$ můžeme zvolit nějakou množinu $S \subseteq V$, $|S|=k$, $v \notin S$. Podle předpokladu existují nezávislé cesty do všech vrcholů S a tedy každá začíná jinou hranou $\Rightarrow v$ má alespoň k sousedů.

$uv \notin E \Rightarrow$ můžeme vybrat množinu $S \subseteq V$, $|S|=k$, $u \notin S$ a $\forall w \in S: wv \in E$.
Podle předpokladu existují nezávislé cesty z u do všech vrcholů S.



problém

Z nich vytvoříme k nezávislých cest do v, tak, že všechny, které nevedou přes v, prodloužíme o 1 hranu, a pokud nějaká (jediná) vede přes v, tak ji zkrátíme o úsek z v do S. $\square$

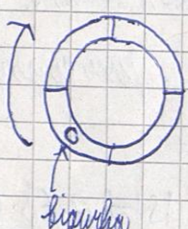
- <u>Diracova věta</u>: Je-li $\kappa(G) \geq 2$, potom každých k vrcholů leží na společné kružnici
- důkaz: Vezmeme nějakou kružnici v G, která obsahuje aspoň 2 z daných $\kappa(G)$ vrcholů.
Postupně zvyšujeme počet daných vrcholů ležících na této kružnici.
Předp., že dané vrcholy $v_1, \dots, v_l$ už na kružnici leží, $l < \kappa(G)$.
(v tomto pořadí).
Existují nezávislé cesty do vybraných $\kappa(G)$ vrcholů naší kružnice (pokud je délka kružnice menší než $\kappa(G)$, bereme všechny její vrcholy)

Alespoň 2 z těchto cest poprvé dorazí na naší kružnici ve stejném úseku $u_i u_{i+1}$ (mod...

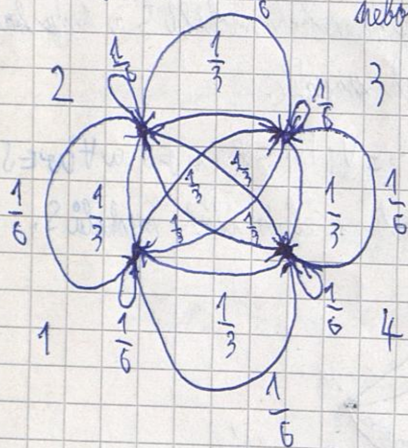
kružnici ve stejném úseku $u_i u_{i+1}$, označme tyto začátky cest $p: v \xrightarrow{*} \bar{v}$ a $q: v \to v'$
průčemž předp., že $\bar{v}$ leží na úseku $u_i u_{i+1}$ dříve než $\bar{v}'$. Nahrazením úseku $u_i \xrightarrow{*} u_{i+1}$
cestou $u_i \xrightarrow{*} \bar{v} \xrightarrow[p^{-1}]{*} v \xrightarrow[q]{*} v' \xrightarrow{*} u_{i+1}$ dostáváme kružnici obsahující $u_1, \dots, u_k, v$

6. CV.

* 4 políčka jako v Člověče, nezlob se



v každém kroku postoupíme o tolik polí, kolik padlo na 6-ti stěnné kostce.
Určete, zda je pravděpodobnější, že po 4 krocích bude figurka na původním místě nebo naproti

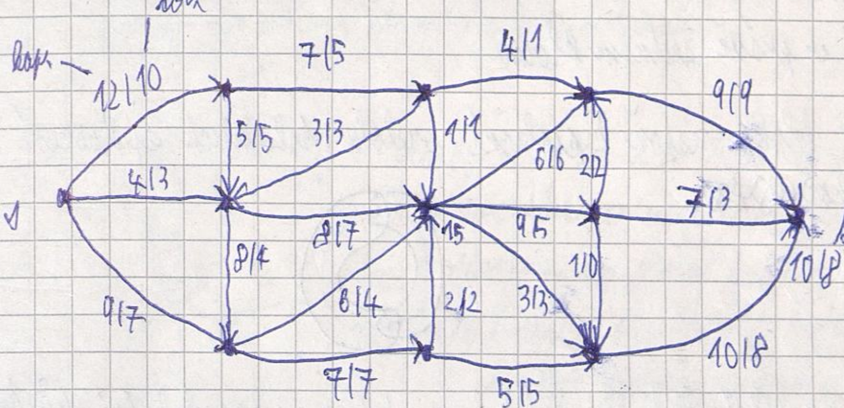


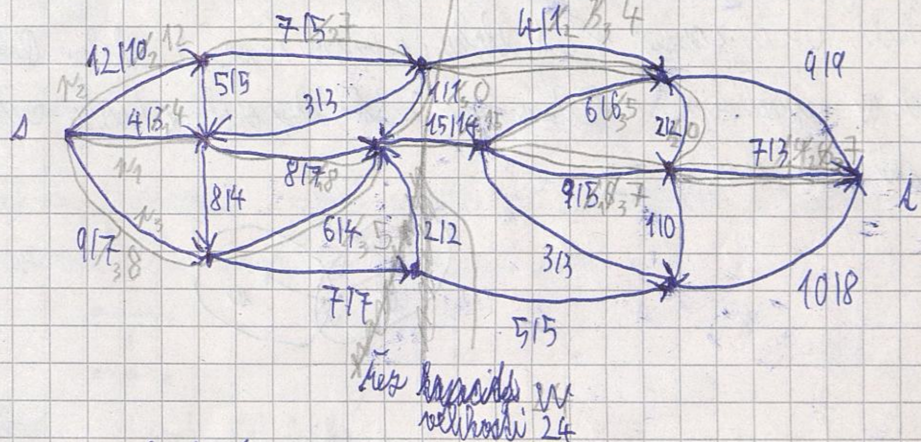
$$\frac{\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}}{6} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 9 \end{pmatrix}}{36}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 10 & 9 \end{pmatrix}^2}{1296} = \frac{\begin{pmatrix} 322 & \cdot & 326 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}{1296}$$

naproti je pravděpodobnější

* pomocí algoritmu Edmondse a Karpa upravte následující tok v síti s danými kapacitami hran a vrcholů na maximální





$r(p_1)=1$

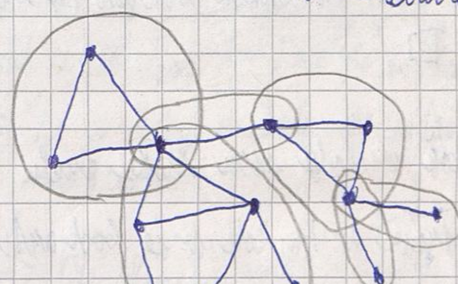
$r(p_2)=2$

$r(p_3)=1$

$vel(f) = 12+4+8 = 24$

$\boxed{7.\text{PŘ}}$

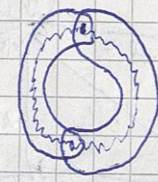
- $G=(V,E)$ netriv. souvislý graf
- Blok grafu G = maximální podgraf G, který nemá vrcholový řez velikosti nejvýše 1.
  je 2-souvislý nebo izom. K_2



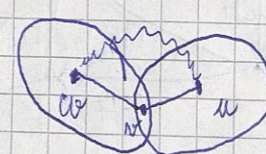
- každý blok je indukovaný podgraf
- dva vrcholy leží ve stejném bloku <=> leží na společné kružnici nebo jsou spojeny hranou
- $\{u,v\}$ je blok <=> uv je most
- odebráním-li mosty, zbydou tam triviální komponenty a hranově 2-souvislé komponenty, každá hranově 2-souvislá komponenta je sjednocením nějakých 2-souvislých bloků

– **Lemma:** Každé 2 různé bloky mají nejvýše 1 společný vrchol, a ten je bodem artikulace G. Tedy každá hrana leží v právě jednom bloku

– důkaz: Mají-li 2 různé bloky aspoň 2 společné vrcholy, tak jejich sjednocení je 2-souvislé a to je spor. ~~Dokázáno~~



Kdyby společný vrchol v nebyl bod artikulace, tak po jeho odebrání zůstane graf souvislý. Nechť w je soused v v 1. bloku, u soused v ve 2. bloku. Pak existuje cesta z u do w neprocházející v. Potom tyto 2 bloky spolu s touto cestou tvoří 2-souvislý graf, spor. □

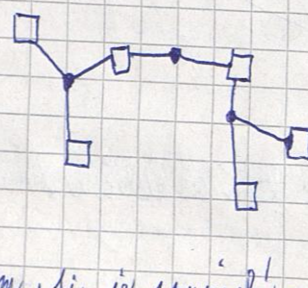


– **Lemma:** Každý bod artikulace v náleží aspoň do 2 bloků

– důkaz: G \ v obsahuje aspoň 2 komponenty, přičemž v má v každé z těchto komponent nějakého souseda.

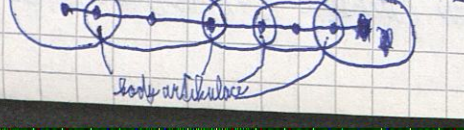
Potom tito sousedi nemohou v G ležet na stejné kružnici, ani nemohou být spojeni hranou, takže leží v různých blocích, přitom u, v i u, w leží ve společných blocích. □

– **Blokový strom** grafu G = graf, jehož vrcholy jsou bloky grafu G a body artikulace G.
Hrany právě v H, kde v je bod artikulace, H je blok a v patří do H.



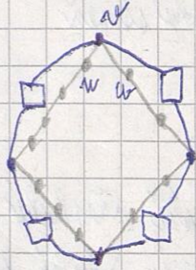
– **tvrzení:** Blokový strom je strom, tj. je souvislý a neobsahuje kružnici

– důkaz:



tedy je souvislý

~~Předp.~~ Předp.: že blokový strom obsahuje kružnici.



