1. PŘ.

- zkouška - písemná
- literatura - skripta a příklady na stránkách
- v březnu 3. týdny nebude přednáška

1. množiny

$\in$ binární relace

- axiom extenzionality:

$$(\forall x)(\forall y)\big(x=y \leftrightarrow (\forall z)(z\in x \leftrightarrow z\in y)\big)$$

2. kardinální čísla

$0, 1, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \dots$

alef 0 - spočetné množiny

$|X| \leq |Y|$ existuje injekce $X \to Y$

- Cantorova věta: $|A| < |P(A)|$

- $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| = c$
  c = kontinuum

- hypotéza kontinua: $c = \aleph_1$? $X \subseteq \mathbb{R}$ nekonečná: X spočetné $|X| = |\mathbb{N}|$; $|X| = |\mathbb{R}|$
- množině A přiřadíme symbol $|A|$ takže $|A|=|B| \Leftrightarrow \exists$ bijekce $A \to B$
- symbol $|A|$ nazýváme kardinální číslo (mohutnost)
- ~~uspořádání kardinálních čísel~~ $|A| \leq |B|$ ... existuje prosté zobrazení $A \to B$

- $|A| \leq |A|$
  $|A| \leq |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$
  AO

- Cantor-Bernsteinova věta: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
  - důkaz v textu (není třeba znát)
- $\leq$ je relace uspořádání
- $\leq$ ~~je lineární relace~~ nelze rozhodnout zda je $\leq$ lineární v ZF. Je potřeba ZFC
- kardinální čísla netvoří množinu

  A_i, $i \in I$ $|A_i|$ všechna kard. čísla $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |A_i|$ $2^{\bigcup A_i}$

– neexistuje množina všech množin

$|P(M)| \le |M| \qquad P(M) \subseteq M$

$X \subseteq M \Rightarrow X \in M$

– $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$

je asoc., kom.

$\alpha + \beta = |A \cup B| \qquad A \cap B \neq \emptyset$

~~dokažme korektnost~~

~~$|A'| = \alpha$, $|B'| = \beta$~~

~~$A \cong A'$, $B \cong$~~

dokažme korektnost

$|A'| = \alpha \leftrightarrow |B'| = \beta$

$A \cong A' \qquad B \cong B'$

$A \cup B \cong A' \cup B'$

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_0 + n = \aleph_0$

$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (odsud to i přímo rozdělením $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^+_0$ a $\mathbb{R}^-$)

$\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$

$\alpha \cdot \beta = |A \times B|$ (asoc., kom.)

distrib. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

protože $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (protože $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$)

$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

$\alpha^\beta = |A^B|$

– $2^A \cong P(A)$

– $\mathbb{R} \cong P(\mathbb{N})$

$2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$

$h: \mathbb{N} \to 2$ $\quad 0, h(1)\, h(2)\, h(3) \ldots$ injekce $\quad |P(\mathbb{N})| \le |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{R}| \le |P(\mathbb{N})| \ldots$ Dedekindovy řezy

$(\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$ $\qquad (A\times B)^C \cong A^C\times B^C$ $\quad$ (*)

$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$ $\qquad (A^B)^C \cong A^{B\times C}$ $\quad$ (**)

$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$ $\qquad (A)^{B\cup C} = A^B\times A^C \quad B\cap C\neq\emptyset$ $\quad$ (***)

dokažme $\qquad f: B\times C \to A$

$g: C\to A^B$

$g(c)(b) = f(b,c)$

$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = (2^{\aleph_0})^{c} = 2^{\aleph_0\cdot c} = 2^{c} = |P(\mathbb{R})|$

$\boxed{\text{2. PŘ.}}$

- Věta: $|A| < |P(A)|$
- důkaz $|A|\le|P(A)|$

$A\to P(A)$

$a\mapsto\{a\}$ $\qquad$ stačí dokázat $|A|\neq|P(A)|$

$f: A\to P(A)$

$Y = \{x\in X \mid x\notin f(x)\}$

Předp.: $Y = f(z)$

$z\in Y \iff z\notin Y$ $\qquad$ □

- důkaz (*)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, bend right, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & \\ A & A\times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

$f(c) = (f_1(c), f_2(c))$ je bijekce $\qquad$ □

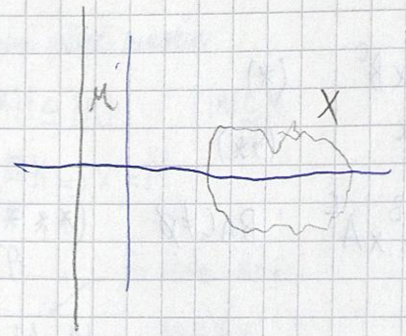
- důkaz (***)

$$\begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"] & B\cup C \arrow[u, "f"] & C \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

□

$|\mathbb{I}| = c$

- Věta: $X\subseteq\mathbb{R} \wedge |X|\le\aleph_0 \implies |\mathbb{R}-X| = c$
- důkaz: $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = c$, uvažme první souřadnice neobsažené v X, pak jí proložme vertikální přímku.



- nechť $\mathbb{A}$ je množina algebraických čísel, tj. reálných kořenů polynomů s celými koeficienty
- dokažme $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ $\underbrace{0, a_0 2 a_1 2 \dots a_n}_{\text{nac. číslo}}$ ve dvojkové soustavě

$|\mathbb{Z}[x]| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

- každý polynom má konečně mnoho kořenů, tedy $|\mathbb{A}| = \aleph_0$

$\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ ... transcendentní

$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}| = c.$

$\boxed{\text{ordinální čísla}}$

$0, 1, 2, \dots n \dots$ ω

$1, 2, \dots n \dots 0$ $\omega + 1$

$2, 3, \dots n \dots 0, 1$ $\omega + 2$

$0, 2, \dots 2n, \dots 1, 3, \dots 2n+1 \dots$ $\omega + \omega = \omega \cdot 2$

$\vdots$

$\omega \cdot 3$

$\vdots$

$\omega \cdot \omega = \omega^2$

$0, 1, \dots n, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega \cdot 2, \dots, \omega \cdot 4 \dots, \omega^2, \dots, \omega^x, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega_1$

- def: Řekneme, že lineárně uspořádaná množina je dobře uspořádaná, pokud každá neprázdná podmnožina má nejmenší prvek
- př.) $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobře usp.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ není dobře usp.

