DÚ: navíc 3A=3B: $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vek. prostor, kde $\oplus$ je násobení, $\odot$ umocňování

$\vec{0} = 1$

4A=4B: $\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je lin. izomorfismus

– budou 2 písemky (třeba získat polovinu)

~ ve zkouškovým opravná

– v $\mathbb{Q}$ nelze rozumně dělat rozumně analýzu, protože neplatí základní věta o supremu a z ní nejde odvodit spousta dalších vět

Ackermannova

– písemka – středa 6.4.

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} \qquad 0 \leq \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leq \quad \frac{x^2+y^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{x^4}$$

$\varphi(x) = A \cdot x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{k \times n}$

$\boxed{1.\text{CV.}}$

test

$\boxed{2.\text{CV.}}$

DÚ – ~~nutné~~ ověřit $\mathbb{R}$

v písemkách nepoužívat pouze slovo zachovává, ale napsat celý ~~zákon~~ definice

nebo i ker φ definovat množinově

úlohy z testu

11) $U = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$

Nechť $u \in \ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi$, pak $0 = \varphi(u)$ a ~~$\varphi(u)$~~ $u = \varphi(v)$ pro nějaké $v \in U$, pak

$0 = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(v) = u$. Tedy $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = \{0\}$

Nyní dokažme $U = \{u+v \mid u \in \ker\varphi \wedge v \in \operatorname{im}\varphi\}$

Zřejmě $\{u+v \mid u \in \ker\varphi \wedge v \in \operatorname{im}\varphi\} \subseteq U$

dokažme obrácenou inkluzi

Nechť $w \in U$, pak ~~$w =$ All~~

~~$\varphi \in \mathbb{R}$~~

~~$w = u + \varphi(v)$~~ ~~$w - u = \varphi(v)$~~ ~~$\varphi(w-u) = \varphi(\varphi(v))$~~ ~~$\varphi(w) = \varphi(v)$~~ ~~$\varphi(\varphi(v)) = \varphi(\varphi(v))$~~

~~$w = u + \varphi(v)$~~ ~~$w - \varphi(v) = u$~~ ~~$\varphi(w - \varphi(v)) = \varphi(u) = 0$~~ ~~$\varphi(w) - \varphi(v) = 0$~~ ~~$\varphi(w - \varphi(v)) = \varphi(w) - \varphi(v)$~~

$w = (w - \varphi(w)) + \varphi(w)$, dokažme

$w - \varphi(w) \in \ker\varphi$

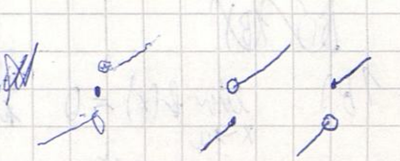
$\varphi(w - \varphi(w)) = \varphi(w) - (\varphi \circ \varphi)(w) = \varphi(w) - \varphi(w) = 0$, tedy

$w - \varphi(w) \in \ker\varphi$ a zřejmě $\varphi(w) \in \operatorname{im}\varphi$, tedy $U \subseteq \{u+v \mid u \in \ker\varphi \wedge v \in \operatorname{im}\varphi\}$,

takže $U = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$. $\square$

12) množina bodů nespojitosti je nejvýše spočetná

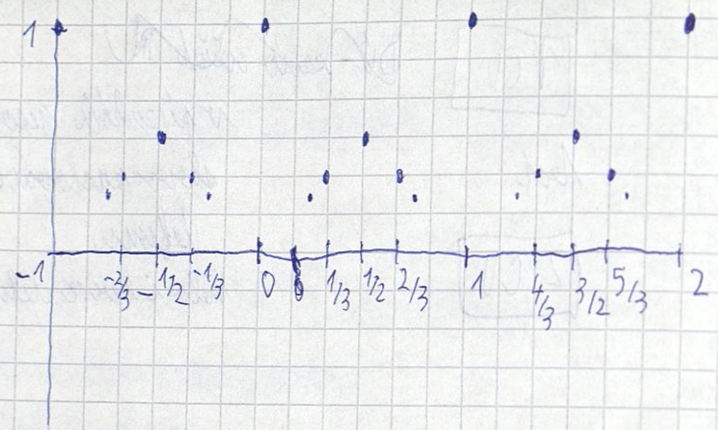
Nechť q je racionální, najdeme δ-okolí toho bodu, které obsahuje nejvýše 1 bod nespojitosti



– vzor názvu – "du1-jurka.pdf"

– aspoň 10 účastí

– DÚ: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{m} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \text{ kde } x = \frac{n}{m} \text{, ~~kde~~ je v základním tvaru} \end{cases}$



DÚ 1A) $\lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje pro $a \in \mathbb{Q}$

DÚ 1B) $\lim_{x \to a} f(x) = $ 0 nebo neexistuje pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (rozhodněte a dokažte)

– alt. řešení 11)

$u_1, u_2, \dots, u_k$ báze ker φ

$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ báze U

$\varphi(u_1) = \dots = \varphi(u_k)$

dokážeme, že $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ je báze im φ

– DÚ 2B) Mějme lineární zobrazení $\varphi: U \to U$, $\varphi \circ \varphi = id_U$. Pak existují ~~…~~ U_1 a U_2 tak, že $U = U_1 \oplus U_2$ a $\varphi(U_1) \subseteq U_1$ a $\varphi(U_2) \subseteq U_2$.