Každý blok na této kružnici nahradíme cestou spojující příslušné body artikulace uvnitř tohoto bloku.
Dostaneme uzavřený tah v G.
Nechť v je některý z bodů artikulace na kružnici, u, w jeho sousedé v tahu. Pak $u \neq w$ a z tahu umíme vybrat kružnici obsahující $u - v - w$, spor s tím, že u, w neleží na stejném bloku.

- existuje lineární algoritmus hledání blokové stromu (Tarjan)

- <u>Věta</u>: graf je 2-souvislý $\iff$ je možné jej zkonstruovat z grafu $K_3 = C_3$ opakovaným prováděním operací dělení hrany a přidávání hrany.

- <u>Důkaz</u>: "$\Leftarrow$" ~~lehk~~ lehký

"$\Rightarrow$" Zvolím v G libovolnou kružnici, kterou vytvořím dělením hran K_3.

Takže umíme zkonstruovat podgraf indukovaný touto kružnicí. V každém kroku zvětšíme již zkonstruovaný indukovaný podgraf U.

$v \notin U$ tž. $u, \bar{u}$ lib. vrcholy v U. Existují nezávislé cesty z v do u a $\bar{u}$.
Nechť $w, \bar{w}$ jsou mezní vrcholy patřící do U na těchto cestách. U zvětšíme o v a všechny vrcholy na cestách $v \to w$, $v \to \bar{w}$ přidáním nové hrany mezi $w, \bar{w}$.

- <u>Věta</u>: graf je 3-souvislý $\iff$ lze zkonstruovat z grafu K_4 opakováním následující operace

dělení vrcholů: Z grafu $G = (V, E)$ vytvoříme $G' = (V', E')$ tak, že vrchol $v \in V$ nahradíme 2 vrcholy $v', v'' \in V'$ tak, aby platilo:

1) $x \neq v \neq y \Rightarrow (xy \in E' \iff xy \in E)$
2) $vx \in E \Rightarrow (v'x \in E' \vee v''x \in E')$
3) $v'v'' \in E'$
4) $d_G(v') \geq 3,\ d_G(v'') \geq 3$

- Eulerovský graf: souvislý graf ve kterém existuje ~~Eulerovský~~ uzavřený tah přes všechny hrany
- Věta: Souvislý graf je eulerovský $\Leftrightarrow$ všechny vrcholy mají sudý stupeň
  - důkaz: "$\Rightarrow$" zřejmý

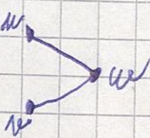
    "$\Leftarrow$" Nechť $v_0 \xrightarrow{*} v_k$ je nejdelší tah v G.

    Kdyby $v_0 \neq v_k$, tak tento tah prochází přes lichý počet hran incidentních s v_k, proto nebyla použita nějaká hrana $v_k \to v$, spor s maximalitou.

    Tedy $v_0 = v_k$. Předp., že nějaká hrana nebyla použita, takže díky souvislosti existuje nějaká nepoužitá hrana $v_i \to v$, kde $i \in \{0, \dots, k-1\}$.
    Potom máme delší tah $v_i \xrightarrow{*} v_k = v_0 \xrightarrow{*} v_i \to v$, spor.

- Důsledek: v souvislém grafu existuje tah přes všechny hrany $\Leftrightarrow$ v něm existují nejvýše 2 vrcholy lichého stupně
  - důkaz: "$\Rightarrow$" zřejmý

    "$\Leftarrow$" Pokud všechny vrcholy sudého stupně, pak jsme hotovi.
    Pokud existuje vrchol lichého stupně, tak jsou právě 2, řekněme u, v.
    Přidáme nový vrchol w a hrany uw, vw.



    Potom mají všechny vrcholy sudý stupeň, existuje tedy uzavřený tah z w do w přes všechny hrany a z něj odstraníme první a poslední hranu

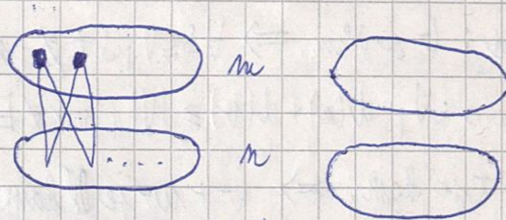
- algoritmus: Pokud existuje vrchol lichého stupně, začneme v něm, jinak kdekoli.
  Odebereme-li ~~vždy~~ již použitou hranu, pak nepoužijeme nikdy most ve zbývajícím grafu, pokud nemusíme.
  Pokud musíme přes most, pak je tento most jediná hrana k dispozici
  - důkaz: V každém momentě máme graf s jedinou netriviální komponentou, která obsahuje nejvýše 2 vrcholy lichého stupně, a pokud nějaký je, jsme v některém z nich. □
    detaily indukcí
- slabě souvislý orient. graf – po desorientaci je souvislý
- pro slabě souvislé orient. grafy: existuje uzavřený tah přes všechny hrany $\Leftrightarrow$ každý vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň

$\boxed{7. CV}$

* určete hranovou a vrcholovou souvislost $K_{m,n}$ a k-rozměrné krychle ~~Q_k~~ G_k

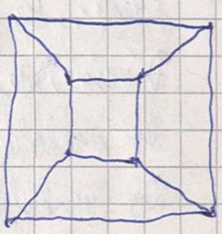
$$\min(m,n) \le k(K_{m,n}) \le k'(K_{m,n}) \le \min(m,n)$$

Menger



Přímo z definice to plyne přímočařeji

$$k \le k(G_k) \le k'(G_k) \le k$$



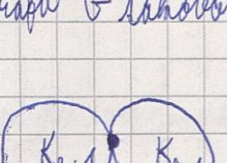
k-rozměrná krychle vznikne z 2 (k-1)-ší rozměrných krychlí spojením dvou odpovídajících si vrcholů

Indukcí 1) Odebereme k-1 vrcholů z jedné (k-1)rozměrné krychle => 2. nepoškozená a spojená se všemi zbylými vrcholy

2) Odebereme z každé nejvýš k-2 vrcholů => obě zůstanou souvislé z 2^{k-1} hran spojujících krychle nějaká zůstala

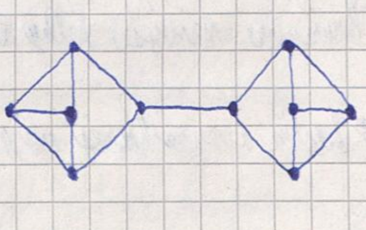
* Pro lib. $k \in \mathbb{N}_0$ dejte příklad grafu G takovou, že $k(G)=1$ a $k'(G)=k$.

pro $k \ge 1$



pro $k=0$ to neexistuje

* DÚ. dejte příklad 3-regulárního grafu, který obsahuje most



$\boxed{8.\ \text{PŘ.}}$

- Hamiltonovská kružnice = kružnice délky $|V|$
- Hamiltonovský graf = obsahuje takovou kružnici
- hamiltonovskost grafu je NP-úplný problém
  - nutná podmínka: G je ham. $\Longrightarrow \forall S \subseteq V, S \neq \emptyset$, počet komponent grafu $G \setminus S$ je nejvýše $|S|$

- Věta: G graf, $u, v \in V$, $d(u) + d(v) \geq |V|$, $uv \notin E$

  Potom G je ham. $\Longleftrightarrow$ $G + uv$ je ham.

- důkaz: "$\Longrightarrow$" zřejmý

  "$\Longleftarrow$" předp., že $u \to v \to v_3 \xrightarrow{*} v_n \to u$ je ham. kružnice

  Dívejme se na hrany $v_i v_{i+1}$ pro $i = 3, \dots, n-1$. Těch je $n-3$.

  Do vrcholů v_i vede z u aspoň $d(u)-1$ hran

  Do vrcholů v_{i+1} vede z v aspoň $d(v)-1$ hran

  Protože $d(u)-1+d(v)-1 > n-3$, tak existuje $i \in \{3, \dots, n-1\}$ takové, že $uv_i \in E$, $vv_{i+1} \in E$

  $$u \to v \to v_3 \xrightarrow{*} v_i \to v_{i+1} \xrightarrow{*} v_n \to u$$

  ham. kružnice

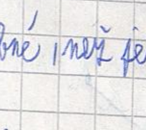
  Tímto způsobem můžeme získat "uzávěr" grafu, tj. přidáváme hrany mezi vrcholy, jejichž součet stupňů $\geq |V|$

  $\Downarrow$ graf je ham. $\Longleftrightarrow$ jeho uzávěr je ham.

~~Problémy~~

- Problém obchodního cestujícího:
  - ohodnocené grafy
  - úkol: najděte ham. kružnici nejmenší váhy
  - neexistuje polynomiální algoritmus na aproximaci
  - spec. případ: Úplný graf a váha je metrika (splňuje $\triangle$ nerovnost)

    Stále NP-úplný, ale lze v P aproximovat
- algoritmus pro ohodnocený graf, který dává ham. kružnici nejvýše délky dvojnásobné, než je nejlepší ham. kružnice
  1) najdi min. kostru
  2) procházej graf po této kostře a vynechávej už navštívené vrcholy
- Christofidův algoritmus
- párování (matching) v G je $M \subseteq E$ taková, že žádné 2 hrany v M nemají spol. vrchol
- perfektní párování $|M| = \frac{|V|}{2}$
- vrcholové pokrytí je $X \subseteq V$ takové, že $\forall e \in E: X \cap e \neq \emptyset$



Je-li X vrcholové pokrytí, tak žádné párování nemůže být větší než $|X|$

~~Pro~~ $T \subseteq U$ def.