(ale $\mathbb{Z}$ lze dobře usp.) $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$ takle je dobře usp.

- věta[3.1]: Nechť A je dobře usp. množina a $f: A \to A$ prosté zobrazení, pak $a \leq f(a)$ pro lib. $a \in A$
- důkaz: viz text

- definice začátku
- věci co nejsou jsou i ve skriptech
- izomorfismus mezi usp. množinami: f bijekce, f, f^{-1} izotonní
- důsledek: dobře usp. množina není izomorfní se svým vlastním začátkem
  - důkaz:

sporem, $f: A \to Z$ izomorfní, Z vlastní začátek

$a \in A - Z \Rightarrow f(a) \in Z \Rightarrow f(a) < a$, spor $\square$

-

$A - Z \neq \emptyset$ a nejmenší prvek $A-Z$

$Z = \{x \in A \mid x < a\}$

$Z = A(a)$

- Věta: A, B dobře usp. množiny, pak existuje nejvýše 1 dobře izomorfismus $A \to B$
  - důkaz: $f, g: A \to B$ izomorfismy, $f \neq g$

    BÚNO $f(a) < g(a)$

    $A(a) \cong B(f(a)) \cong B(g(a))$

    $B(f(a))$ začátek $B(g(a))$ spor. $\square$
- důsledek: Nechť A je d.u.m. Pak id_A je jediný izomorfismus $A \to A$
- Věta: Nechť A, B jsou d.u.m. Pak nastane jedna z následujících možností
  (1) $A \cong B$
  (2) A je izomorfní s vlastním začátkem B
  (3) B je –||– A
  - důkaz: viz skripta

$\boxed{3. PŘ.}$

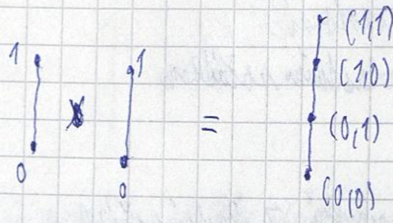
- Věta (Transfinitní indukce): A dobře usp. množina, pro libovolné $a \in A$ máme výrok $V(a)$ tak, že (*) je-li výrok $V(x)$ pravdivý pro ~~všechna~~ lib. $x < a$, pak výrok $V(a)$ je pravdivý pro lib. $a \in A$
  - důkaz: sporem, $B = \{a \in A \mid V(a) \text{ neplatí}\} \neq \emptyset$

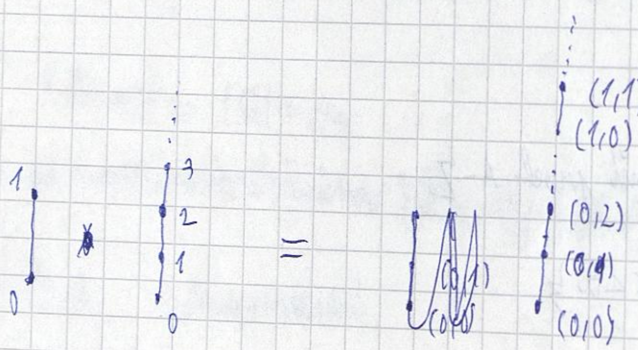
    a nejmenší, B, spor s indukčním předpokladem

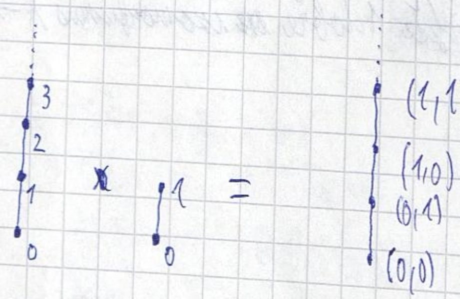
– A, B d. u. m., $A \times B$ lexikografický součin

$(A \times B, \leq)$ $\quad (a,b) \leq (c,d) \iff a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$

– př.







– $A \cdot B \not\cong B \cdot A$

– $(A \cdot B) \cdot C \cong A \cdot (B \cdot C)$

– důkaz: $A \times B \times C$ nosná množina

$((a,b),c) \leq ((a',b'),c') \iff (a,b) < (a',b')$ nebo $(a,b) = (a',b'), c \leq c'$

$\iff a < a'$ nebo

$a = a', b < b'$ nebo

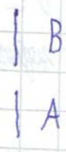
$a = a', b = b', c \leq c'$

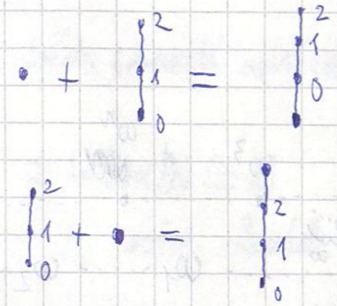
– A, B d. u. m., $A \cap B = \emptyset$

$A + B = (A \cup B, \leq)$ $\quad x \leq y \iff x \in A, y \in B$ nebo

$x, y \in A, x \leq y$ nebo

$x, y \in B, x \leq y$





- $A+B \not\cong B+A$
- $(A+B)+C \cong A+(B+C)$
- I d.u.m., $A_i, i \in I$ d.u.m., $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$

$$\sum_{i\in I} A_i = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i, \leq\Big) \qquad x<y \iff x \in A_j,\ y \in A_i,\ i<j$$
$$x, y \in A_i,\ x \leq y$$

- $A \cdot 1 = A$

$$\sum_{i\in I} A_i = I \cdot A$$

- platí pouze jednostranná distributivita

$$\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big)\cdot B \cong \sum_{i\in I} A_i \cdot B$$

- důkaz: $(a,b) \overset{\text{(levá strana)}}{\leq} (a',b') \iff a<a'$ nebo $a=a', b \leq b'$

$\iff a \in A_i, a' \in A_j, i<j$ nebo $a, a' \in A_i, a<a'$ nebo $\cancel{b \leq b'}$ chybí konec