– 2A)

~~$U_1 = \ker \varphi$~~ ~~$U_2 = \ker \varphi$~~

~~$U_1 = U$, $U_2 = \{0\}$~~

~~DÚ 1B)~~

– 1B) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

BÚNO $0 < a < 1$ (alt. vezmeme ~~$a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$~~)

$M = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \}$

~~$\varepsilon = \frac{1}{15}$~~ ~~$\frac{1}{k} < \varepsilon < \frac{1}{k+1}$~~

$\frac{1}{k+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{k}$

$M = \{ \frac{a}{b} \mid 1 \leq a < b \leq k+1, (a,b) = 1 \} \cup \{0, 1\}$

δ zvolíme jako

$$\delta = \min\{|a-q| \mid q \in M\}$$

Pak pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ platí $|f(x)| \leq \frac{1}{k+1} < \varepsilon$. $\square$

~~$|M| \neq$~~

~~2B)~~

~~$U_1 = [u]$ $u \neq 0$~~

~~$\varphi(U_1) = \{\varphi(u) \mid u \in U_1\}$~~

$u_1, u_2, \dots, u_n$ je báze U

$U_1 = [u_1]$ $U_2 = [u_2, \dots, u_n]$

lze ukázat $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

~~$\varphi(u_1) = w$~~ $u_1 \in U_1$

~~$\varphi \circ \varphi(u_1) = \varphi(w)$~~ dokažme $\varphi(u_1) \in U_1$

~~$u_1 = \varphi(w)$~~

$\boxed{3. CV.}$

(12) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f rostoucí

Co lze říct o množině bodů nespojitosti

~~$x \in$~~ $P = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid (a, a+\Delta]\}$ je zdola omezená $\{f(a) < f(x)$ pro $x > A$

inf P existuje

~~$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x$~~ z definice inf plyne

~~$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta))(0 < f(x) - \varepsilon < \inf P)$~~

~~tedy~~

pro každé $\varepsilon > 0$ podle definice infima existuje $x_0 \in (a, \infty)$ tak, že $f(x_0) - \inf P < \varepsilon$

Potom pro $x \in (a, x_0)$ je

$$f(x) < f(x_0) < \inf P + \varepsilon$$

zvolíme-li $\delta = x_0 - a$, tak $|f(x) - \inf P| < \varepsilon$

tedy existují jednostranné limity

f rostoucí $\lim\limits_{x \to a_-} \leq f(a) \leq \lim\limits_{x \to a_+} f(x)$

Nespojitost nastane pro $\lim_{x \to a_-} f(x) < \lim_{x \to a_+} f(x)$

Množina otevřených neprázdných intervalů $\left(\lim_{x \to a_-} f(x), \lim_{x \to a_+} f(x)\right)$ má vlastnost, že její prvky jsou po dvou disjunktní, tato množina je spočetná, tedy množina bodů nespojitosti je spočetná

v každém intervalu leží racionální číslo

- fce s konečnou variací: $f = g - h$ (g, h neklesající)

f ... spočetná množina bodů nespojitosti

- ~~def: konečnou $f: I \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci, jestliže~~

~~$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_1 \dots x_n \in I)(\forall y_1 \dots y_n \in I)$~~

~~$\sum$~~

- def. f má konečnou variaci na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje $V > 0$ tak, že pro každé dělení $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ je

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq V$$

inf ~~této~~ $V = V(f, [a, b])$ ... variace f na $[a, b]$

$\pi + e$ $\qquad \pi, e$

$\pi \cdot e$

$x^2 - (\pi + e)x + \pi e = 0$

- f rostoucí, $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$

$\pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = f(b) - f(a) \dots \text{ telescoping}$$

- funkce s konečnou variací tvoří vek. podprostor prostoru $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

ten se značí $BV[a, b]$

- Dk: $f, g \in BV[a, b] \Rightarrow f + g \in BV[a, b]$

x_i dělení intervalu $[a, b]$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |(f+g)(x_{i+1}) - (f+g)x_i| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i) + g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

$$\leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b])$$

z toho, že $V(f+g,[a,b])$ je infimum a $V(f,[a,b]) + V(f,[a,b])$ plyne
$V(f+g,[a,b]) \geq V(f,[a,b]) + V(g,[a,b])$

+ úloha ~~dobř~~

② Úloha o trojnožkách: ~~bod~~ bod a z něj vedou tři úsečky s disj. vnitřky (musí dojít tři nenulové úhly)
↳ dobrovolná DÚ

M je množina trojnožek v rovině (z nichž každé dva jsou disjunktní. Dokažte, že je spočetná

– lehčí úloha jde hned řešit: P množina otevřených kruhů v rovině, kde každé dva jsou disjunktní

najdi jeden v kruhu ~~racionální číslo~~ ul bod s racionálními souřadnicemi

– úloha 1A platí pro všechna $a \in \mathbb{R}$

– $U = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

U je vekt. prostor nad $\mathbb{Q}$

~~dk~~ najděte $\dim_{\mathbb{Q}} U$

$$(a_1 + \sqrt{2}b_1) + (a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 + b_2) \in U$$
$$c(a + \sqrt{2}b) = ca + \sqrt{2}cb \in U$$

atd.