$G = (U \cup W, E)$ bipartitní graf

Pro $T \subseteq U$ def. $N(T) = \{ w \in W \mid \exists u \in T : uw \in E \}$ (obraz podmnožiny v bin. relaci)

- věta: Největší párování v bipartitním grafu $G = (U \cup W, E)$ má velikost rovnu nejmenší velikosti vrcholového pokrytí, to je $\min_{T \subseteq U} (|U| - |T| + |N(T)|)$

- důsledek: v bipartitním grafu existuje perfektní párování $\Longleftrightarrow$ $|U| = |W|$ a $\forall T \subseteq U : |T| \leq |N(T)|$

jiná formulace důsledku (téměř

$(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ konečné množiny)

Transversála (výběr různých reprezentantů) pro tyto množiny je injektivní zobrazení

$\tau : \{1, \ldots, m\} \to A_1 \cup \ldots \cup A_m$ taková, že $\forall i \; \tau(i) \in A_i$

lze reprezentovat bipartitním grafem $U = \{1, \ldots, m\}$, $W = A_1 \cup \ldots \cup A_m$

$(i, a) \in E \Longleftrightarrow a \in A_i$

transversála pro množiny $A_1, \ldots, A_m$ existuje $\Longleftrightarrow$ $\forall I \subseteq \{1, \ldots, m\} : \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$

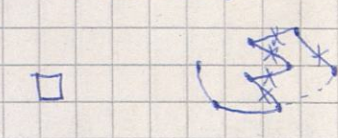
- důkaz: def. orient. graf $G' = (U \cup W \cup \{s, t\}, E')$, $E' = \{(s,u) \mid u \in U\} \cup \{(w,t) \mid w \in W\} \cup E$,

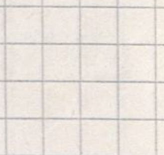
maximální velikost párování v G = největší počet nezávislých cest z s do t =

= nejmenší velikost množiny $A \subseteq U \cup W$ taková, že neexistuje cesta z s do t

Mengerova věta

v $G' \setminus A$ = nejm. velikost vrcholového pokrytí v G





□

⇓

problém nalezení největšího párování lze řešit pomocí toků v sítích

⇓

lib. párování je největší $\Longleftrightarrow$ neexistuje taková střídavá cesta

- věta: ~~Párování~~ Párování M v grafu (V, E) je největší $\Longleftrightarrow$ neexistuje cesta $v_0, v_1, \ldots, v_{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $v_{2i+1} v_{2i+2} \in M$

pro $i = 0, \ldots, k-1$ a vrcholy v_0 a v_{2k+1} nepatří do žádné hrany M (tj. $v_{2i} v_{2i+1} \in M$)

- důkaz: "$\Longrightarrow$" existuje-li nějaká cesta, pak ji použijem pro zlepšení párování

"$\Longleftarrow$" kdyby M nebylo největší, nechť N je nějaké větší. Uvažme graf $(V, M \triangle N)$. V tomto grafu má každý vrchol stupeň nejvýše 2. V takovém grafu je každá komponenta cyklus nebo cesta, přičemž hrany z M a N se pravidelně střídají.

Protože $|N| > |M|$, tak některá komponenta je cesta začínající i končící hranou z N. A to je zlepš. cesta □

8. CV.

chyběl jsem

9. PŘ.

– **věta**: Velikost největšího párování v obyčejném grafu $G=(V,E)$ je  G

$$\min_{S\subseteq V} \frac{|V|+|S|-odd(G\setminus S)}{2},$$ kde $odd(G\setminus S)$ je počet komponent grafu $G\setminus S$ s lichým počtem vrcholů

– **důkaz**: BÚNO G je souvislý. Označme $m(G)$ velikost největšího párování v G.

$$\forall S\subseteq V:\ m(G) \leq |S| + m(G\setminus S) \leq |S| + \frac{|V\setminus S| - odd(G\setminus S)}{2} = \frac{|V|+|S|-odd(G\setminus S)}{2}$$

Indukcí vzhledem k $|V|$ dokážeme, že pro nějakou množinu S nastává rovnost.
Ind. předp. je, že pro všechny grafy s menším počtem vrcholů takové S existuje

2 případy: 1) Existuje vrchol $v\in V$, který je incidentní s nějakou hranou každého maximálního párování.

$m(G\setminus v) = m(G) - 1$

Uvažme množinu S pro graf $G\setminus v$.

$$m(G) = m(G\setminus v)+1 = \frac{|V\setminus\{v\}|+|S|-odd((G\setminus v)\setminus S)}{2}+1 = \frac{|V|+|S\cup\{v\}|-odd(G\setminus(S\cup\{v\}))}{2}$$

2) pro každý vrchol existuje největší párování, které jej nepoužívá.

Dokážeme, že $m(G)=\frac{|V|-1}{2} = \frac{|V|+|\emptyset|-odd(G\setminus\emptyset)}{2}$

Chceme ukázat, že existuje párování, které používá všechny vrcholy až na jeden.

Sporem: předp., že každé párování se vyhýbá aspoň 2 vrcholům.

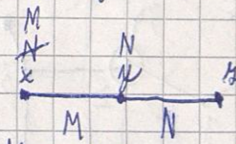
M největší párování, u,v jsou nepoužívané vrcholy takové, že $d(u,v)$ je nejmenší možná (přes všechny volby M,u,v)

Kdyby $d(u,v)=1$, tak je můžeme spárovat, to je spor s maximalitou M.

Takže $d(u,v)\geq 2$. Buď w lib. vnitřní vrchol nejkratší cesty z u do v.

Podle předpokladu existuje největší párování N, které nepoužívá w. Zvolíme takové N, aby průnik $M\cap N$ byl co největší. $d(u,w)<d(u,v)$, $d(v,w)<d(u,v)$

Tedy díky volbě M, u, v N používá u i v. Protože obě párování M a N jsou největší, tak existuje vrchol $x \neq v$ takový, že x je použito M a není použito N. Potom existuje $z \in V$ takový, že $yz \in N$, jinak



bychom mohli xy přidat do N. Pak $N \cup \{xy\} \setminus \{yz\}$ je největší párování nepoužívající v a přitom má větší průnik s M než N s M. Spor. □

- **Tutteho věta**: Graf $G=(V,E)$ má perfektní párování $\iff \forall S \subseteq V: |S| \geq odd(G \setminus S)$
  - **důkaz**:

$$\frac{|V|+|S|-odd(G\setminus S)}{2} \geq \frac{|V|}{2}$$

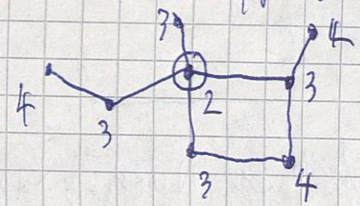
$$|S| \geq odd(G \setminus S)$$ □

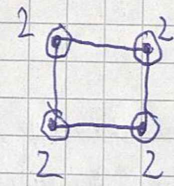
- Hledání největšího párování v obecném grafu: polynomiální algoritmus, Edmonds 1965, není třeba znát
- **strom** – mezi každými 2 vrcholy existuje právě 1 cesta.
- **list** – vrchol stupně 1
- **tvrzení**: každý strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 listy.
  - **důkaz**: jsou to koncové vrcholy nejdelší cesty
- **tvrzení**: pro obyčejný graf $G=(V,E)$ je ekvivalentní:
  1) G je strom
  2) G je souvislý a $|E|=|V|-1$
  3) G je souvislý a neobsahuje kružnici
  4) G je souvislý a každá jeho hrana je most.
  5) $|E|=|V|-1$ a neobsahuje kružnici DÚ
  - **důkaz**: $1 \iff 3 \iff 4$ zřejmé

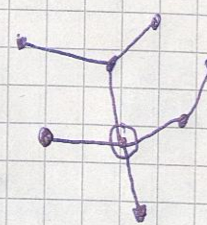
    $1 \Rightarrow 2$: indukcí podle $|V|$; bázový krok triv., nechť v je lib. list, podle ind. předpokladu $G \setminus v$ má $|V\setminus\{v\}|-1 = |E|-1$ hran.

    $2 \Rightarrow 3$: Indukcí k $|V|$ dokážeme, že neobsahuje kružnici. Kdyby všechny vrcholy měli stupeň aspoň 2, tak $|E| \geq \frac{2|V|}{2} = |V|$, spor. Tedy existuje list v. Pak $G \setminus v$ také splňuje 2, tedy $G \setminus v$ neobsahuje kružnici, tedy G neobsahuje kružnici.

- pro graf $G=(V,E)$ a vrchol $v \in V$ se největší vzdálenost v od nějakého vrcholu G nazývá **výstřednost** v.
- **střed** grafu G označme $C(G)$, je to množina všech vrcholů, které mají nejmenší výstřednost







- **tvrzení**: Je-li G strom, pak $|C(G)| \le 2$, a pokud $C(G)=\{u,v\}$, $u \neq v$, pak $uv \in E$.
  - **důkaz**: Indukcí vzhledem k $|V|$. Bázový krok $|V|=1,2$, předp. $|V| \ge 3$. Pak existuje aspoň jeden vrchol stupně aspoň 2. Nechť U je množina všech listů. Výstřednost každého vrcholu ze ~~stromu~~ $G \setminus U$ je právě o 1 menší než jeho výstřednost v G (protože koncové vrcholy maximální cesty jsou listy). Zbývá ověřit, že žádný list nemůže být v $C(G)$. Je-li u soused v, tak jeho výstřednost je o 1 menší. □
- to lze využít k rozhodování izomorfismu stromů v polyn. čase

(()(()()))

- **věta** (Cayleyho formule): Počet stromů na dané n-prvkové množině vrcholů je n^{n-2}. Není to až na izomorfismus
  - **důkaz**: pomocí Prüferova kódu:

    $V=\{1,\dots,n\}$, $n \ge 3$.

    Každému stromu s množinou vrcholů přiřadíme posloupnost $n-2$ čísel z množiny $\{1,\dots,n\}$.

