$\boxed{1. \text{CV.}}$

- zápočet – účast (max. 3 neomluvené absence)
  - 8 kontrolních písemek z tématu z předchozího cvičení (písemky za 2 body, potřeba 8 bodů)
  - nepovinné domácí úlohy v ISu (podobné úlohy jak na písemkách)
  - opravná písemka

  nejsou předem hlášeny

* Vypočtěte následující determinant z matice řádu n nad $\mathbb{Z}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & \cdots & 3n-8 & 3n-5 & 3n-2 \\ 3n-2 & 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-11 & 3n-8 & 3n-5 \\ 3n-5 & 3n-2 & 1 & 4 & \cdots & 3n-14 & 3n-11 & 3n-8 \\ 3n-8 & 3n-5 & 3n-2 & 1 & \cdots & 3n-17 & 3n-14 & 3n-11 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 13 & 16 & 19 & \cdots & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 10 & 13 & 16 & \cdots & 3n-2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & \cdots & 3n-5 & 3n-2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\check{r}_1-\check{r}_2,\ \check{r}_2-\check{r}_3 \ldots} \begin{vmatrix} 3-3n & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3-3n & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3-3n & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3-3n & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3-3n & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3-3n & 3 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & \cdots & 3n-5 & 3n-2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3^{n-1} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & \cdots & 3n-5 & 3n-2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{odečteme pos. sloupec}}{=} 3^{n-1} \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \cdots & 3n-6 & 3n-3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3^{n-1}}{n} \cdot \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & n \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \cdots & 3n-6 & 3n-3 & n \end{vmatrix} = \frac{3^{n-1}}{n} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \cdots & 3n-6 & 3n-3 & \frac{n(3n+1)}{2} \end{vmatrix}}_{\text{dolní trojúhelníková matice}} =$$

$$3+6+\cdots+(3n-3)+n = 3\cdot n\cdot\frac{n-1}{2}+n = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$= \cancel{(-n)^{n-1}}\,\frac{3^{n-1}}{n}\cdot(-n)^{n-1}\cdot\frac{n(3n+1)}{2} = (-3)^{n-1}\cdot\frac{n^{n-1}(3n+1)}{2}$$

* V závislosti na hodnotách parametrů $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$ vypočtěte následující determinant z matice řádu $n+1$ nad $\mathbb{R}$.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = a_n(-1)^{n+2} \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}}_{\text{horní trojúhelník. matice}} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = a_n(-1)^{n+2} \cdot x^n + D_{n-1} = a_n(-1)^n \cdot x^n + a_{n-1}(-1)^n x^n + D_{n-2} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} a_i(-1)^i \cdot x^i + D_1 = \sum_{i=0}^{n} a_i(-1)^i x^i$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = a_0 - a_1 x$$

* V závislosti na hodnotách $a, b \in \mathbb{R}$ řešte soustavu nad $\mathbb{R}$:

$$x + ay - az = 1$$
$$ax - ay + z = b$$
$$ax + y - az = b$$

Proveďte kompletní diskusi řešení v závislosti na hodnotách $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & 1 \\ a & -a & 1 & b \\ a & 1 & -a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & 1 \\ 0 & -a-a^2 & 1+a^2 & b-a \\ 0 & 1-a^2 & -a+a^2 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & 1 \\ 0 & a^2+a & -1-a^2 & a-b \\ 0 & a+1 & -1-a & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & 1 \\ 0 & a^2+a & -1-a & 0 \\ 0 & 0 & -1+a & a-b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

diskuse: 1) $a = 1 \wedge b \neq 1$: nemá řešení

2) $a = 1 \wedge b = 1$: množina všech řešení je lineární varieta

$(1,0,0) + [(0,1,1)]$

3) $a = -1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{-b+1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+1}{2} \end{array}\right)$$

množinou všech řešení je lineární varieta

$\left(\frac{1-b}{2}, 0, \frac{1+b}{2}\right) + [(1,1,0)]$

4) $a \notin \{-1, 1\}$

$$z = \frac{a-b}{a-1}$$

$$(a+1)y - (a+1)\cdot\frac{a-b}{a-1} = 0$$

$$y = \frac{a-b}{a-1}$$

$$x = 1$$

jediné řešení $\left(1, \frac{a-b}{a-1}, \frac{a-b}{a-1}\right)$

* Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ jsou dány vektorové podprostory U a V následovně. Vektorový podprostor U je zadán jako ~~xxx~~ množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s reálnými koeficienty

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

a ~~xxx~~ vektorový podprostor V je zadán jako lineární obal vektorů $V = [v_1, v_2, v_3]$, kde

$v_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1, 1, -1)$

Zjistěte průnik vek. podprostorů $U \cap V$. Najděte nějakou bázi $U \cap V$.