$\dim_{\mathbb{Q}} U = 2$ báze $(1, \sqrt{2})$
zřejmě generují
dokažme LN

$\dim_K K = 1$ $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = 1$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$

$a \cdot 1 + b\sqrt{2} = 0$ $a, b \in \mathbb{Q}$

$b = 0$: $a \cdot 1 = 0$
$a = 0$

$b \neq 0$: $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ spor

– pozn. U je i těleso: $(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})$

* $V = \{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ DÚ

- V je vekt. prostor nad $\mathbb{Q}$
- najděte bázi V nad $\mathbb{Q}$ a spočítejte $\dim_{\mathbb{Q}} V$ } 1A
- dokažte, že V není podtěleso v $\mathbb{R}$
- najděte nejmenší těleso obsahující prostor V } 1B

* V není podtěleso v $\mathbb{R}$, sporem, nechť V je podtěleso v $\mathbb{R}$.

Pak $\sqrt{2} \in V$, $\sqrt{3} \in V$ zaroveň $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in V$

Ukažme, že to nelze, nechť $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c = \sqrt{6}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$

~~dokažme~~ $\cancel{a = \sqrt{6} - \sqrt{2}b - \sqrt{3}c \notin \mathbb{Q}}$

$$a + \sqrt{2}b = \sqrt{6} - \sqrt{3}c$$

$$a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab = 6 - 2\sqrt{18}c + 3c^2$$

$$\cancel{a^2 + 2b^2 - 6 - 3c = 2\sqrt{2} + \sqrt{18}c = \sqrt{2}(2 + 3c^2)}$$

$$\cancel{(a^2 + 2b^2 - 6 - 3c)^2 = 8 - 18c^2 =}$$

$$\cancel{a^2 + 2b^2 - 6 - 3c}$$

$$6 + 3c^2 - a^2 - 2b^2 = 2\sqrt{2}(3c + ab) \qquad 3c \neq -ab$$

$$\mathbb{Q} \ni \frac{6 + 3c^2 - a^2 - 2b^2}{2(3c + ab)} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{spor..}$$

$\cancel{6\sqrt{3} = 2\sqrt{2}}$

pokud $3c = -ab$, pak

$$3a = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}b + \sqrt{3}ab$$

$$3(a + \sqrt{2}b) = 3\sqrt{6} + \sqrt{3}ab$$

$$9a^2 + 18b^2 = 54 + 3a^2b^2$$

$$3a^2 + 6b^2 - a^2b^2 = 18$$

$$\cancel{(a - 3)(b^2 - 6) = 0}$$

$$(a^2 - 6)(b^2 - 3) = 0 \quad \dots \text{spor}$$

* Nechť nejmenší těleso K obsahuje V, pak

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in K$$

$$d \cdot \sqrt{6} \in K, \quad d \in \mathbb{Q} \quad (\text{protože } \mathbb{Q} \subseteq V)$$

tedy $\{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c + \sqrt{6}d \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \subseteq K$, dokažme opačnou inklusi

$$\frac{1}{a + bx + cy + dxy}$$

$ap + 2bq + 3cr + 6ds = 1$

apr

$bp + aq + 3dr + \cancel{r} + 3cs = 1$

$cp + 2dq + ar + 2bs = 1$

$dp + cq + br + as = 1$

– úloha 2 B. $V_1 = \ker(\varphi - id)$
(2.) $V_2 = \ker(\varphi + id)$

– Je-li n přirozené, pak $\sqrt{n}$ je buď přirozené číslo nebo iracionální číslo

– důkaz sporem

$\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ $\quad (p, q) = 1$

$q > 1$

$q^2 n = p^2$

spor lze získat i z $q^2 n = p^2$, z FTA a nesoudělnosti plyne $q = 1$.

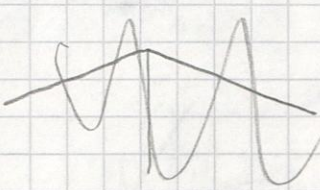
$q^2 p_1^{n_1} \cdots p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \Rightarrow n_1 = 2k_1$

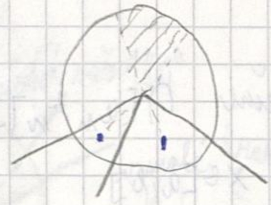
$n_2 = 2k_2$

$\vdots$

$n = (p_1^{k_1} \cdots)^2$

– trojúhelníky





zvolíme 2 rac. body

3 zvolíme v samé oblasti

dodáme trojúhelník s rac. vrcholy

střed pouze uvnitř trojúhelníka

- Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a

$f(a) < c < f(b)$

Pak existuje $x_0 \in (a,b)$, že $f(x_0) = c$

$M = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq c\}$

$a \in M$, tedy $M \neq \emptyset$

$(\forall x \in M)(x \leq b)$, tedy M je omezená

existuje tedy $\sup M = x_0$

Chceme ukázat $f(x_0) = c$.