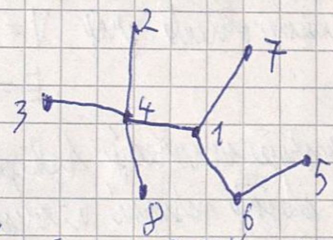
    l_{i+1} := nejmenší číslo listu v grafu $G \setminus \{l_1,\dots,l_i\}$

    v_{i+1} := soused l_{i+1} v grafu $G \setminus \{l_1,\dots,l_i\}$ $\quad i=0,\dots,n-3$

    $G \setminus \{l_1,\dots,l_i\}$ je strom.

    $G \setminus \{l_1,\dots,l_{n-2}\} \cong K_2$

Průferův kód je $(v_1, \dots, v_{n-2})$. Ukážeme, že každá posloupnost ~~(v1...v)~~
$(v_1, \dots, v_{n-2}) \in \{1, \dots, n\}^{n-2}$ je Průferovým kódem právě 1 strom.



$(4,4,6,1,1,4)$

Listy jsou právě vrcholy, které nejsou v Průferově kódu, ~~pro~~ protože:
1) Do Průferova kódu nedáváme listy, a listy zůstávají listy
2) Aby se mohl nějaký vrchol stát listem, musí být nejprve zapsán do kódu, na konci jsou jenom listy

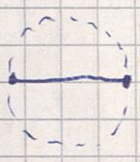
V prvním kroku byl tedy odebrán vrchol s nejmenším číslem, který není v kódu. Ten byl spojen s prvním číslem v kódu. Zkrácením kódu o první číslo získáme Průferův kód grafu $G \setminus \{l_1\}, \dots$ □

$\boxed{\text{4. CV.}}$

* Dokažte, že každý 2-souvislý graf, který není izomorfní C_n, obsahuje kružnici sudé délky.

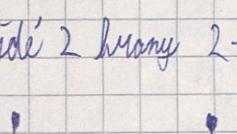
- zřejmě obsahuje nějakou kružnici, předp. že je liché délky

(i) navíc obsahuje graf nějakou hranu mezi vrcholy této kružnice, pak aspoň jedna ze vzniklých kružnic má sudou délku



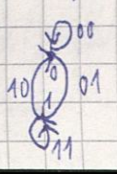
(ii) navíc obsahuje nějaký vrchol v. Potom existují 2 nezávislé cesty do vrcholů té kružnice. Jejich začátky po 1. vrchol na kružnici tvoří nezávislé cesty, které nepoužívají vrcholy kružnice. Dostáváme cestu mezi 2 vrcholy kružnice, která nepoužívá vrcholy této kružnice. Dál stejně jako v (i) □

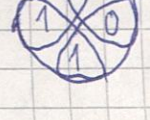
* Dokažte, že každé 2 hrany 2-souvislého grafu leží na stejné kružnici



rozdělíme obě hrany přidáním nového vrcholu. 2-souvislost se neporuší a nové vrcholy leží na společné kružnici

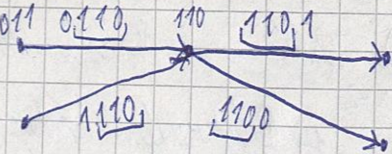
* Dokažte, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ existuje cyklická posloupnost délky 2^k číslic 0 a 1 taková, že žádné 2 ~~k~~ k-tice po sobě jdoucích číslic nejsou stejné





$k=4$

pro $k = 4$:

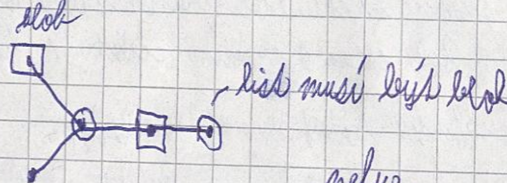


definujme orient. graf $V = \{0,1\}^{k-1}$

$E = \{(a_1 \ldots a_{k-1}, a_2 \ldots a_{k-1} a_k) \mid a_1 \ldots a_k \in \{0,1\}\}$

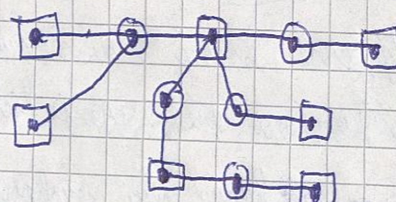
Obsahuje uzavřený tah, přes všechny hrany, protože každý vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň 2 a je souvislý

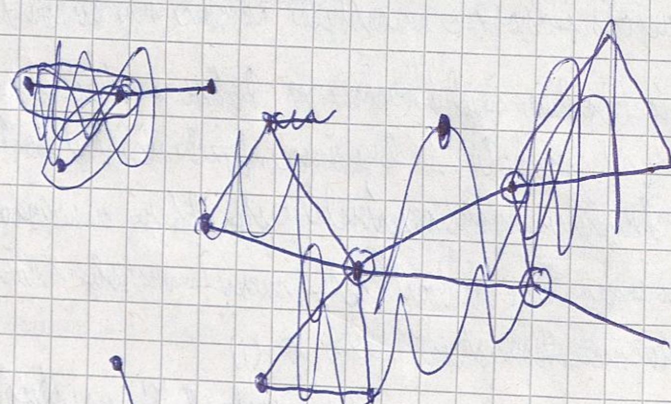
* nakreslete graf, který má blokový strom

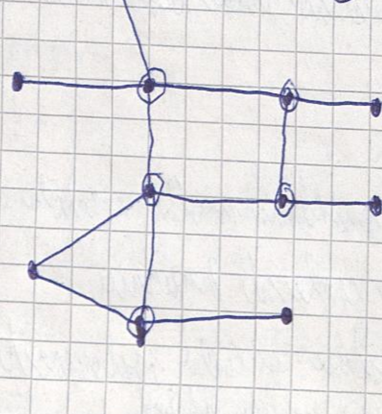


nelze

* —11—



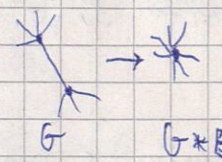




10. PŘ

- <u>kostra</u> (spanning tree) souvislého grafu $G=(V,E)$ je jeho podgraf (V,F) na všech vrcholech, který je stromem
- K_n má n^{n-2} koster
- počítání počtu koster: $e \in E$, $\#_{koster}(G) = \#_{koster}(G \setminus e) + \#_{koster}(G * e)$

  $G * E$ je multigraf vzniklý stažením hrany e



- <u>minimální kostra</u> (V,F) ohodnoceného grafu $G=(V,E,w)$ je kostra s nejmenší hodnotou $w(F)$
- min. kostru lze hledat hladovým algoritmem
- <u>Kruskalův algoritmus</u>: $E_0 := \emptyset$

  E_{i+1} získáme z E_i přidáním nějaké hrany $u_{i+1}v_{i+1}$ s nejmenší váhou mezi hranami spojující různé komponenty grafu (V,E_i).

  Tvrdíme, že $(V,E_{|V|-1})$ je min. kostra.

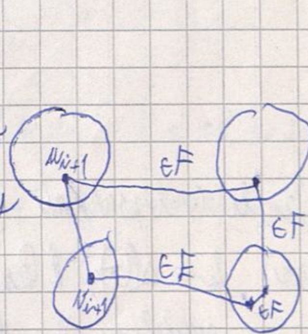
  - důkaz: (V,E_i) je les (acyklický). $(V,E_{|V|-1})$ má $|V|-1$ hran, tedy je to strom a tedy je to kostra.

    Indukcí ukážeme, že $E_i \subseteq F$ pro nějakou min. kostru (V,F).

    báze: $\emptyset \subseteq F$

    předp. že $E_i \subseteq F$, (V,F) min kostra.

    1) pokud $u_{i+1}v_{i+1} \in F$, tak jsme hotovy
    2) pokud $u_{i+1}v_{i+1} \notin F$, najdeme jednoznačnou cestu z u_{i+1} v_{i+1} používající pouze hrany z F. Na této cestě leží nějaká hrana e spojující různé komponenty (V,E_i).



    Nahrazením e hranou $u_{i+1}v_{i+1}$ v F dostaneme F' takové, že (V,F') je min. kostra (V,E) obsahující $E_i \cup \{u_{i+1}v_{i+1}\}$. ($w(e) \geq w(u_{i+1}v_{i+1})$ díky volbě $u_{i+1}v_{i+1}$)

    □

- jiné hladové algoritmy:
  - Prim (Jarník): zvětšuje 1 komponentu
  - Borůvka: zvětšuje všechny komponenty naráz
  - odebíráním nejhorších hran

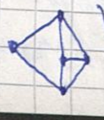
- <u>hranové obarvení</u> grafu $G=(V,E)$ k barvami (hranové k-obarvení) je zobrazení $\alpha: E \to \{1,\dots,k\}$
- <u>řádné hranové obarvení</u> je takové, že hrany, které mají společný vrchol, jsou obarveny různě
- ~~hranové chromatické~~ $\forall e,f \in E: e \cap f \neq \emptyset \wedge \alpha(e)=\alpha(f) \Rightarrow e=f$
- <u>hranové chromatické číslo</u> $\chi'(G)$ grafu G je nejmenší k takové, že existuje řádné k-obarvení
- obarvení je řádné $\Leftrightarrow$ hrany obarvené stejnou barvou tvoří párování
- zřejmě $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

  $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$

- označme $c_\alpha(v)$, pro α obarvení a v vrchol, počet různých barev hran incidentních s v.
- α je řádné $\Leftrightarrow \forall v \in V: c_\alpha(v)=d(v)$.
- k pevné. k-obarvení α je <u>optimální</u>, jestliže $\sum_{v\in V} c_\alpha(v)$ je maximální mezi všemi k-obarveními
- <u>lemma</u>: Nechť $G=(V,E)$ je souvislý a není izomorfní cyklu liché délky. Potom existuje 2-obarvení β takové, že každý vrchol stupně aspoň 2 je incidentní s hranami obou barev.
  - důkaz: Zkonstruujeme ~~A~~ eul. tah a hrany ohodnotíme 1, 2.
    1) Eul. graf se sudým počtem hran: libovolný tah
    2) Eul. graf s lichým počtem hran: existuje vrchol stupně aspoň 4 (protože je to kružnice), začneme v něm
    3) obsahuje vrchol lichého stupně: přidáme nový vrchol, spojíme s vrcholy lichých stupňů, a začneme v něm

- <u>věta</u>: Je-li G bipartitní, pak $\chi'(G)=\Delta(G)$
  - důkaz: $k=\Delta(G)$. ~~A~~ Buď α optimální k-obarvení G. Předp., že není řádné. Potom existuje vrchol $v \in V$ a barvy i,j takové, že i je na hranách vedoucích z v použitá vícekrát a j ani jednou.