řešení: $V = \{a v_1 + b v_2 + c v_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{(a+b+c, -a-b+c, a-b-c, -a+b+c, a+b-c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$$U \cap V = \left\{ (p, q, r, s, t) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; (p, q, r, s, t) \in V,\ \begin{matrix} p - q + r + s - t = 0 \\ p + q - r - s + t = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left.\begin{matrix} a+b+c+a+b-c+a-b-c-a+b+c-a-b+c = 0 \\ a+b+c-a-b+c-a+b+c+a-b-c+a+b-c = 0 \end{matrix}\right\} c = -a-b$$

$$U \cap V = \{a v_1 + b v_2 - (a+b) v_3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(v_1 - v_3) + b(v_2 - v_3) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$v_1 - v_3 = (0, -2, 2, -2, 2)$$

$$v_2 - v_3 = (0, -2, 0, 0, 2)$$

$$U \cap V = [(0, -1, 1, -1, 1), (0, -1, 0, 0, 1)] = [\underbrace{(0, 1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, -1, 0)}_{\text{báze}}]$$

* Mějme lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, které je pro libovolný polynom $p(x)$ s reálnými koeficienty stupně nejvýše 3 dáno předpisem

$$\varphi(p(x)) = \int_0^x p(t)\,dt + \int_0^x t p'(t)\,dt + \int_0^x t p''(t)\,dt$$

Najděte matici lineárního zobrazení $\sigma = (1, x, x^2, x^3)$, $\tau = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

řešení: $\vartheta(1) = x$

$\vartheta(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x^2$

$\vartheta(x^2) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{3} + x^2 = x^3 + x^2$

$\vartheta(x^3) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^4}{4} + 2x^3 = x^4 + 2x^3$

hledaná matice je
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vartheta)_{\tau,\sigma}$$

$\boxed{2.\,\text{CV.}}$

* Nechť M je nejmenší afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující body

$$A = [1,3,-2,-1],\ B = [2,-1,-3,-2],\ C = [3,2,-1,1].$$

Pak M je očividně afinní rovina v $\mathbb{R}_4$

Najděte implicitní popis afinní roviny M pomocí soustavy lineárních rovnic.

řeš.: parametrický popis je

$$M: X = A + s(B-A) + t(C-A) = [1,3,-2,-1] + s(1,-4,-1,-1) + t(2,-1,1,2)$$

převod na implicitní

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

řešením tohoto je $\langle (5,3,-7,0),\ (9,4,0,-7) \rangle$

$$5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 28,$$
$$9x_1 + 4x_2 - 7x_4 = 28.$$

(dosazením libovolného bodu zjistíme pravé strany)

* Nechť P je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^4$ zadaný parametrickým popisem

$$X = [2,3,1,3] + s(-1,1,0,2) + t(0,2,-3,2)$$

Nechť Q je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^4$ zadaný parametrickým popisem

$$X = [-1,0,2,1] + u(3,5,-8,3) + v(1,1,1,1)$$

Zřejmě P i Q jsou afinní roviny v prostoru $\mathbb{R}^4$

Zjistěte zda průnik $P \cap Q$ těchto dvou afinních rovin je neprázdný, zda má kladnou dimenzi, a je-li tomu tak, pak najděte parametrický popis afinního podprostoru $P \cap Q$ a zjistěte jeho dimenzi

P: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\langle (3,3,2,0), (1,-1,0,2) \rangle$

P: $3x_1+3x_2+2x_3=17$

$x_1-x_2+x_4=2$

Q: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -11 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 13 & 2 \\ 0 & 2 & -11 & 2 \end{pmatrix}$

$\langle (13,-11,-2,0), (2,0,0,-2) \rangle$

$13x_1-11x_2-2x_3=-17$

$\cancel{2x_1-2}x_1-x_4=-2$

$P \cap Q$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 13 & -11 & -2 & 0 & -17 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 23 \\ 0 & -11 & -2 & 13 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 35 \\ 0 & 0 & -2 & -9 & -35 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$P \cap Q \neq \emptyset \quad \dim P \cap Q \neq 0$

$P \cap Q$: $X = [1,2,4,3] + w \cdot (2,4,-9,2)$

$\dim P \cap Q = 1$

* Nechť P je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^4$ mající implicitní popis ve tvaru soustavy tří lineárních rovnic

$x_1+2x_2+x_3+x_4=29$

$x_1+3x_2+3x_3+x_4=50$

$x_1+4x_2+3x_3+2x_4=59$

Nechť Q je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{R}^4$ mající implicitní popis ve tvaru soustavy lineárních rovnic