Kdyby $f(x_0) > c$, pak $(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))\big(|f(x) - f(x_0)| < f(x_0) - c\big)$

tedy $f(x) > c$, spor s tím, že x_0 je supremum, protože $x_0 - \frac{\delta}{2}$ je horní závora

Kdyby $f(x_0) < c$, pak $f(x) < c$ na $[x_0, x_0 + \delta)$, tedy $x_0 + \frac{\delta}{2} \in M$, spor s tím, že x_0 je supremum.

- vlastnost nabývání mezihodnot – Darbouxova vlastnost

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ je posloupnost uzavřených intervalů. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ je neprázdný

$I_n = [a_n, b_n]$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1$ $\quad a = \sup a_n$

$b = \inf b_n$

dokážeme $\bigcap [a_n, b_n] = [a,b]$

$x \in [a,b]$

$a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$

$x \in [a_n, b_n]$ pro všechna n.

$[a,b] \subseteq \bigcap [a_n, b_n]$

~~Nechť $x \in \bigcap [a_n, b_n]$~~

Nechť $x \notin [a,b]$

$x < a$ ~~= nejmenší horní záv~~

nechť $x \in \bigcap [a_n, b_n]$

$\forall n: x \geq a_n \Rightarrow x$ je horní závora, $a \leq x$

analogicky $x \leq b$

tedy $\bigcap [a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ $\square$

- navíc pokud $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, pak $|\bigcap I_n| = 1$.

- Věta: f spojitá na $[a, b]$, pak f je omezená shora
- důkaz: sporem

f není omezená na $[a, b]$, $a_1 = a$, $b_1 = b$

$a_2 \in / a_2, b_2 \in \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$

$a_2 < b_2$ $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$

tak, že f není omezená na $[a, b]$.

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

f není omezená na $[a_n, b_n]$, $\bigcap [a_n, b_n] = \{x_0\}$

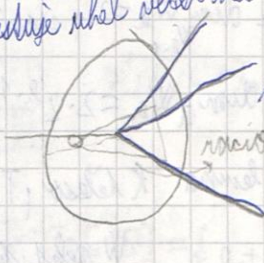
f spojitá v x_0, $\exists \delta > 0$ f je omezená, f je omezená na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ je omezená na nějakém $[a_n, b_n]$, spor $\square$

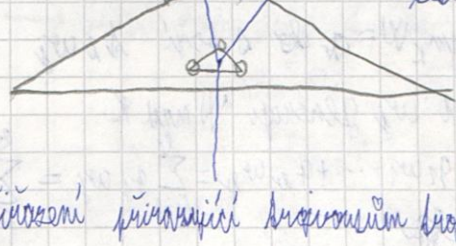
- Věta: f spojitá na $[a, b]$. $M := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$, podle předchozí věty $M < \infty$ pak existuje $x_0 \in [a, b]$ tak, že $f(x_0) = M$
- důkaz: sporem: $\forall x \in [a, b]: M \neq f(x)$

$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ ...

případ: existuje úhel větší než $180°$



případ: žádný není větší než $180°$



sestrojme velký trojúhelník, který má prostředek uvnitř a vrcholy v každé části
trojúhelník zpodobněme na malý
u vrcholů udělejme malé kružnice
a vyberme tam racionální vrcholy

přiřazení příslušící trojúhelníkům trojúhelníky je prosté

- Nechť $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou navzájem nesoudělná kladná čísla $\sqrt{c_i} \notin \mathbb{Q}$

$V_k = \{ a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \sqrt{c_i} \in \mathbb{R} \mid a_0, a_i \in \mathbb{Q} \}$ vekt. prostor nad $\mathbb{Q}$, najít bázi a najít nejmenší ... W_k a jeho bázi

indukcí vzhledem ke k.

$k=0$: ~~dim~~ $V_0 = \mathbb{Q}$, báze $= (1)$, $\dim_{\mathbb{Q}} V_0 = 1$. $W_0 = V_0$

ind. předpoklad: V_{k-1} má bázi $(1, \sqrt{c_1}, \ldots, \sqrt{c_{k-1}})$, W_{k-1} má bázi ze všech součinů $\sqrt{c_1^{e_1} \cdots c_{k-1}^{e_{k-1}}}$, $e_i \in \{0,1\}$

Dokažme, že V_k má bázi $(1, \sqrt{c_1}, \ldots, \sqrt{c_k})$ ~~a W_k~~

stačí ukázat lin. nezávislost

sporem
$$\sqrt{c_k} = a_0 + \sum_{i \in I} a_i \sqrt{c_i} \quad \text{kde } a_i \neq 0$$
$$c_k = a_0^2 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 c_i + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j \in I}}^{k-1} a_i a_j \sqrt{c_i c_j} \in W_{k-1}$$
$$c_k = a_0^2 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 \cdot c_i \quad a_i a_j = 0, \text{ spor}$$
$$W_k = \{ A + \sqrt{c_k} B \mid A, B \in W_{k-1} \}$$
W_{k-1} je těleso z předpokladu