    $F := \{e \in E \mid \alpha(e) \in \{i,j\}\}$. Pro podgraf (V,F) existuje obarvení barvami i,j takové, že všechny vrcholy stupně aspoň 2 mají hrany ohodnocené dvěma barvami. Přebarvím α podle tohoto obarvení, dostanu obarvení β. Pak $c_\beta(v) > c_\alpha(v)$ a $\forall u \in V: c_\beta(u) \geq c_\alpha(u)$ $\square$

$\chi'(\triangle)=3$ χ'() $=4$

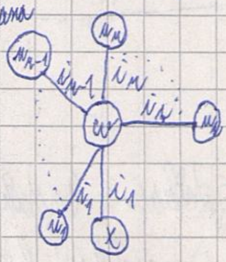
– věta (Vizingova): $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$

– důkaz: $k := \Delta(G)+1$, c optimální k-obarvení a předp., že není řádné. Pro každý vrchol v ~~existuje~~ existuje nějaká barva $b(v)$ nepoužitá na hranách vycházejících z v.

Existuje $w \in V$ taková, že barva i_1 je použita aspoň na 2 hranách vedoucích z w: $c(wx) = c(wu_1) = i_1$.

Postupně najdeme vrcholy $u_1, u_2, \dots$ a barvy $i_1, i_2, \dots$ takové, že $c(wu_j) = i_j$ a $i_{j+1} = b(u_j)$.

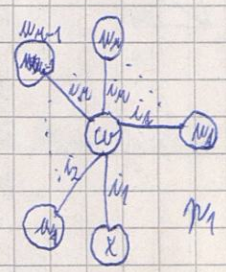
Takové vrcholy u_j existují, protože kdyby z w nevedla hrana ohodnocená $b(u_j)$, tak lze c vylepšit přebarvením hran wu_l na i_{l+1} pro $l = 1, \dots, j$.



Nechť $s \in \mathbb{N}$ je nejmenší splňující $i_{s+1} = i_r$ pro $r < s$.

Pro $j = 1, \dots, r-1$ přebarvíme wu_j barvou i_{j+1}. Získáme obarvení c_1.

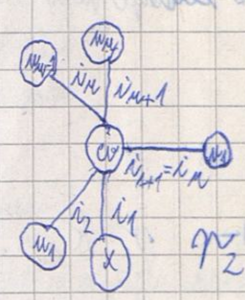
Pro $j = 1, \dots, s$ přebarvíme wu_j barvou i_{j+1}. Získáme obarvení c_2.



c_1 a c_2 jsou optimální.

$F_i = \{e \in E \mid c_i(e) \in \{b(w), i_r\}\}$ pro $i = 1, 2$.

Komponenta (V, F_i) obsahující vrchol w není lichá kružnice alespoň pro jedno $i \in \{1, 2\}$. Řekněme pro $i = 1$, potom přebarvíme komponentu podgrafu (V, F_i) barvami $b(w)$ a i_r podle lemmatu, spor.



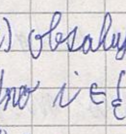
□

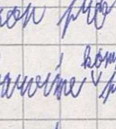
– i-monochromatický podgraf – všechny jeho hrany jsou obarvené barvou i.

– Ramseyho věta pro 2 barvy: Pro libovolná $p, q \in \mathbb{N}$ existuje $R \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \ge R$ a pro každé hranové 2-obarvení grafu K_n obsahuje 1-monochromatický podgraf K_p nebo 2-monochromatický podgraf K_q.

– nejmenší takové R se značí $R(p,q)$ a nazývá se Ramseyho číslo

– příklad: $R(3,3) = 6$





hodnota $R(5,5)$ je otevřený problém

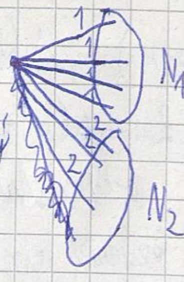
– důkaz: Indukcí dle $p+q$. Ukážeme $R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1) = n$

c libovolné 2-obarvení K_n. v libovolný vrchol.

$N_i = \{w \in V \setminus \{v\} \mid c(vw) = i\}$

Pak $|N_1| \geq R(r-1,q)$ nebo $|N_2| \geq R(r,q-1)$

BÚNO: $|N_1| \geq R(r-1,q)$. Pak N_1 obsahuje 1-monochromatický K_{r-1} nebo $\underbrace{\text{2-monochromatický } K_q.}_{\text{OK}}$



přidáme v a máme 1-monochromatický K_r. □

- Ramseyho věta pro k barev: Dáno $q_i \in \mathbb{N}$, pro $i = 1, \dots, k$. Potom existuje $R \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq R$ každé hranové k-obarvení K_n obsahuje i-monochrom. podgraf K_{q_i} pro nějaké i.
  - důkaz: Indukcí podle k: základní krok: $k=2$
  - indukční krok: Vezmeme $R(q_1, q_2, \dots, q_k) \leq R(q_1, \dots, q_{k-2}, R(q_{k-1}, q_k))$

    c k-obarvení K_n.

    Pak podle ind. předpokladu existuje i-monochromatický podgraf K_{q_i} pro nějaké $i \leq k-2$ nebo podgraf $K_{R(q_{k-1}, q_k)}$ obarvený pouze $k-1$ a k, a tedy

    k-1-monochrom. $K_{q_{k-1}}$ nebo k-monochrom. K_{q_k}.

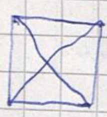
$\boxed{10. CV.}$

* Kolik existuje perfektních párování v $K_{m,n}$? 0 pro $m \neq n$

$n!$ pro $m = n$

* -||- v K_n?

0 pro n liché



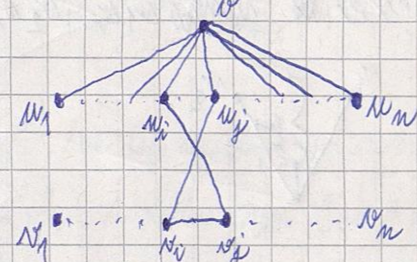
pro n sudé: $\dfrac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \dfrac{n!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}$

$\boxed{11. PŘ.}$

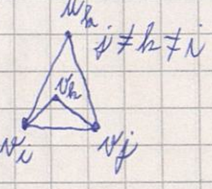
- k-obarvení grafu $G = (V, E)$ je zobrazení $c: V \to \{1, \dots, k\}$
- řádné k-obarvení: $\forall u, v \in V: uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$
- G je k-obarvitelný = existuje řádné k-obarvení
- chromatické číslo $\chi(G) = \min\{k \mid \exists \text{ řádné } k\text{-obarvení } G\}$
- řádné k-obarvení = rozklad $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ takový, že $\forall i\ \forall u, v \in V_i: uv \notin E$
- 2-obarvitelný = bipartitní
- 3-obarvitelnost je NP-úplný problém

- $\chi(K_n) = n$
- i grafy neobsahující K_3 mohou mít lib. velké číslo chromatické číslo
  - indukcí: předp. $\chi((\{v_1,\dots,v_n\},E)) = k$

    Přidáme vrcholy $w_1,\dots,w_n, v$ a položíme $E' = E \cup \{vw_i \mid i=1,\dots,n\} \cup \{w_iv_j \mid v_iv_j \in E\}$



Pokud původní graf neobsahoval Δ, tak nový graf neobsahuje Δ.



Nový graf lze ~~obb~~ obarvit $k+1$ barvami. Dokážeme, že k barev nestačí.

Předp., že c je řádné k-obarvení nového grafu.

Předp., že $c(v) = k$. Potom $c(w_i) \in \{1,\dots,k-1\}\ \forall i$.

Přebarvíme všechna v_i taková, že $c(v_i) = k$ barvou $c(w_i)$.

Potom dostaneme řádné $(k-1)$-obarvení původního grafu, spor.

- Pro ~~každý~~ každý graf G platí $\chi(G) \le \Delta(G)+1$ (zřejmé z hladové)
- Brooksova věta: Buď G souvislý. Pak $\chi(G) = \Delta(G)+1 \iff G = K_n$ nebo G je lichá kružnice

+ ~~důkaz~~
  - důkaz: "$\Leftarrow$" zřejmý

    "$\Rightarrow$" pro kružnici to zřejmě platí

    Ukážeme indukcí, že všechny ostatní grafy (tedy ne K_n, C_n) jde obarvit $\Delta(G)$ barvami.

    Předp., že platí pro všechny grafy s menším počtem vrcholů než G.

    Pozorování: Libovolný vlastní indukovaný podgraf H jde obarvit $\Delta(G)$ barvami.

    Pokud je podgraf různý od K_n, C_n, tak to platí z ind. předp.

    Pokud je podgraf K_n nebo C_n, tak $\Delta(H) < \Delta(G)$ a H jde obarvit $\Delta(H)+1$ barvami

    toto plyne z regularity K_n, C_n a souvislosti G.

    Kdyby G nebyl regulární, nechť w má stupeň menší než ΔG.

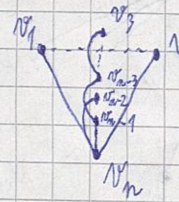
    $G \setminus \{w\}$ obarvíme $\Delta(G)$ barvami a w dobarvíme.