(pravá strana) $(a,b) \leq (a',b') \iff (a,b) \in A_i \times B, (a',b') \in A_j \times B, i<j,$
$(a,b), (a',b') \in A_i \times B, (a,b) \leq (a',b')$

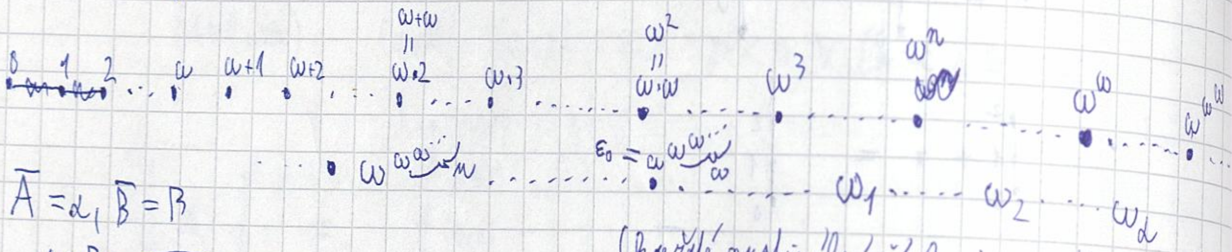
- opačná distributivita neplatí

$$\mathbb{N}\cdot(1+1) \overset{?}{\cong} \mathbb{N}\cdot 2 \not\cong \mathbb{N}+\mathbb{N}$$

<u>Ordinální číslo</u>

- každé d.u.m. A přiřadíme symbol $\bar{A}$ tak, že $\bar{A} = \bar{B} \iff A \cong B$
- $\bar{A}$ se nazývá ord. číslo a značí se α.
- $\bar{A} < \bar{B} \iff A$ je izomorfní s vlastním začátkem A.
- jedná se o lineární uspořádání

$\overline{\overline{N}} = \omega = \omega_0$



$\overline{\overline{A}} = \alpha, \overline{\overline{B}} = \beta$

$\alpha + \beta = \overline{\overline{A+B}}$

$\alpha \cdot \beta = \overline{\overline{B \cdot A}}$!

(každé ordinální číslo je množina menších)

ω_1 je první nespočetné

ω_α první ord. číslo dané mohutnosti

množina spočetných ordinálních čísel má mohutnost $\aleph_1$.

$\alpha^0 = 1$

$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

$\alpha^\beta = \sup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma$ za předpokladu, že β je limitní

ε_0 1. kritický bod (je to spočetný)

$\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$

– Def.: Množina A je ordinální číslo, pokud je tranzitivní a dobře uspořádána relací $\in$.

– např. $\emptyset$

$\{\emptyset\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (opravdu $\emptyset \in \{\emptyset\}$)

$\vdots$

– $W(\alpha) = \{\beta \text{ ord. číslo} \mid \beta < \alpha\}$

– Věta: Buď M množina ord. čísel. Pak existuje ordinální číslo α tak, že $\beta < \alpha$ pro všechna $\beta \in M$

– důkaz: $M = \emptyset$: $\alpha = 0$

$M \neq \emptyset$: pokud má největší prvek β, pak $\alpha = \beta + 1$.

viz skripta

~~$W(\beta)$ dobře usp.~~

$W(\gamma)$ dobře usp. pro lib $\gamma \in \beta \underset{\text{trans. indukce}}{\Longrightarrow} W(\beta)$ dobře usp.

- W je dobře usp. třída: každá neprázdná podmnožina (podtřída) má nejmenší prvek

- $(\mathbb{N}, \preceq)$ dobré usp.

$\preceq \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

počet různých $\preceq \leq 2^{\aleph_0}$

$\boxed{5. PŘ}$

- Věta: $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ (1)

$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$ (2)

- důkaz: (1) $1<\alpha$, transfinitní indukce k γ

$\gamma = 0$

předp. platnost pro δ, $\gamma = \delta+1$

$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+\delta+1} = \alpha^{\beta+\delta}\cdot\alpha = \alpha^\beta\cdot\alpha^\delta\cdot\alpha = \alpha^\beta\cdot\alpha^{\delta+1} = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$

Předp., že to platí pro všechna $\delta<\gamma$, γ limitní

$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+\sup_{\delta<\gamma}\delta} = \alpha^{\sup_{\delta<\gamma}\beta+\delta} = \sup_{\delta<\gamma}\alpha^{\beta+\delta} = \sup_{\delta<\gamma}\alpha^\beta\cdot\alpha^\delta = \alpha^\beta\cdot\sup_{\delta<\gamma}\alpha^\delta = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$ ☑

(2) $1<\alpha$, $\beta,\gamma\neq 0$

indukcí k γ

$\gamma = \delta+1$

$(\alpha^\beta)^{\delta+1} = (\alpha^\beta)^\delta\cdot\alpha^\beta = \alpha^{\beta\cdot\delta}\cdot\alpha^\beta = \alpha^{\beta\delta+\beta} = \alpha^{\beta(\delta+1)} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

γ limitní

$(\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^\beta)^{\sup_{\delta<\gamma}\delta} = \sup_{\delta<\gamma}(\alpha^\beta)^\delta = \sup_{\delta<\gamma}\alpha^{\beta\cdot\delta} = \alpha^{\sup_{\delta<\gamma}\beta\cdot\gamma} = \alpha^{\beta\sup_{\delta<\gamma}\delta} =$

$= \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

- Věta: $0<\alpha$, pak existují přirozená čísla $k, m_0, \ldots, m_k$ a ord. čísla $\gamma_0>\gamma_1>\ldots>\gamma_k$ tak, že

$\alpha = \omega^{\gamma_0}m_0 + \omega^{\gamma_1}m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k}m_k$

např. $\omega_1 = \omega^{\omega_1}$

$\omega_2 = \omega^{\omega_2}$

$\omega_1 + \omega = \omega^{\omega_1} + \omega^1$

$\omega + \omega_1 = \omega_1 = \omega^{\omega_1}$

- Důkaz: indukcí k α

$1 < \alpha$, indukcí pro $\beta < \alpha$

$X = \{ \gamma \mid \omega^\gamma \leq \alpha \}$ množina

$\gamma_0 = \sup X \qquad \alpha^{\gamma_0} = \sup_{\gamma \in X} \alpha^\delta \leq \alpha$