W_k je taky těleso, např. inverze
$$(A + \sqrt{c_k} B)^{-1} = \frac{A - \sqrt{c_k} B}{A^2 - c_k B^2} \qquad \text{pokud } A^2 - c_k B^2 = 0, \text{ pak } \sqrt{c_k} \in W_{k-1}$$

Dokažme, že W_k je vek. prostor nad W_{k-1} s bází $(1, \sqrt{c_k})$

dokažme LN $A + \sqrt{c_k} B = 0 \Rightarrow \sqrt{c_k} \in W_{k-1} \Rightarrow A = B = 0$.

tedy $\dim_{W_{k-1}} W_k = 2$, navíc víme $\dim_{\mathbb{Q}} W_{k-1} = 2^{k-1}$

tedy $\dim_{\mathbb{Q}} W_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ s bází $\sqrt{c_1^{e_1} \cdots c_k^{e_k}}$

použili jsme toto lemma: K těleso, T těleso a vekt. prostor nad K $(t_1, \ldots, t_a)$

W vekt. prostor nad T $(w_1, \ldots, w_b)$

$\dim_T W = b$, $\dim_K T = a$

pak: $\dim_K W = ab$ s bází $t_i w_j$

Dokažme, že prvky $t_i w_j$ generují W nad K.

$w \in W$: $w = q_1 w_1 + \cdots + q_b w_b = \sum_{j=1}^{b} q_j w_j = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{a} k_{ij} t_i w_j$

$q_j = k_{j1} t_1 + \cdots + k_{ja} t_a$

dokažme lin. nezávislost

$$\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a} k_{ji} t_i w_j$$

$$\sum_{j=1}^{b}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{a} k_{ji} t_i\right)}_{\in T} w_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{a} k_{ji} t_i = 0 \Rightarrow k_{ji} = 0$$

$T_0 = \cap T$

T_0 nejmenší těleso obsah. množiny

~~Důk~~

- konstrukce pravítkem a kružítkem:

Mějme v rovině body $C_1, C_2, \dots, C_n$ se souřadnicemi $C_i = [x_i, y_i]$ a všechny možné přímky a kružnice (se středem C_i, na kterých leží C_j)

$\overleftrightarrow{C_i C_j}$

Vzniknou další body, v jakých tělesech leží

$T_0 = \cap T$

T je těleso obsahující Q, x_i, y_i

T_0 nejmenší těleso obsahující Q, x_i, y_i

rovnice přímky procházející $C_i C_j$

$$(y_j - y_i)(x - x_i) = (x_j - x_i)(y - y_i)$$

$$cx + dy = e$$

$c, d, e \in T_0$

$$c_1 x + d_1 y = e_1$$
$$c_2 x + d_2 y = e_2$$

řešení je v T_0 (průsečík)

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$$

průsečík přímky a kružnice

$$x^2 + ax + y^2 + by = c \qquad a, b, c, d, e, f \in T_0$$
$$dx + ey = f$$

řešení: $a'x^2 + b'x + c' = 0 \qquad a', b', c' \in T_0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$x_{1,2} \in T_0[\sqrt{D}]$, $T_1 = T_0[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in T_0 \wedge \sqrt{D} \notin T_0\}$

analogicky i průsečík dvou kružnic

$C_1, \dots, C_n \longrightarrow$ další body jako průsečíky přímek a kružnic mají souřadnice v T_1

$$T_1 = T_0[\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_k}]$$

$$T_0 \subsetneq T_1 \qquad \dim_{T_0} T_1 < \infty$$

výsledkem všech takových konstrukcí mohou být body se souřadnicemi v tělese $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_k$ tak, že $\dim_{T_0} T_k < \infty$

- DÚ ① Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a má derivaci na (a,b), jestliže $f(a)=f(b)$, existuje $x_0 \in (a,b)$, že $f'(x_0)=0$.

② f spojitá na $[a,b]$ a má derivaci na (a,b), pak existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\boxed{8. \text{ CV.}}$ $\boxed{\text{definice limity je fakt důležitá!}}$

* $[0,1] \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ (Borelova věta o pokrytí)

otevřené intervaly, existují $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, že $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}$

$M = \{ \cancel{[0,\alpha]} \ x \in [0,1] \mid [0,x] \text{ je pokryt nějakou konečnou množinou} \}$ $0 \in M$, M je neprázdná a omezená

~~sup M = 1, ukažme~~

~~sporem, nechť~~

~~sporem~~ ukažme sup $M = 1$, nechť sup $M < 1$.

$\forall \varepsilon > 0$ je pro $x \geq \sup M - \varepsilon$, $x \in (\sup M - \varepsilon, \sup M)$

protože $\sup M \in [0,1]$, tedy $\sup M \in I_\alpha$

$[0,x]$ pokryt konečnou množinou

a $(x, \sup M]$ je pro malé ε pokryt konečnou množinou

tedy $[0, \sup M]$ je pokryto konečnou množinou, tedy

~~sup M = 1.~~

Navíc pro malé ε je $(\sup M, \sup M + \varepsilon]$ pokryto 1 intervalem, tedy $[0, \sup M + \varepsilon]$ je pokryto konečnou množinou, spor.