Kdyby G nebyl 2-souvislý, obarvíme každý ~~bod~~ zvlášť ~~a~~ blok zvlášť a zesynchronizujeme v bodech artikulace.

Zbývá se vypořádat s G neúplným, regulárním, 2-souvislý a $\Delta(G)\geq 3$.

$n=|V|$

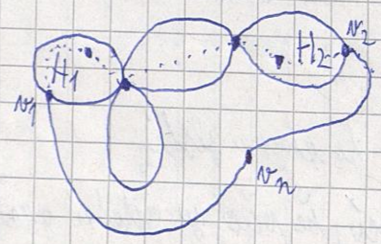
1) G je 3-souvislý. Nejprve seřadíme vrcholy: G není úplný $\Rightarrow$ existují vrcholy v_1, v_2, v_n takové, že ~~v_1v_2~~ $v_1v_n, v_2v_n \in E$ a $v_1v_2 \notin E$.



Ze 3-souvislosti plyne, že $G\setminus\{v_1,v_2\}$ je souvislý. Tedy můžeme vypsat jeho vrcholy v pořadí $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_3$ tak, že v_i je spojen hranou s některými z vrcholů $v_n,\dots,v_{i+1}$ pro $i=n-1,\dots,3$. v_1,v_2 dostanou stejnou barvu. Ostatní obarvím hladově v pořadí $v_3,\dots,v_n$. ($v_3,\dots,v_{n-1}$, protože ~~[illegible]~~ nemají obarveného jednoho souseda, v_n, protože má 2 sousedy obarvené stejnou barvou)

2) G není 3-souvislý. v_n takové, že $G\setminus\{v_n\}$ není 2-souvislý. Nechť H_1,H_2 jsou 2 bloky $G\setminus\{v_n\}$, které tvoří listy blokového stromu.

G je 2-souvislý $\Rightarrow \exists\, v_1\in H_1, v_2\in H_2$ takové, že $v_1v_n\in E$, $v_2v_n\in E$, v_1,v_2 nejsou ~~v~~ body artikulace.



$G\setminus\{v_1,v_2,v_n\}$ je souvislý. Protože $d(v_n)\geq 3$, existuje $v_{n-1}\in V\setminus\{v_1,v_2\}$ takové, že $v_{n-1}v_n\in E$. Potom $v_{n-2},\dots,v_3$ najdeme stejně jako v 1) a vše obarvíme stejně jako v 1)

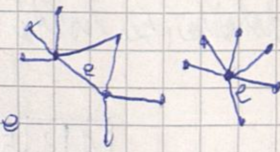
□

~~+ počet řádných $\chi_G(k)$ = po~~

- $\chi_G(k)$ = počet řádných k-obarvení G. $\chi_G: \mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$
- $\chi(G) = \min\{k \mid \chi_G(k)\neq 0\}$

~~+ [illegible]~~

- <u>Lemma</u>: $e = uv$ hrana v G $\Rightarrow \chi_G(k) = \chi_{G\setminus e}(k) - \chi_{\underbrace{G*e}_{\text{stažení hrany } e}}(k)$



- <u>důkaz</u>: řádné k-obarvení grafu $G\setminus e$:

  1) $c(u) = c(v)$ ... je to v podstatě řádné obarvení $G*e$.

  2) $c(u) \neq c(v)$ ... je to řádné obarvení grafu G.

  Tedy $\chi_{G\setminus e}(k) = \chi_{G*e}(k) + \chi_G(k)$ □

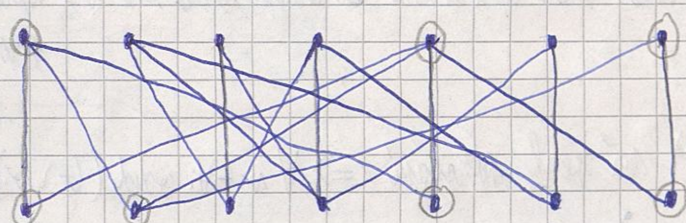
- <u>Věta</u>: Pro libovolný graf G lze χ_G vyjádřit polynomem, a to jednoznačně.
  - <u>důkaz</u>: indukcí vzhledem k počtu hran. Pokud $E = \emptyset$, tak $\chi_G(k) = k^{|V|}$.

    Indukční krok je předchozí lemma.

- χ_G se nazývá chromatický polynom grafu G

$\boxed{\text{11. CV.}}$

* nalezněte největší párování v grafu



* dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf má perf. párování

$V = U \cup W$

$|U| = |W|$

$k \cdot |U| = k \cdot |W|$

$|U| = |W|$

$S \subseteq U$, $\underbrace{N(S)}_{\text{množina sousedů}} \subseteq W$

~~N(S)~~ chceme dokázat $|N(S)| \geq |S|$

~~z S vede k · |S| hran~~

$\underbrace{k \cdot |S|}_{\text{hrany z } S} \leq k \cdot |N(S)|$

hrany z S $\subseteq$ hrany z $N(S)$ □

2. důkaz: $\chi'(G) = \Delta(G) = k$ □

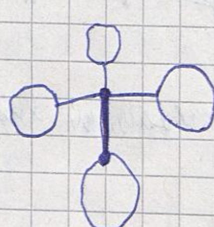
* dokažte, že každý latinský $m \times n$-obdélník lze rozšířit na latinský $n \times n$-čtverec
$m < n$

1	3	5	2	4	7	6
2	1	3	4	7	6	5

každý řádek v obdélníku udává 1 párování v úplném bipartitním grafu.
latinský = párování odpovídající různým řádkům nepoužívají stejnou hranu.
Tedy hledáme $(n-m)$-obarvení $(n-m)$-regulárního bipartitního grafu. □
jde to řešit i pomocí transversál

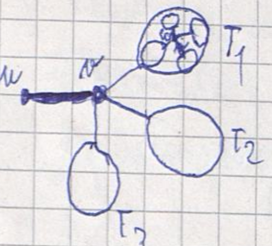
* Dokažte, že každý strom má nejvýše 1 perf. párování
indukcí: u list musí být spárován se svým sousedem v. Aplikujeme ind. předpoklad pro $G \setminus \{u,v\}$ □
pro všechny lesy

* Dokažte, že strom $G=(V,E)$ má perf. párování $\iff \forall v \in V: odd(G \setminus v) = 1$.



"$\Rightarrow$" zřejmé

"$\Leftarrow$" Indukcí vzhledem k počtu vrcholů: u list, v jeho soused, uv dáme do párování



Musíme ukázat, že každá komponenta T_i grafu $G \setminus \{u,v\}$ splňuje předpoklady.
$w \in T_i$, všechny komponenty $T_i \setminus \{w\}$ jsou stejné jako komponenty $G \setminus \{w\}$, s výjimkou jedné.
Protože lichá komponenta $G \setminus \{v\}$ je $\{u\}$, tak vrcholů $G \setminus T_i$ je sudý počet, takže parita té jediné změněné komponenty se nezmění □

* G graf vzniklý z K_n odebráním jedné hrany.
Dokažte, že G má $(n-2)n^{n-3}$ koster.

Budeme počítat ty kostry K_n, které odebranou hranu obsahují.
Spočítame $\underbrace{\text{kostrohrany}}_{\text{dvojice kostra a hrana}}$ v K_n.

n^{n-2} = počet koster

$n-1$ = počet hran v kostře

$\binom{n}{2}$ = počet hran

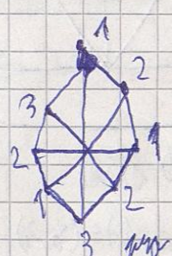
x = počet koster používajících danou hranu

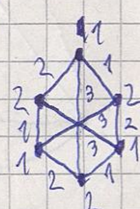
$$n^{n-2}(n-1) = x \cdot \binom{n}{2}$$

$$x = 2n^{n-3}$$

Tedy hledané číslo je $n^{n-2} - 2 \cdot n^{n-3} = n^{n-3}(n-2)$ □

* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, G je graf vzniklý přidáním hran mezi protilehlými vrcholy v C_{2n}.
Určete $\chi(G)$ a $\chi'(G)$





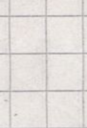
$$\chi(G) = \begin{cases} 2, & n \text{ liché} \\ 3, & n \text{ sudé} > 2 \\ 4, & n = 2 \end{cases}$$

pro 2 to nejde kvůli liché kružnici

$$\chi'(G) = 3$$

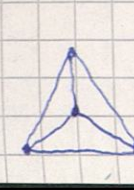
12. PŘ

- rovinný graf – lze jej nakreslit v rovině tak, aby se hrany neprotínaly
- příklad: $K_{2,n}$ je rovinný
- nakreslení grafu rozdělí rovinu na několik oblastí, které se nazývají stěny



3 stěny   stěna 2 má 8 vrcholů (most hrana je 2×)

- přitom je vždy právě 1 stěna neomezená (vnější)
- Je-li hrana most, pak má na obou stranách tutéž stěnu
- není-li hrana most, sousedí s právě 2 stěnami
- nakreslení má právě 1 stěnu ⟺ graf je les
- Je-li G 2-souvislý, pak je každá stěna nakreslení určena nějakou kružnicí



K_4

- příklad: K_5 není rovinný
- tvrzení (Eulerův vztah): pro libovolné nakreslení souvislého grafu $G=(V,E)$ v rovině platí

$$|V|-|E|+s=2,$$ kde s je počet stěn.

pro libovolný graf platí

$$|V|-|E|+s=1+\#_{\text{počet komponent}}$$

- důkaz: indukcí vzhledem k $|E|$:

  základní krok: pro stromy $|E|=|V|-1$ a $s=1$.