$Y = \{ \delta \mid \omega^{\gamma_0} \cdot \delta \leq \alpha \}$ množina

$\delta_0 = \sup Y \qquad \cancel{\delta_0 = \sup Y}$

$\omega^{\gamma_0} \cdot \delta_0 \leq \alpha \qquad \delta_0 \max Y$

$\delta_0 < \omega$

$\omega^{\delta_0} \cdot \omega = \omega^{\delta_0 + 1} > \alpha \Rightarrow \delta_0 < \omega$, $\delta_0 = m_0$

dělení se zbytkem: $\alpha = \omega^{\gamma_0} \delta_0 + \beta$, $\beta < \omega^{\gamma_0}$

- $F_0(x) = x + 1$

$F_{n+1}(x) = F_n^{x+1}(x)$ iterace $x \in \mathbb{N}$

$F_1(x) = x + x + 1 = 2x + 1 \approx 2x$

$F_2(x) \approx 2^x$

$F_3(x) \approx 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$ (x)

$\vdots$

$F_\omega(x) = F_x(x)$

- Harringtonova věta, Harringtonovo číslo $H(n) \approx F_{\varepsilon_0}$

$\boxed{\text{Axiom výběru}}$ (AC)

$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ pro $A_i \neq \emptyset$ $\qquad a_i \in A_i \qquad (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$

$a: I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \qquad a(i)=a_i$

- můžeme vybrat prvky $a_i \in A_i$ tak, že $\{a_i \mid i \in I\}$ tvoří množinu

- ZFC

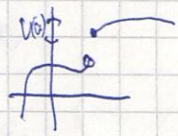
- sjednocení spočetné množiny spočetných množin je spočetná množina

$A_i \mid i = \omega$ spoč. $\Rightarrow \bigcup\limits_{i\in\omega} = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$ spočetná

$$\begin{array}{llll}
A_0 & a_{00} & a_{01} \to a_{02} & \dots \\
A_1 & a_{10} & a_{11} \quad a_{12} & \dots \\
A_2 & a_{20} & a_{21} \quad a_{22} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

je nutné použít axiom výběru, abychom u každé množiny vybrali uspořádání a tabulka tvořila množinu

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v $a \iff (a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a))$



"$\Rightarrow$" zřejmé

"$\Leftarrow$" Řekněme, že f není spojitá v a
existuje okolí $V(a)$ bodu $f(a)$, že pro lib. $0<n$
existuje a_n tak, že $|a-a_n| < \frac{1}{n}$, ~~$f(a_n)$~~

$a_n \to a$

$f(a_n) \not\to f(a)$

zde potřeba axiom výběru
(posloupnost je množina)

- princip dobrého uspořádání: každou množinu lze dobře uspořádat

- Věta: Princip dobrého uspořádání ~~implikuje AC~~ $\Rightarrow AC$

- důkaz: $A_i \neq \emptyset$, $i \in I$, $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, dobře uspořádejme A (celé sjednocení)

$f: I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $f(i)$ nejmenší prvek v A_i.

- princip maximality: A usp. množina, v níž každý řetězec má horní závoru. Pak k lib. $a \in A$ existuje maximální prvek ~~$a \in A$~~ $a \leq b \in A$

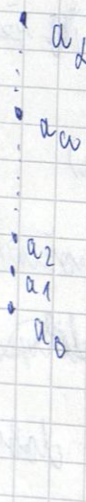
– **Věta:** princip maximality => princip dobrého uspořádání

– důkaz: viz skripta

uvažujme všechny "pokusy" o dobré uspořádání a berme to [illegible]

– **Věta:** AC => princip maximality

– důkaz: viz skripta



(odspoda ~~xxx~~ vybíráme prvky do řetězce, dokud to jde)

- **Věta**: Každý vektorový prostor má bázi (lineárně nezávislá množina generátorů)
  - důkaz: vezmeme maximální lineární nezávislou, to je ta báze (pokud by tam nějaký vektor nebyl, tak ho tam přidáme

$$\begin{array}{ccc} PDO & \Rightarrow & AC \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ & PM & \end{array}$$

$\boxed{6. PŘ.}$

Kardinální aritmetika

platí za axiomu výběru

- **Věta** (AC): Kardinální čísla jsou dobře uspořádané
  - důkaz: $\alpha = |A|$, α^* ... nejmenší ordinální číslo mohutnosti α

$Card \rightarrow Ord \quad \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^* < \beta^*$

$$\begin{array}{ccccc} 0, 1, \ldots, n, \ldots, & \omega, \ldots, & \omega_1, \ldots, & \omega_2, \ldots\ldots & \omega_\alpha \\ & \| & \| & \| & \| \\ & \aleph_0 & \aleph_1 & \aleph_2 & \aleph_\alpha \end{array}$$

- **Věta**: AC $\Leftrightarrow$ kard. čísla jsou lineárně usp.
  - důkaz: "$\Leftarrow$" A množina, existuje dobře usp. množina B, $|B| \not\leq |A|$

$\Rightarrow |A| \leq |B|$

$A \subset B$

A je dobře usp.

- **Věta**: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \quad (|A \times A| = |A|)$
  - důkaz: transfinitní indukcí: pro $\alpha = 0$ to víme.