DÚ: A: $\varphi : U \to V$
$u_1, \dots, u_n$ báze $\Rightarrow \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ generují V

Najděte nutnou a postačující podmínku na φ, aby platilo pro jednu bázi

B: zobecnění $\ker f \wedge \ker g$

- f a g lin. závislé $\Longrightarrow$ $\dim(\ker f \cap \ker g) \geq n-1$

$f = a \cdot g, a \in \mathbb{R}$ $\quad a \neq 0$: $\ker f = \ker g$, $\dim \ker f \geq n-1$

$a = 0$: $\ker f = U$, $\dim \ker f = n \geq n-1$

"$\Leftarrow$"

$\ker f \subseteq \ker g$: $\quad U = \ker f \oplus [u]$, $f(u) \neq 0$

$g(u) = a \cdot f(u)$

$\forall v \in U$: $g(v) = af(v)$

$v = w + k u$, $w \in \ker f$

- úloha 2 ze ~~seminářek~~ písemky:

$\ker(\varphi - i\,id) = \{u \in U \mid \varphi(u) = iu\}$

$\mathrm{im}(\varphi + i\,id) = \{\varphi(u) + iu \mid u \in U\}$

$\varphi(\varphi(u) + iu) = -u + i\varphi(u) = i(\varphi(u) + iu)$

tedy $\mathrm{im}(\varphi + i\,id) \subseteq \ker(\varphi + i\,id)$

~~Nechť $\varphi(u) = iu$, pak $u = \frac{\varphi(u)}{i}$~~

$u \in \ker(\varphi - i\,id)$, tedy $\varphi(u) = iu$

$u = -i\varphi(u) = \varphi(-iu)$

$-i\varphi(u) = \varphi(v) + iv$

$\ker(\varphi - i\,id) = \{u \in U \mid \varphi(u) = iu\}$

$\ker(\varphi + i\,id) = \{u \in U \mid \varphi(u) = -iu\}$

$u \in \ker(\varphi - i\,id) \cap \ker(\varphi + i\,id) \Longrightarrow iu = \varphi(u) = -iu \Longrightarrow 2iu = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow u = 0$ ✓

$\varphi(u + i\varphi(u)) = \varphi(u) - iu = -i(u + i\varphi(u))$

$u = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}i\varphi(u) + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}i\varphi(u)$

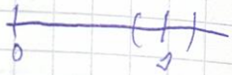
$\varphi(u - i\varphi(u)) = iu + \varphi(u) = i(u - i\varphi(u))$

$\ker(\varphi - i\,id) = \operatorname{im}(\varphi + i\,id)$

$\ker(\varphi + i\,id) = \operatorname{im}(\varphi - i\,id)$

* Borelova věta o pokrytí (plížívé lemma)

$s = \sup M$, $s \in [0,1]$, pak existuje I_α tak, že $s \in I_\alpha$



$I_\alpha = (s-\delta_1, s+\delta_2)$

$\exists x \in (s-\delta_1, s]\quad x \in M$

$[0,x] \subseteq I_{\alpha_1} \cup \dots \cup I_{\alpha_k}$

$[0,s] \subseteq I_{\alpha_1} \cup \dots \cup I_{\alpha_k} \cup I_\alpha \Rightarrow s \in M$

Nechť $s < 1$, $\exists I_\alpha$, $s \in I_\alpha$ $\quad I_\alpha = (s-\delta_1, s+\delta_2)$

$s \in M \Rightarrow [0,s] \subseteq I_{\alpha_1} \cup \dots \cup I_{\alpha_k}$

$[0, s + \frac{\delta_2}{2}] \subseteq I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2} \cup \dots \cup I_{\alpha_k}$

$\Rightarrow s + \frac{\delta_2}{2} \in M$, spor

* plížívé lemma: Nechť $M \subseteq [a,b]$ s vlastnostmi

(1) $a \in M$

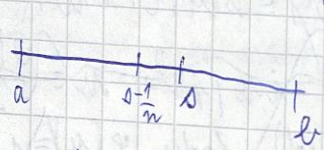
(2) Jestliže $x \in M$ a $x < b$, pak existuje δ, že $(x-\delta, x+\delta) \subseteq M$.

(3) Jestliže $x_n \in M$ a $x_n \to x$, pak $x \in M$.

} pak $M = [a,b]$

– důkaz: $s = \sup \overline{M}$, neboť $\overline{M} \neq \emptyset$ a shora omezená $\quad \overline{M} = \{x \in [a,b] \mid [a,x] \subseteq M\}$

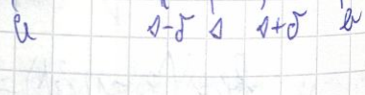
(i) dokažme $s \in \overline{M}$



$s - \frac{1}{n}$ $\quad \exists x_n \in (s - \frac{1}{n}, s]$ $\quad x_n \to s$, podle (3) $s \in \overline{M}$.