$x_1+x_2+2x_3+x_4=31$

$x_1+2x_2+x_3+3x_4=36$

$x_1+3x_2+4x_3+3x_4=63$

Zjistěte dimenze afinních podprostorů P, Q v $\mathbb{R}^4$ a zjistěte, zda jejich průnik je či není prázdný. Nalezněte spojení $P \sqcup Q$, najděte implicitní popis $P \sqcup Q$ a určete jeho dimenzi

$P: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 29 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 50 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 59 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right)$

$P: \quad X = \underbrace{[5,9,6,0]}_{A} + s\underbrace{(1,-2,1,2)}_{u}$

P je afinní přímka v $\mathbb{R}^4$ $\quad \dim P = 1$

$Q: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 31 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 36 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 63 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 11 \end{array}\right)$

$X = \underbrace{[9,9,6,1]}_{B} + s\underbrace{(1,3,-1,-2)}_{v}$

Q je afinní přímka v $\mathbb{R}^4$ $\quad \dim Q = 1$

platí $P \cap Q \neq \emptyset \iff B - A \in \langle u, v\rangle$

$\begin{array}{c} u \\ v \\ B-A \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ přidáním posledního řádku

zvedla hodnost, tedy $B - A \notin \langle u, v\rangle$

tedy $P \cap Q = \emptyset$.

$\mathcal{L}(P \sqcup Q) = \langle u, v, B-A\rangle$

$\dim(P \sqcup Q) = 3$

$P \sqcup Q: \ X = A + \langle u, v, B-A\rangle = [5,9,6,0] + r(1,-2,1,2) + q(0,5,-2,-4) + m(0,0,4,3)$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

řešením je $\langle (1,-2,3,-4)\rangle$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5$

* v prostoru $\mathbb{R}^4$ je dána přímka $\quad p: X = [5,7,3,-1] + s(1,3,-2,-5)$

a rovinou ρ: $\quad x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 10$

$\qquad x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 5$

přímka p a ρ jsou mimoběžné

dále je dán bod $D = [4,3,6,7]$

Pak $D \notin p$ a $D \notin \varrho$. Najděte přímku q procházející bodem D a protínající přímku p i rovinu ϱ.
Najděte průsečíky přímky q s přímkou p i s rovinou ϱ.

řešení: ~~...~~ existuje-li požadovaná přímka q, pak přímka q leží v rovině $p \sqcup \{D\}$.

$p \sqcup \{D\}$: $X = [5,7,3,-1] + s(1,3,-2,-5) + t(-1,-4,3,8)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -5 \\ -1 & -4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle (1,-1,-1,0), (4,-3,0,-1) \right\rangle$$

$p \sqcup \{D\}$: $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -5 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

Vypočteme $(p \sqcup \{D\}) \cap \varrho$:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 6 & 10 \\ 1 & -3 & 6 & 7 & 5 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$(p \sqcup \{D\}) \cap \varrho = \{[7,9,3,1]\}$

Existuje-li požadovaná q, pak to tedy musí být přímka

q: $X = [4,3,6,7] + u\cdot(3,6,-3,-6) = [4,3,6,7] + v(1,2,-1,-2)$

Potom $q \cap \varrho = \{[7,9,3,1]\}$

Dále zjistíme $p \cap q$.

Body přímky p jsou $[5+s, 7+3s, 3-2s, -1-5s]$

Body přímky q jsou $[4+v, 3+2v, 6-v, 7-2v]$

$$\left.\begin{aligned} 5+s &= 4+v \\ 7+3s &= 3+2v \\ 3-2s &= 6-v \\ -1-5s &= 7-2v \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &14-3s=20 \\ &s=-2 \\ &v=-1 \end{aligned}$$ zkouška s, v vyhovují

Takže $p \cap q = \{[3,1,7,9]\}$

q je tedy hledaná přímka

$\boxed{2.\text{PŘ.}}$

$[F]_{\mathcal{L},\mathcal{B}}$ $[\ell]_{\mathcal{L},\mathcal{B}}$

$\boxed{3.\text{CV.}}$

* V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu nadroviny

$$n: X = [3,2,5,1] + r\cdot(1,2,3,4) + s\cdot(1,3,5,7) + t\cdot(1,4,8,9)$$

a přímky

$$p: X = [8,5,4,2] + v\cdot(4,3,1,2)$$

– řešení:

$$[8,5,4,2] - [3,2,5,1] = (5,3,-1,1)$$

$$\begin{array}{l} Z(n)+Z(p)\\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1&2&3&4\\ 1&3&5&7\\ 1&4&8&9\\ \hline 4&3&1&2\\ \hline 5&3&-1&1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1&2&3&4\\ 0&1&2&3\\ 0&2&5&5\\ \hline 0&-5&-11&-14\\ \hline 0&-7&-16&-19 \end{array} \right) \sim (\ \cdots\ ) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1&2&3&4\\ 0&1&2&3\\ 0&0&1&-1\\ \hline 0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0 \end{array} \right)$$