$\omega_\alpha = W(\omega_\alpha)$ .. množina všech menších

$W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)$

maximo-lexikografické uspořádání ~ viz skripta

$(\beta, \gamma) < (\delta, \varepsilon) \Leftrightarrow \max\{\beta, \gamma\} < \max(\delta, \varepsilon)$ nebo

$\max\{\beta, \gamma\} = \max(\delta, \varepsilon)$, $(\beta, \gamma) \underset{lex}{<} (\delta, \varepsilon)$

	0	1	2
0	(0,0)	(1,0)	(2,0)
1	(0,1)	(1,1)	(1,2)
2	(2,0) →	(2,1) →	(2,2)

je to dobré usp., vezmeme nejmenší max. a pak nejmen[ší] lexikograficky

$$\eta = \overline{W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)}$$

ukážeme $\eta = \omega_\alpha$ (pak totiž víme $W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha) \cong W(\omega_\alpha)$)

víme $|W(\omega_\alpha)| \leq |W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)|$ a $|W(\eta)| = |W(\omega_\alpha) \times W(\omega_\alpha)|$,

tedy $\omega_\alpha \leq \eta$. Ukážeme $\omega_\alpha \geq \eta$. Nechť $\omega_\alpha < \eta$.

$$\Rightarrow \exists\, \gamma,\delta < \omega_\alpha :\ W(\omega_\alpha) \cong W((\gamma,\delta))$$

$$\xi = \max\{\gamma,\delta\} + 1 < \omega_\alpha$$

$$W((\gamma,\delta)) \subseteq W(\xi) \times W(\xi)$$

$$|W(\omega_\alpha)| = |W((\gamma,\delta))| \leq |W(\xi) \times W(\xi)| \underset{\text{ind. předpoklad}}{=} |W(\xi)|,$$ tedy

$$|W(\omega_\alpha)| \leq |W(\xi)| < |W(\omega_\alpha)|,$$ spor □

- platí $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$, protože pro $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$ platí $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$
- platí $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$, nechť $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$

$$\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta = 2 \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_0 \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$$

- za {AC} platí $\aleph = \aleph_0$
- pokud $\alpha \leq \beta$, tak $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$, protože

$$2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$$

- GCH: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$
  generalized CH
- **Věta** (AC): $|I|, |A_i| \leq \aleph_\alpha \Rightarrow \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq \aleph_\alpha$

- důkaz: $\left|\bigcup_{i=1} A_i\right| \leq \left|\sum_{i\in I} W(\omega_\alpha)\right| = \left|I \times W(\omega_\alpha)\right| \leq \aleph_\alpha$

- def. $\aleph_\alpha$ se nazývá regulární pokud sjednocení $< \aleph_\alpha$ množin mohutnosti $< \aleph_\alpha$ má mohutnost $< \aleph_\alpha$

- $\aleph_0$ je regulární

- pro regulární $\aleph_\alpha$ je regulární i $\aleph_{\alpha+1}$ $\quad |X| \leq t\ |X| < \aleph_{\alpha+1} \Longleftrightarrow |X| \leq \aleph_\alpha$

- singulární = není regulární

$\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_n \quad \omega_\omega$

- $\aleph_\omega$ je singulární $\quad W(\omega_\omega) = \bigcup_{n=0}^{\omega} W(\omega_n)$

- existují $\aleph_\alpha$ regulární α limitní. $\aleph_\alpha$ se nazývá slabě nedosažitelné $_{> \aleph_0}$

- $\aleph_\alpha$ nazývá nedosažitelné: regulární $\quad \aleph_\beta < \aleph_\alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ $_{> \aleph_0}$

- existuje nedosažitelné $\aleph_\alpha$? Nerozhodnutelné

$\boxed{7. PŘ.}$

Axiomy ZF

(A1) Axiom extenzionality $\quad (\forall x)(\forall y)(x = y \longleftrightarrow (\forall z)(z \in x \longleftrightarrow z \in y))$

(A2) Axiom dvojice $\quad (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \longleftrightarrow u = x \vee u = y)$ $\quad$ neformálně: $z = \{x, y\}$

(A3) schéma axiomů vydělení

$(\forall t_1, \dots, t_n)(\forall y)(\exists x)(\forall z)(z \in x \longleftrightarrow z \in y \wedge \varphi(z, t_1, \dots, t_n))$, kde $\varphi(z, t_1, \dots, t_n)$ je formule

neformálně: existuje $x = \{z \in y \mid \varphi(z, t_1, \dots, t_n) \text{ platí}\}$

pak např. $\quad x \cap y = \{z \in x \mid z \in y\}$

$x - y = \{z \in x \mid z \notin y\}$

(A4) Axiom sjednocení

$(\forall y)(\exists x)(\forall z)(z \in x \longleftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in y))$

neformálně: $X = \bigcup y$, $\bigcup \mathcal{X} = \{x \mid x \in X \in \mathcal{X}\}$

(A5) Axiom množiny podmnožin $\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$, kde

$z \subseteq x$ je $\quad (\forall t)(t \in z \rightarrow t \in x)$

neformálně: $y = \mathcal{P}(x)$

– ukažme si jak získat kartézský součin

$$x \times y = \{(z,s) \mid z \in x \wedge s \in y\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)), \text{ protože}$$

$$(z,s) = \{\{z\},\{z,s\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$$

(A6) schéma axiomů nahrazení (substituce)

$$\cancel{(\forall s_1,\dots,s_n)(\forall y)(\forall z)}$$

$$(\forall s_1,\dots,s_n)(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(\varphi(x,s_1,\dots,s_n,y) \wedge \varphi(x,s_1,\dots,s_n,z) \to y = z\big) \to$$

$$\to (\forall s_1,\dots,s_n)(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(u \in x \wedge \varphi(u,s_1,\dots,s_n,z))\big),$$

kde $\varphi(x,s_1,\dots,s_n,y)$ je formule

y obraz x v "zobrazení" určeném φ.

všechny množiny

třída – něco zadané ...

např. $V = \{x \mid x = x\}$

GB – Gödel–Bernays

třída nemůže být prvkem třídy

(A7) axiom nekonečna

$$(\exists x)\big[\emptyset \in x \wedge (\forall u)(u \in x \to u \cup \{u\} \in x)\big]$$

a neformálně: $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \dots\}$

– ukažme si jak uděláme průnik

$$\bigcap X = \{x \in X \mid (\forall y \in X)(x \in y)\}$$

(A8) Axiom regularity

$$(\forall x)\big[x \neq \emptyset \to (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)\big]$$

neformálně: $(x, \in)$ má minimální prvek $y \in x$

(kdyby $z \in y \wedge z \in x$, pak $y \cap x \neq \emptyset$, spor)

důsledek: neexistuje množina $x \in x$

neexistuje nekonečná klesající posloupnost v uspořádání $\in$

$$\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

ZF_0 – bez (A8)