(ii) Nechť $s < b$, $s \in \overline{M}$ a použijeme (2)

spor s tím, že s je supremum



– DÚ: Z každé posloupnosti omezené lze vybrat konvergentní podposloupnost

A $\Downarrow$ $\quad \Uparrow$ B

Z každého otevřeného pokrytí intervalu $[a,b]$ lze vybrat konečné podpokrytí

– Darbouxova vlastnost derivace: f má vlastní derivaci na $[a,b]$ a $f'(a) < c < f'(b)$, pak $\exists x \in (a,b),\ f'(x) = c$

$f'(a) = f'_+(a)$

$f'(b) = f'_-(b)$

Dokažme pro $c = 0$: $f'(a) < 0$, tedy $f(x) < f(a)$ na nějakém intervale $(a, a+\delta_1)$ (tedy a není minimum)

$f'(b) > 0$, tedy $f(x) < f(b)$ na nějakém intervale $(b-\delta_2, b)$

f na $[a,b]$ nabývá svého minima v bodě $x_0 \in (a,b)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

pro $c \neq 0$: ~~$g(x) = f(x) - c \cdot \frac{x-a}{b-a}$~~

$g(x) = f(x) - c \cdot x$

$g'(a) = f'(a) - c < 0$

$g'(b) = f'(b) - c > 0$

$f'(x_0) - c = g'(x_0) = 0,\quad f'(x_0) = c$

* úloha 5 z písemky

Je-li $x = y + z\sqrt{d}$ kořen, je $\bar{x} = y - z\sqrt{d}$ také kořen

$X = A + B\sqrt{d}$ $\quad \overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y} \quad \overline{a \cdot X} = a \cdot \overline{X}$

$Y = C + D\sqrt{d}$ $\quad \overline{X \cdot Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

$\bar{x}^3 + a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c = \overline{(x^3)} + \overline{(ax^2)} + \overline{(bx)} + \bar{c} = \overline{(x^3 + ax^2 + bx + c)} = \bar{0} = 0$

$\boxed{9. \text{ CV.}}$

– příští týden písemka

1) Nechť $\lim_{x \to a} f(x) = L < 0$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$. Dokažte, že $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = -\infty$

Víme: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > K)$

Chceme: $(\forall M \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) g(x) < M)$

$|f(x) - L| < -\frac{L}{2} \quad (\varepsilon = -\frac{L}{2})$

$\frac{L}{2} < f(x) - L < -\frac{L}{2}$

$\delta_1 \quad f(x) < \frac{L}{2} \qquad g(x) > K = \frac{2}{L} \cdot M$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \quad f(x) g(x) < \frac{LK}{2} = M$

* $T \subset \mathbb{R}$ je těleso, $d \in T$, $\sqrt{d} \notin T$. $T_1 = T[\sqrt{d}]$ je těleso. Nechť $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_i \in T$ má kořen $x_1 = \alpha + \beta\sqrt{d}$. Pak má rovněž kořen v T.

$x_1 = \alpha + \beta\sqrt{d}$, $\beta = 0$ $x_1 \in T$

$\beta \neq 0$: v T_1 umíme napsat, že $x_2 = \alpha - \beta\sqrt{d}$ je také kořen

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - \alpha + \beta\sqrt{d})(x - \alpha - \beta\sqrt{d})(a_3x + b)$$

$$x^2: \quad a_2 = b - a_3(\alpha - \beta\sqrt{d}) - a_3(\alpha + \beta\sqrt{d}) = b - 2a_3\alpha$$

$$b = a_2 + 2a_3\alpha \in T$$

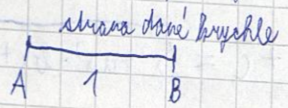
$$x_3 = -\frac{b}{a_3} \in T$$

* Dokázali jsme již dříve: máme-li v rovině konečnou ~~soustavu~~ množinu bodů se souřadnicemi v tělese $T \subset \mathbb{R}$. Pak všechny body zkonstruované pomocí pravítka a kružítka mají souřadnice v některém tělese T_k, kde $T = T_0 \subset T_1 = T_0[\sqrt{d_1}] \subset T_2 = T_1[\sqrt{d_2}] \subset \dots$

Spojením tohoto výsledku s předchozím můžeme dokázat dvě věti

1. Z dané krychle nelze pravítkem a kružítkem sestrojit krychli dvojnásobného objemu
2. Existuje úhel, který nelze pomocí pravítka a kružítka rozdělit na třetiny

1)



strana krychle dvojnásobného objemu splňuje rovnici $x^3 = 2$.
Body A, B mají souřadnice v $\mathbb{Q}$

Mějme rovnici $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s koeficienty v T_0.
Má-li kořen v T_k, pak má kořen v T_{k-1} (neboť koeficienty jsou v $T_0 \subset T_{k-1}$). Pak má kořen v T_{k-2} (koeficienty v $T_0 \subset T_{k-2}$), atd., až má kořen v T_0.

$$x^3 - 2 = 0.$$

Kořen v T_k implikuje kořen v $T_0 = \mathbb{Q}$.