  indukční krok: e hrana na kružnici, podle ind. předpokladu $|V_{G\setminus e}|-|E_{G\setminus e}|+s_{G\setminus e}=2$

  a navíc $|V|=|V_{G\setminus e}|$, $|E_{G\setminus e}|=|E|-1$, $s_{G\setminus e}=s-1$ □

- věta: Nechť G je rovinné nakreslení souvislého d-regulárního grafu ($d\geq 3$), kde každá stěna má stejně vrcholů. Potom G je izomorfní jednomu z následujících grafů:

4-stěn

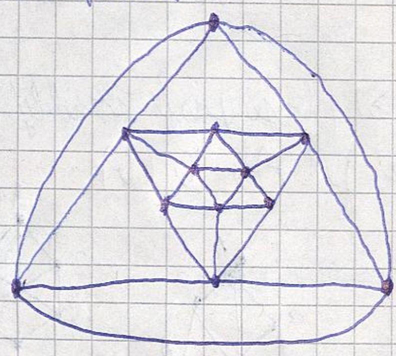
$(d,\ell)=(3,3)$

krychle

$(d,\ell)=(3,4)$

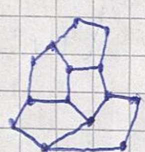
8-stěn

$(d,\ell)=(4,3)$



20-stěn

$(d,\ell)=(5,3)$



12-stěn

$(d,\ell)=(3,5)$

~~doma dokreslit~~

doma dokreslit

- důsledek: existuje pouze 5 typů platónských těles
  - důkaz věty: n počet vrcholů, m počet hran, s počet stěn, ℓ počet vrcholů (hran) jedné stěny

$$n\cdot d=2m=s\cdot\ell$$

$$n-m+s=2, \text{ tedy}$$

$$\frac{2m}{d}-m+\frac{2m}{\ell}=2$$

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\ell}=\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{\ell}=\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{\ell}>\frac{1}{2}$$

tedy $d<4$ nebo $\ell<4$, takže $d=3 \vee \ell=3$

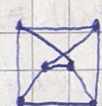
1) $d = 3$, tedy $\frac{1}{s} = \frac{1}{m} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{s} > \frac{1}{6}$, tedy $s \leq 5$

2) $s = 3 \Rightarrow d \leq 5$

$\square$

- <u>věta</u>: pro každý rovinný graf $G = (V, E)$ takový, že $|V| \geq 3$, platí $|E| \leq 3|V| - 6$.
  Je-li G maximální rovinný, potom nastává rovnost
- <u>důsledek</u>: K_5 není rovinný
  - důkaz věty: v libovolném nakreslení grafu lze dosáhnout toho, že každá stěna má právě 3 vrcholy.
    Pak $3 \cdot s = 2 \cdot |E|$. Tedy $3|V| - 3|E| + 3s = 6$
    $3 \cdot |V| - |E| = 6$. $\square$
- <u>důsledek</u>: v rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše 5.
  - důkaz: $|E| \geq \frac{6|V|}{2} = 3|V|$, spor.
- <u>věta</u>: G rovinný graf, $|V| \geq 3$, neobsahuje podgraf K_3. Pak $|E| \leq 2|V| - 4$
  - důkaz: $4 \cdot s \leq 2 \cdot |E|$
    $2|V| - 2|E| + 2s = 4 \leq 2|V| - |E|$
- <u>důsledek</u>: $K_{3,3}$ není rovinný
  - důkaz: $3 \cdot 3 > 2 \cdot 6 - 4$

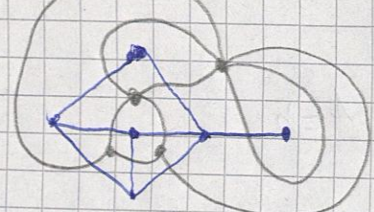


$K_{3,3}$

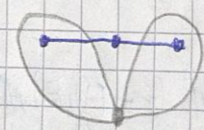
nemá vliv na rovinnost

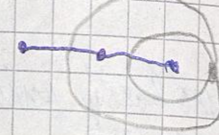
opakované dělení hran

- <u>Kuratowského věta</u>: graf je rovinný $\iff$ neobsahuje podgraf vzniklý dělením grafu K_5 nebo $K_{3,3}$
- <u>věta</u>: každý rovinný graf lze nakreslit tak, že hrany jsou úsečky
- idea důkazu Kuratowského věty:
  1) ukáže se pro 3-souvislé grafy indukcí vzhledem ke konstrukci grafu
     - pokud výsledný graf neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$, tak je neobsahují ani mezikroky během konstrukce
     - jeden krok konstrukce (dělení vrcholu) zachovává rovinnost grafu
  2) kdyby existoval protipříklad, pak existuje i (menší) 3-souvislý protipříklad
- <u>duální graf</u> – připouštíme smyčky a násobné hrany
  - G graf v rovině. Def. G^*: vrcholy G^* jsou stěny G
    místo hrany mezi 2 vrcholy bude hrana mezi stěnami, které
    tato hrana odděluje

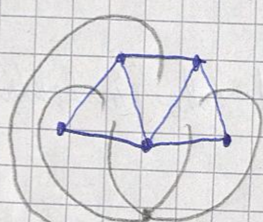


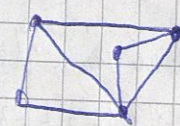
- G^* dostáváme v rovině nakreslený, ale ne přirozeně





- pro různá nakreslení téhož grafu mohou být duální grafy neizomorfní





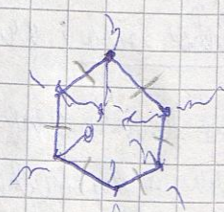
- G^* je souvislý (vzdycky)
- vrcholy G^* = stěny G
- počet hran G^* je stejný jako G

$$\underbrace{|V|}_{s_{G^*}} - |E| + \underbrace{s}_{|V_{G^*}|} = 2$$

- je-li G souvislý, pak pro G i G^* platí Eul. vztah $\Rightarrow$ počet stěn G^* je počet vrcholů G.
- v každé stěně G^* leží aspoň 1 vrchol G, pro G souvislý právě 1.
- G souvislý $\Rightarrow G^{**} \cong G$

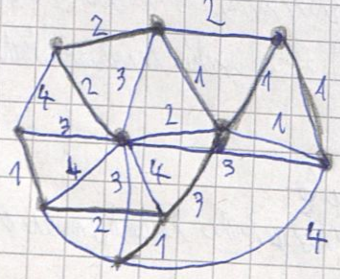
  ↑ už nakreslený v rovině
- kružnice v G odpovídají minimálním hranovým řezům v G^*.

<u>Stvrzení</u>



$\boxed{\text{12. CV.}}$

* určete počet min. koster grafu

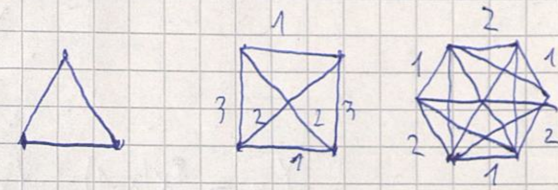


volba 2
↓
$3 \cdot 3 \cdot 3$
↑ volba 1 ↑ volba 3

* určete $\chi'(K_n)$

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Delta = n-1$$



tedy $\chi'(K_n) \in \{n-1, n\}$

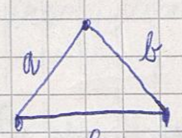
n liché $\longrightarrow$ největší ~~..~~ velikost párování je $\frac{n-1}{2}$. Tedy potřebujeme aspoň n barev

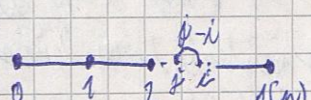
~~..~~ ~~..~~ takže $\chi'(K_n) = n$ pro n liché

jde to pro sudé i indukcí!

$$\chi'(K_n) = n \text{ pro } n \text{ sudé}$$

* Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $s(n) \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný rozklad množiny $\{1, 2, \dots, s(n)\}$ na n tříd existují a, b, c ve stejné třídě takové, že ~~..~~ je $a + b = c$





$V = \{0, 1, \dots, s(n)\}$

$\delta : \{1, \dots, s(n)\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ … rozdělení do tříd

$ij \in E$

$c(ij) = \delta(|i-j|)$

$$s(n) := R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{n}) - 1$$

$|V| = R(3, 3, \dots, 3) \implies$ existuje jednobarevný trojúhelník

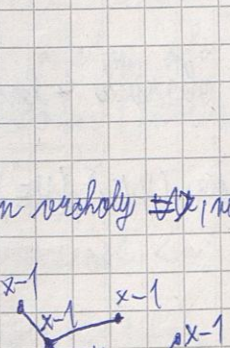
tedy $\exists i, j, k \in \{0, \dots, s(n)\};\ i < j < k$

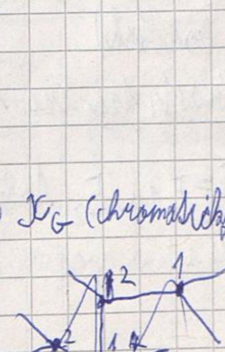
$c(ij) = c(ik) = c(jk)$

$\delta(j-i) = \delta(k-i) = \delta(k-j)$

$(k-j) + (j-i) = k-i$

* G je strom s n vrcholy ~~..~~, najděte χ_G (chromatický polynom)

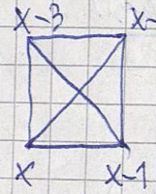




$3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\chi_G = x \cdot (x-1)^{n-1}$$

* najděte χ_{K_n} *

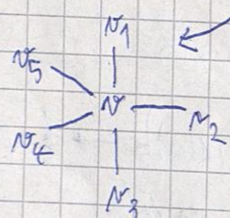


$$\chi_{K_n} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

13. PŘ.

- G rovinný graf, pak $\chi(G) \le 6$.
  - to plyne indukcí, protože G obsahuje ~~stupeň~~ vrchol stupně nejvýše 5 a ten si necháme na konec
- G rovinný graf, pak $\chi(G) \le 5$.
  - důkaz: indukcí podle počtu vrcholů.