$W_0 = \emptyset$

$\cancel{W_\alpha+1}\ W_{\alpha+1} = P(W_\alpha)$

$W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$ α limitní

$W = \bigcup_{\alpha \in Ord} W_\alpha$

$W_0 = \emptyset$

$W_1 = \{\emptyset\}$

$W_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$W_3 = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\vdots$

W_ω

$(A8) \iff V = W$

$x \in W$

uvažme nejmenší α tak, že $x \in W_{\alpha+1}$ (α nemůže být limitní)

α se nazývá řád (rank) x, $r(x) = \alpha$

$r(0) = 0$

$r(1) = 1$

$r(\omega) = \omega$

$\vdots$

$r(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha$

$\omega \subseteq W_\omega \Rightarrow \omega \in W_{\omega+1}$

W_ω ... model teorie konečných množin

W_α ... model teorie množin (ale α ~~já~~ ~~pa~~ musí být nedosažitelné)

- Lemma 1: $W_\beta \subseteq W_\alpha$ pro $\beta \leq \alpha$

  - důkaz: ~~transfinitní indukcí~~ limitní krok zřejmý

    izolovaný krok: trans. indukcí ukažme $W_\alpha \subseteq W_{\alpha+1}$

    předp., že to platí pro všechna $\beta < \alpha$.

    1) α limitní: $W_{\alpha+1} = P(W_\alpha) \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} P(W_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} W_{\beta+1} = W_\alpha$

    2) $\alpha = \gamma+1$: $W_\gamma \subseteq W_\alpha \Rightarrow W_{\alpha+1} = P(W_\alpha) \supseteq P(W_\gamma) = W_{\gamma+1} = W_\alpha$

- Lemma 2: $x \in W \iff x \subseteq W$ pro lib. x

 - důkaz "$\Rightarrow$" $x \in W$, $\alpha = \mu(x)$, $x \in W_{\alpha+1} = P(W_\alpha) \Rightarrow x \subseteq W_\alpha \subseteq W$

 "$\Leftarrow$" $x \subseteq W$, $x \subseteq W_\alpha$ pro nějaké $\alpha \Rightarrow x \subseteq W$

dosud jsme pracovali v ZF_0

- Věta (ZF): Buď C vlastní třída (třída, která není množinou) taková, že pro lib. x platí

$$x \in C \iff x \subseteq C.$$

 Pak $C = V$

- důkaz: ~~Buď~~ sporem, nechť $x \in V - C \overset{?}{\Rightarrow} x \cap (V-C) = \emptyset \Rightarrow x \subseteq C \Rightarrow x \in C$, spor

 ?: dokažme stručně další větou

- Věta (ZF): Pro lib. neprázdnou třídy C existuje $x \in C$ tak, že $x \cap C = \emptyset$

 - důkaz: Mějme $z \in C$, $z \cap C \neq \emptyset$, $y \not\subseteq T(z)$ ... tranzitivní obal z, nejmenší tranz. $\subset$ nad. z množina

 $y = T(z) \cap C \neq \emptyset$

 tranzitivní $y \in z \in x \Rightarrow y \in x$

 $T(z) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(z)$

 $x \in z \in C$

 $T^{n+1}(z) = \{s \mid s \in w \in T^n(z)\}$

 $x \in y$, $x \cap y = \emptyset$ $\quad s \in x \cap y \subseteq T(z)$

 $x \in C$ neboť $y \subseteq C$ $\quad s \in T(z) \cap C = y$

 $\boxed{8.\ PŘ.}$

$\alpha \leq \beta \Rightarrow W_\alpha \subseteq W_\beta$

$\forall x \in y \in W \Rightarrow \mu(x) < \mu(y)$

$\vdash x \subseteq W \Rightarrow x \in W$ $\qquad$ tedy A8 $\Rightarrow W = V$ (každá množina vzniká z prázdné množiny)

- Věta: (ZF_0) ~~(ZF)~~ $(A8) \iff V = W$

- důkaz: $x \neq \emptyset$, $y \in x$ nejmenšího řádu, $z \in y \cap x$ $\qquad z \in y$, $y \in x$ $\qquad \mu(z) < \mu(y)$

- Věta: (ZF_0) W model ZF

- důkaz: (A1) ✓

 (A2) $u, v \in W$. $\{u, v\} \in W$ neboť $\{u, v\} \subseteq W$

 (A3) ✓

(A4) $x \in W_\alpha$, $r(x) = \alpha$

~~$x \in W_\alpha \Rightarrow x \in W_{\alpha+1}$~~

$x \in W_{\alpha+1}$

$\bigcup x = \{z \mid z \in y \in x \text{ pro nějaké } y\} \Rightarrow r(z) < \alpha \Rightarrow z \in W_\alpha \Rightarrow \bigcup x \subseteq W_\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup x \in W_{\alpha+1}$

(A5) $x \in W_{\alpha+1}$ $\quad P(x) \subseteq P(W_\alpha) = W_{\alpha+1}$

$x \subseteq W_\alpha$ $\quad P(x) \in W_{\alpha+2}$

(A6) později

(A7) $\omega \in W_{\omega+1}$

(AP) ~~zřejmě~~ ✓

$\underbrace{W_\alpha \text{ je model}}_{\boxed{\text{značí se } \models}}$ $ZF_0 - (A6)$ pro $\omega < \alpha$ limitní

(A6) $\varphi(x, t_1, \dots, t_n, y)$ obraz φ ve V

$x \in W$ $\quad y = \{u \mid \varphi(z, t_1, \dots, t_n, u) \text{ pro nějaké } z \in x\}$

$y \cap W \subseteq W \Rightarrow y \cap W \in W$

obraz φ ve W

$V \longmapsto V$, zúžíme $W \longmapsto W$

částečné třídové zobrazení

$\square$

– Věta: $W_\alpha \models ZF$ pro α nedosažitelné

($\omega < \alpha$ regulární $\quad |X| < \alpha \Rightarrow |P(X)| < \alpha$)

– Důkaz: $|W_\alpha| = \alpha$

$X \in W_\alpha \Rightarrow |X| < \alpha$, dokázeme indukcí

víme $X \in W_\omega \Rightarrow$ ~~W~~ X konečné

$F: W_\alpha \longmapsto W_\alpha$

$X \in W_\alpha \Rightarrow |X| < \alpha \Rightarrow |F(X)| < \alpha \Rightarrow F(X) \in W_\alpha$