2)

$\operatorname{tg} 3\alpha \in \mathbb{Q}$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

v písemce součtové vzorce

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}(2\alpha)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

$$\operatorname{tg}(3\alpha)(1 - 3x^2) = 3x - x^3$$

$x^3 - 3\,tg(3\alpha)x^2 - 3x + tg(3\alpha) = 0$

$tg(3\alpha) \in \mathbb{Q}$, pokud 3α lze rozdělit na třetiny, pak rovnice má řešení v $T_k \Rightarrow$ má řešení v $T_0 = \mathbb{Q}$

$tg(3\alpha) = \frac{1}{2}$: $\quad x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \quad$ nemá kořen v $\mathbb{Q}$.

$2x^3 - 3x^2 - 6x + 1 = 0$

$x \in \{-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ a ty opravdu nefungují

\# $I \subseteq \mathbb{R}$. Co znamená, že funkce $f_n : I \to \mathbb{R}$ konvergují stejnoměrně na I k funkci f

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ekviv. definice:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall n > n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

- $x \in I$ pevné: $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$
- Pro všechna $x \in I$ $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$:

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

* posloupnost $f_n(x) = x^n$, $x \geq 0$

k čemu konvergují pro pevné x?: $\quad x^n \to 1$ pro $x = 1$

$x^n \to 0$ pro $0 \leq x < 1$

$x^n \to \infty$ pro $x > 1$

posloupnost $f_n(x) = x^n$ na intervalu $[0,1]$.

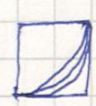
$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad f(x) = 0$ pro $x \in [0,1)$

$f(1) = 1$

je tato konvergence stejnoměrná? Ukažme, že není

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists x \in [0,1])(\exists n > n_0)(|x^n - f(x)| > \varepsilon)$$

$[0,1)$



$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\forall n_0$

vezmeme libovolné $n > n_0$

Chceme ukázat, že existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $x^n > \frac{1}{2}$, to plyne ze spojitosti x^n:

$1^n = 1$: Pro $\frac{1}{2}$ existuje $\delta > 0$ $\quad x \in (1-\delta, \delta]$ je $1 - \frac{1}{2} < x^n$

$\frac{1}{2} < x^n$

* ukažme, že $x^n \rightrightarrows 0$ na $[0,a]$ pro $a<1$.

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n>n_0)(\forall x\in[0,a])(0\leq x^n \leq \varepsilon)$

x^n je rostoucí funkce: na $[0,a]$ je $x^n < a^n$. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Pro každé $\varepsilon>0$ $\exists n_0 \forall n>n_0$ je $0\leq a^n<\varepsilon$

Proto $\forall x\in[0,a]$ je $0\leq x^n\leq a^n<\varepsilon$.

- DÚ (neodevzdává se): $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$

na $[0,\infty)$ a na $[0,a)$, $a<\infty$,

k čemu posloupnosti konverguje, je konvergence stejnoměrná

sÚ (neodev.)

- Ukažte, že f_n spojité a $f_n \rightrightarrows f$ na I, pak f je spojitá

$x_0\in I$: $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

pro dost malé δ ze spojitosti

pro dost velké n ze stejnoměrné spojitosti

$\boxed{10. CV.}$

* Nechť U je prostor nad $\mathbb{C}$ se skal. součinem. Nechť $f: U\to\mathbb{C}$ je lin. forma. Pak existuje právě jeden vektor $v\in U$ tak, že

$$f(u) = \langle u, v\rangle$$

existence: $f\equiv 0$, pak $v=\vec{0}$

$f\not\equiv 0$, pak $\dim\ker f = \dim U - \dim\operatorname{Im} f = \dim U - 1$

$\ker f \subsetneq U$

$u\in\ker f$, tedy $0=f(u)=\langle u,v\rangle \Rightarrow v\in(\ker f)^{\perp}$

nechť $w\in(\ker f)^{\perp}\setminus\{0\}$, hledáme a tak, aby

$f(u) = \langle u, aw\rangle$

Za u dosadíme w: $f(w) = \langle w, aw\rangle$

$\bar{a} = \frac{f(w)}{\langle w,w\rangle}$ $\quad a = \frac{\overline{f(w)}}{\|w\|^2}$

Nyní $v = a w$ má požadované vlastnosti:

každý $u \in U$ je tvaru

$$u = \underset{\ker f}{\underset{\Uparrow}{u_1}} + \underset{(\ker f)^\perp}{\underset{\Uparrow}{b v}}$$

$$f(u) = f(\cancel{a} u_1 + b v) = f(u_1 + b v) = \underset{0}{\underset{\parallel}{f(u_1)}} + b f(v) = b a f(w)$$

$$\langle u, v \rangle = \langle u_1 + b a w, a w \rangle = b |a|^2 \langle w, w \rangle = b \frac{|f(w)|^2}{\|w\|^4} \cdot \|w\|^2$$

jednoznačnost: Jestliže $\forall u \quad \langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$

$$\forall u \quad \langle u, v_1 - v_2 \rangle = 0$$

$$\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = 0$$

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$