    v... vrchol stupně nejvýše 5. Kdyby $d(v) < 5$, pak je to analogické jako předtím.
    Předp., že $d(v) = 5$. Kdyby některé 2 sousedé v měli stejnou barvu, tak je to analogické

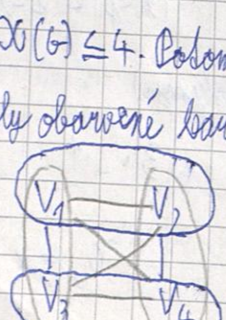


situace nakreslení G

$c(v_i) = i$

označme G_{ij} podgraf grafu $G \setminus v$ indukovaný vrcholy barev i a j. Kdyby pro některé barvy ležely v_i a v_j v různých komponentách G_{ij}, stačí jednu z těchto komponent přebarvit. Kdyby pro všechna i, j leželi i, j ve stejné komponentě G_{ij}, tak existuje cesta p_{ij} z i do j obarvená pouze i a j. Ovšem cesty p_{13} a p_{24} se musí v našem rovinném nakreslení G protnout ve vrcholu, který má současně 1 nebo 3 a 2 nebo 4

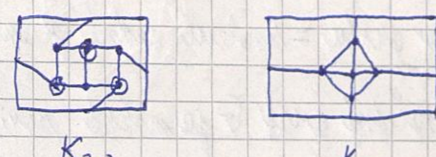
- G rovinný graf, pak $\chi(G) \le 4$ (věta o 4 barvách)
- důsledek: Jestliže každý stát má jedinou oblast, tak lze mapu obarvit 4 barvami
- Tvrzení: $G = (V, E)$ graf, $\chi(G) \le 4$. Potom $E = E_1 \cup E_2$ takové, že $(V, E_1), (V, E_2)$ jsou bipartitní
  - důkaz: V_i vrcholy obarvené barvou i.



další věci, ve se nezkouší!

- rod grafu (genus): kreslení v rovině = kreslení na sféře

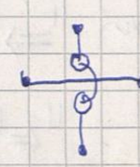
kreslení na toru:



$K_{3,3}$ K_5

orientovatelné kompaktní plochy = sféra s ušima

každý graf jde namalovat na sféru s dostatkem uší.

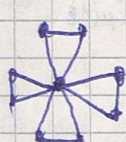


minimální počet uší, který je potřeba na nakreslení grafu se nazývá **rod** tohoto grafu, značíme jej $\gamma(G)$.

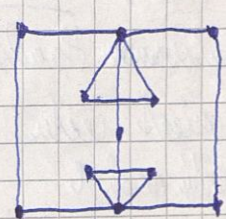
$\gamma(K_5) = \gamma(K_{3,3}) = 1$, $\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$, $\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil$

$|V| - |E| + s = 2 - 2\cdot\gamma(G)$

- věta: Největší chromatické číslo grafu rodu k je $\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1+48k}}{2} \right\rfloor$
- Graf H je **minorem** grafu G, jestliže je izomorfní grafu získanému z nějakého podgrafu G posloupností kontrakcí hran, píšeme $H \leq G$.
  - příklad:



je minorem



- ~~dobré $\leq$ je dobré uspořádání~~
- $(P, \leq)$ je dobré předuspořádání, jestliže pro libovolnou nahoru uzavřenou $U \subseteq P$ existuje konečná množina $V \subseteq U$ taková, že $U = \{p \in P \mid \exists q \in V : q \leq p\}$
- **Graph minor theorem**: $\preceq$ je dobré předuspořádání
- vlastnost grafů je dědičná **dědičná na minory**, jestliže pro každý graf, který tu vlastnost má, ji mají i všechny jeho minory
- **graph minor theorem** (ekvivalentně): Pro každou vlastnost dědičnou na minory existuje konečná množina zakázaných minorů Z, taková, že graf má tuto vlastnost $\iff$ nemá minor patřící do Z.
  - příklady: lesy: $Z = \{K_3\}$
    rovinné grafy: $Z = \{K_5, K_{3,3}\}$
    grafy rodu nejvýše k: pro $k=1$ není Z známo, ale má alespoň 16 000 prvků.

grafy, které mají rovinné nakreslení bez vnitřních vrcholů: $Z=\{K_4, K_{2,3}\}$

- Věta: Každá vlastnost dědičná na minory lze rozhodovat v čase $O(n^2)$.

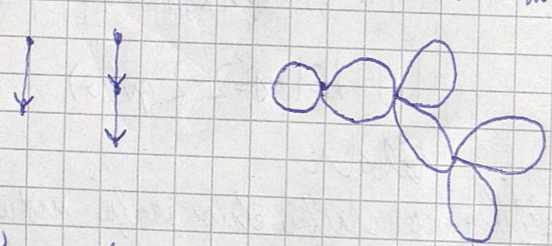
- orientace obyčejného grafu = zvolení jedné orientace pro každou hranu

- Věta (Robbins): Obyčejný graf G je možné zorientovat tak, aby výsledný graf byl silně souvislý $\iff$ G je hranově 2-souvislý

  - důkaz: "$\Rightarrow$" ✓ 

    "$\Leftarrow$" stačí dokázat pro 2-souvislé grafy, protože graf složený ze silně souvislých bloků je silně souvislý

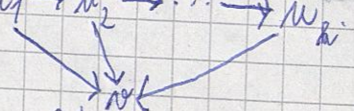
    pro 2-souvislé grafy provedeme indukci vzhledem ke konstrukci 2-souvislého grafu.



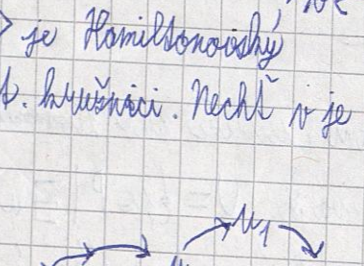
- Ádámova hypotéza: v každém orientovaném grafu, který obsahuje orientovanou kružnici, lze otočením jedné hrany snížit počet orientovaných kružnic

- Turnaje = orientace úplného grafu

- Tvrzení: Každý turnaj má orientovanou Hamiltonovskou cestu (nemusí to být kružnice)
  - důkaz: vezměme nejdelší orient. cestu: $u_1 \to u_2 \to \dots \to u_k$.
    Nechť v je nepoužitý vrchol



- Tvrzení: Turnaj je silně souvislý $\iff$ je Hamiltonovský
  - důkaz: vezměme nejdelší orient. kružnici. Nechť v je nepoužitý vrchol



- Tvrzení: Z vrcholu turnaje největšího výstupního stupně vede do každého vrcholu cesta délky nejvýše 2.

- ~~důkaz~~
  - důkaz: v vrchol největšího stupně. Nechť u má vzdálenost od v alespoň 3.
    $u \to v$ a $u \to w$ pro všechna w taková, že $v \to w$, spor s tím, že v má největší výstupní stupeň

23. CV.

* Určete $x = x - x$

$x = x - x \pm x(x-1)^{4} = x(x-1)^4 - x(x-1)^3 = x(x-1)^3(x-2)$

$x = x - x$ $\qquad x = x(x-1)(x-2)$

$x = x - x = x(x-1)^3 - x(x-1)^2$

$x = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 15x^2 + 6x$

stupeň |V|

střídají se znaménka

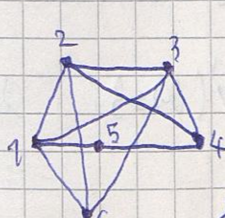
* Určete ~~přidávání~~ x

přidáváním hran

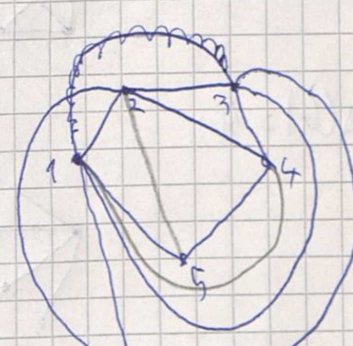
$x = x + x =$

$x = x + x = x_{K_5} + x_{K_4}$

* Je graf

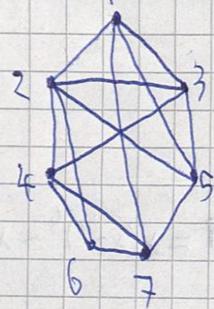


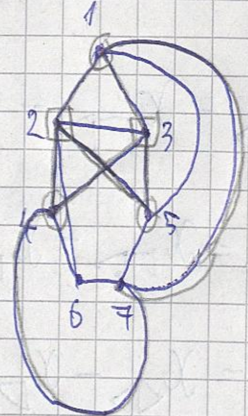
rovinný



Doplňte jej na maximální rovinný (ten má $|E| = 3|V| - 6 = 12$ hran)

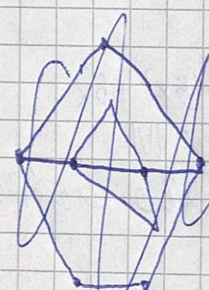
* Je graf rovinný ?

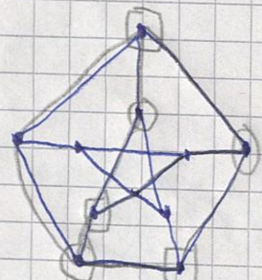




není

* Je graf rovinný ?

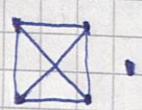




* Naleznete všechny grafy G s pěti vrcholy takový, že $\chi(G) = \chi'(G) = 4$.

$3 \leq \Delta(G) \leq 4$

Pokud $\Delta(G) = 3$, ~~ak~~ tak podle Brooksovy věty má G komponentu K_4.



ale tohle má $\chi'(G) = 3$ X

Pokud $\Delta(G) = 4$:

~~Tato musí mít tyto hrany~~ : musí obsahovat trojúhelník

2 grafy