– Mallo

– Königova věta: spočetný strom s konečnými hladinami má spočetnou větev

- Má strom mohutnosti $\aleph_1$ se spočetnými hladinami větev mohutnosti $\aleph_1$? NE

- Strom mohutnosti κ s hladinami $< \kappa$ má větev mohutnosti κ – kardinál $\kappa > \aleph_0$ se nazývá slabě kompaktní (musí být ~~a~~ z nalla)

- Věta o kompaktnosti: ~~Věta~~ Teorie je bezesporná $\iff$ právě když každá její konečná teorie je bezesporná

- L_ω – logika 1. řádu

- L_κ – disjunkce a konjunkce $< \kappa$ formulí, kvantifikátory přes $< \kappa$ proměnné

- L_κ má věta o kompaktnosti: konečná ~~$\{A\}$~~ $\to$ $< \kappa$

- κ kompaktní

- $L_0 = \emptyset$

  $L_{\alpha+1}$ ... definovatelné podmnožiny L_α

  $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ ... α limitní

  $L = \bigcup L_\alpha$

  konstruktivní množiny

  $L \models AC, GCH$

  $L \models ZF$

- absolutní vlastnost (nezávisí na modelu)

  x ord. číslo ... absolutní

  $|x| = |y|$ ... není absolutní

- permutační model

VO $\boxed{9. PŘ}$

Permutační model

- ZFA – (ZF s atomy)

  - $\in, \emptyset, A$

  $\in$ – binární relační symbol; $\emptyset$ – konstanta; A – unární relační symbol

(A1) $\rightsquigarrow$ $(\emptyset)\ \neg(\exists x)(x \in \emptyset)$

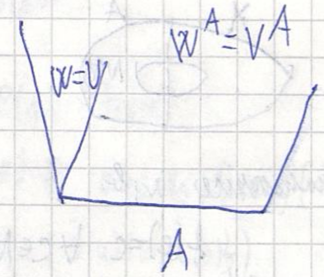
(A1) $(A)\ (\forall z)(z \in A \leftrightarrow z \neq \emptyset \wedge \neg(\exists x)(x \in z))$

$(A1')\ (\forall x \notin A)(\forall y \notin A)(x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$

- prvky A nazýváme atomy

$$W_0^A = A$$
$$W_{\alpha+1}^A = P(W_\alpha^A)$$
$$W_\alpha^A = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta \quad \alpha \text{ limitní}$$
$$W^A = \bigcup_{\alpha\in Ord} W_\alpha^A$$

$W^A = V^A$



- A ... nekonečná množina
- Def.: $f: V\to V$ je izomorfismus $\iff$ (f bijekce $\wedge$ ($x\in y \iff f(x)\in f(y)$) $\forall x,y\in V$)

+ ~~Def.~~

+ f_α?

- $f: A\to A$ permutace
- $f_\alpha: W_\alpha^A \to W_\alpha^A$

$$f_0 = f$$
$$f_{\alpha+1} = P(f_\alpha) \qquad f_{\alpha+1}(x) = \{f_\alpha(y) \mid y\in x\}$$
$$f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta \quad \alpha \text{ limitní} \qquad f_\alpha \restriction W_\beta^A = f_\beta$$
$$\hat f = \bigcup_{\alpha\in Ord} f_\alpha \qquad \hat f \restriction W_\alpha^A = f_\alpha$$

$$\hat f(\{a\}) = \{f(a)\}$$
$a\in A$

$\hat f: V^A \to V^A$ izomorfismus

- Def. Množina $x\in V^A$ se nazývá symetrická, jestliže existuje konečná množina atomů $a_1,\dots,a_n$ taková, že pro libovolnou permutaci $f: A\to A$ platí

$$f(a_i)=a_i,\ i=1,\dots,n \Rightarrow \hat f(x)=x$$

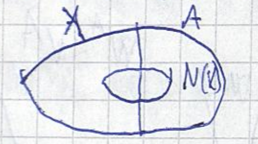
$\{a_1,\dots,a_n\} = N(x)$ nosič x.

- př. 1) Lib. $x\in V$ je symetrické. $N(x)=\emptyset$
2) A je symetrická. $N(x)=\emptyset$
3) $\underbrace{\{a_1,\dots,a_n\}}_{\subseteq A}$ je symetrická. $N(\{a_1,\dots,a_n\}) = \{a_1,\dots,a_n\}$
4) $A-\{a_1,\dots,a_n\}$ symetrická. $N(A-\{a_1,\dots,a_n\}) = \{a_1,\dots,a_n\}$

5) $X \subseteq A$, $A - X$ nekonečná $\Rightarrow X$ není symetrická

v opačném případě $N(X) \subseteq A$ konečná

$a \in X - N(X)$, $b \in (A - X) - N(X)$



f transpozice a, b

$f(c) = c \ \forall c \in N(X)$ $\quad \hat{f}(X) \neq X$

6) $P(A)$ symetrická, $N(P(A)) = \emptyset$. Není dědičně symetrická

- Def. Množina $X \in V^A$ je dědičně symetrická, pokud je symetrická a každý prvek jejího tranzitivního obalu $T(X)$ je symetrická množina.
- P je třída dědičně symetrických množin
- Věta: P je model ZFA.
- důkaz: $\in, \emptyset, A$ jsou v P ~~stejné~~ jako ve V^A

(∅), (A), (A1) tedy platí

$x \in P \Rightarrow x \subseteq P$

(A2) $\quad u, v \in P$

$N(\{u, v\}) = N(u) \cup N(v) \qquad \hat{f}(\{u, v\}) = \{\hat{f}(u), \hat{f}(v)\}$

(A3) $\quad y \in P$, $s_1, \dots, s_n \in P$

$x = \{z \in y \mid \varphi(z, s_1, \dots, s_n)$ platí$\}$

$N(x) = N(y) \cup \bigcup_{i=1}^{n} N(s_i)$

$f(a) = a \ \forall a \in N(x)$

$\hat{f}(y) = y$, $\hat{f}(s_i) = s_i$, $i = 1, \dots, n$

$\varphi(z, s_1, \dots, s_n)$ platí $\Rightarrow \varphi(\hat{f}(z), \hat{f}(s_1), \dots, \hat{f}(s_n))$

$\Leftrightarrow \varphi(\hat{f}(z), s_1, \dots, s_n)$ platí

$\Rightarrow \hat{f}(x) = x$

(A4) $\quad y \in P$, $x = \bigcup y$

$N(x) = N(y)$ ← ukážeme

$f(a) = a \quad \forall a \in N(x) \overset{?}{\Rightarrow} \hat{f}(x) = x$

$z \in x \Leftrightarrow z \in s \in y$ pro nějaké $s \Leftrightarrow \hat{f}(z) \in \hat{f}(s) \in \hat{f}(y) = y$

$\Leftrightarrow \hat{f}(z) \in x$

(A5) $y \in P$, $x = P(y) \cap P$

$\hat{f}(y) = y \Rightarrow \hat{f}(P(y)) = P(y)$

~~x je symetrické, $N(x) = N(y)$~~

$P(y)$ je symetrické, $N(P(y)) = N(y)$

chceme ukázat $z \in x \Rightarrow \hat{f}(z) \in P$ a z toho plyne $\hat{f}(x) = x$ a tedy x sym., $N(x) = N(y)$.

ukážeme $N(\hat{f}(z)) = \hat{f}(N(z))$ $\left(= \{f(a) \mid a \in N(z)\}\right)$

$g f(a) = f(a)$ pro lib. $a \in N(z)$

$f^{-1} g f(a) = a$ —11—

$z = \widehat{f^{-1} g f}(z) = \hat{f}^{-1} \hat{g} \hat{f}(z) \Rightarrow \hat{g}\hat{f}(z) = \hat{f}(z)$

(A6) $x, s_1, \dots, s_n \in P$

$\varphi(x, s_1, \dots, s_n, z)$ funkcionální

$N(x) \cup \bigcup_{i=1}^{n} N(s_i) \ne N(z) = N(z)$

$f(a) = a$ pro lib. $a \in N(x) \cup \bigcup_{i=1}^{n} N(s_i)$

$\varphi(x, s_1, \dots, z)$ platí $\overset{\text{ind.}}{\Longrightarrow} z \in P$

$\varphi(x, s_1, \dots s_n, \hat{f}(z)) = \varphi(\hat{f}(x), \hat{f}(s_1), \dots, \hat{f}(s_n), \hat{f}(z))$

$\Rightarrow \hat{f}(z) = z$

u obraz v v. φ

u množina obrazů prvků v

(A7) $\omega \in V \subseteq P$

(A8) zřejmé

$\square$

- **Věta:** A nelze ~~dobře~~ lineárně uspořádat v P

- **Důkaz:** sporem, $\le$ ~~dobré~~ lin. usp. A v P

  $<$ dobré uspořádání A v P

  $<$ symetrická množina

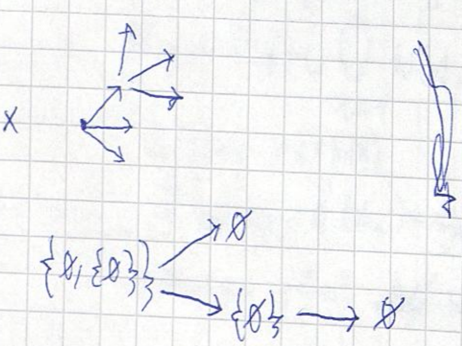
  ex. $a, b \in A$, že pro jejich transpozici f platí $\hat{f}(<) = <$

  Nechť $a < b \Rightarrow \hat{f}(a) < \hat{f}(b)$

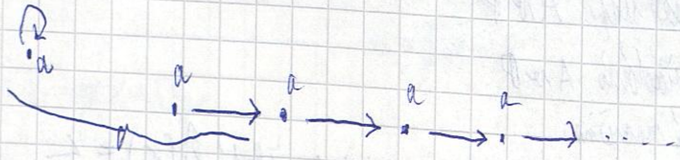
  $\hat{f}(a) = b$, $\hat{f}(b) = a$

- ZF: množiny
- GB: třídy
  Gödel-Bernays
- třída x je množina pokud $x \in y$ pro nějaké y.
- teorie typů: Russell, Whitehead
- NF (New foundations) - Quine
  dnes si ukážem
- formule je stratifikovaná, můžeme-li jejím proměnným přiřadit čísla tak, že pokud výraz $x \in y$ je v této formuli, tak y přiřadíme číslo o 1 větší než x.
  - např. $x = x$ stratifikovaná
    $x \notin x$ není stratifikovaná
- axiomy: (A1) extenzionalita
  (A2) $\{x \mid \varphi(x)\}$ je množina pro lib. stratifikovanou formuli
- neví se zda bezespornost ZF $\overset{?}{\Longrightarrow}$ bezespornost NF
- V je množina v NF
- FM teorie množin s atomy

atom $a = \{a\}$ poruší regularitu



přechodový systém



bisimulární

Aczel, Mendler - Non-well founded set

– ATS (alternativní teorie množin) – Vopěnka

– polomnožina – podtřída množiny

formalizace	realita
množiny	konečné množiny
třídy	vlastnosti
polomnožiny	nepřesně určené konečné množiny
konečné množiny	přehledné množiny

každá podtřída je množina

spočetná třída – lze ji lineárně uspořádat tak, že každý počáteční úsek je množina

– axiomy ATS:

(A1) axiom extensionality

(A2) axiom prázdné množiny

(A3) axiom následníka $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u = y)$ $z = x \cup \{y\}$

(A4) axiom indukce $\left[\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x \cup \{y\})\right] \longrightarrow (\forall x)(\varphi(x))$

(A5) axiom regularity $(\exists x)(\varphi(x)) \longrightarrow \left[(\exists x)\left(\varphi(x) \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow \neg \varphi(y))\right)\right]$

axiom extensionality pro třídy

lib. množina je třída

+ [illegible] (A7) existuje polomnožina, která není množina (říká se jim vlastní polomnožiny)

(A8) axiom prodloužení – pro lib. spočetnou funkci F existuje množinová funkce f taková, že $F \subseteq f$