$$\dim n = \dim Z(n) = 3 \qquad \dim(Z(n)+Z(p)) = 3$$

tedy $Z(n)+Z(p) = Z(n)$ (z rovnosti dimenzí a inkluze)

$$Z(p) \subseteq Z(n)$$

$$[8,5,4,2]-[3,2,5,1] \in Z(n)+Z(p)$$

$$p \cap n \neq \emptyset$$

tedy přímka p je obsažena v nadrovině n

* V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu rovin

$$\rho: X = [4,15,2,5] + s(1,2,7,8) + t(3,8,5,2)$$

$$n: X = [5,1,7,9] + u(1,5,9,11) + v(2,7,3,1)$$

– řešení

$$[5,1,7,9]-[4,15,2,5] = (1,-14,5,4)$$

$$Z(\rho)+Z(\eta)\left\{\begin{matrix} Z(\rho)\left\{\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right. \\ \\ \\ \end{matrix}\right.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 9 & 11 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -14 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -16 & -22 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -11 & -15 \\ \hline 0 & -16 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & -11 \\ \hline 0 & 0 & 26 & 36 \\ 0 & 0 & 13 & 18 \\ \hline 0 & 0 & 65 & 90 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & -11 \\ \hline 0 & 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(Z(\rho)+Z(\eta))=3$ $\quad \dim(Z(\rho)\cap Z(\eta))=2+2-3=1$

a tedy $Z(\rho)\not\subseteq Z(\eta) \wedge Z(\eta)\not\subseteq Z(\rho)$

$[5,1,7,9]-[4,15,2,5]\in Z(\rho)+Z(\eta) \Rightarrow \rho\cap\eta\neq\emptyset$

Roviny jsou různoběžné, jejich průnikem je přímka

* V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu přímky

$p: X=[3,7,1,10]+s(1,-2,3,-4)$ $\qquad p=[3,7,1,10]+\langle(1,-2,3,-4)\rangle$

a roviny

$\rho: X=[4,2,8,1]+u(1,-3,4,-5)+v(1,-4,6,-7)$

– řešení:

$[4,2,8,1]-[3,7,1,10]=(1,-5,7,-9)$

$$Z(\rho)+Z(p)\left\{\begin{matrix} Z(\rho)\left\{\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right. \\ \\ \\ \end{matrix}\right.\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 & 7 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ \hline 1 & -5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(Z(\rho)+Z(p))=3$

$\dim(Z(\rho)\cap Z(p))=3-(2+1)=0$

$\Rightarrow Z(p)\not\subseteq Z(\rho)$

$[4,2,8,1]-[3,7,1,10]\notin Z(\rho)+Z(p)$

$\Rightarrow p\cap\rho=\emptyset$

tedy p i ρ jsou mimoběžné (úplně)

* V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu roviny

ρ: $x_1+x_2-2x_3+3x_4=2,$

$2x_1-2x_2+3x_3-4x_4=8,$

a nadroviny

η: $x_1-3x_2+5x_3-7x_4=9.$

Řešení: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -4 \end{array}\right)$

$$\rho: X = [3,-1,0,0] + s\cdot(1,7,4,0) + t(1,5,0,2)$$

$$(1 \ -3 \ 5 \ -7 \mid 9)$$

$$\eta: X = [9,0,0,0] + u(3,1,0,0) + v(-5,0,1,0) + w(7,0,0,1)$$

$$[9,0,0,0] - [3,-1,0,0] = (6,1,0,0)$$

řádky se nesmí prohazovat

$$Z(\eta)+Z(\rho)\left\{ \begin{array}{l} Z(\eta)\left\{ \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \\ \begin{array}{cccc} 1 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{array} \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 20 & 12 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & -6 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\dim(Z(\eta)+Z(\rho)) = 3 = \dim Z(\eta) \Rightarrow Z(\eta)+Z(\rho) = Z(\eta)$$

$$Z(\rho) \subseteq Z(\eta)$$

$$[9,0,0,0]-[3,-1,0,0] \notin Z(\eta)+Z(\rho) \Rightarrow \rho \cap \eta = \emptyset$$

ρ, η rovnoběžnost. Rovina ρ není obsažena v nadrovině η.

* V prostoru R^4 jsou dány roviny

$$\rho: x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$$
$$x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$\eta: x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 2.$$

Najděte přímku p procházející bodem $B=[2,-2,3,3]$ rovnoběžnou s rovinou ρ a protínající rovinu η. Najděte průsečík této přímky p s rovinou η.

– řešení: Rovina obsahující bod B rovnoběžná s rovinou ρ, označme ji μ

$$\mu: \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$ (pravé strany dosazením bodu B)

$$\mu \cap \eta: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mu \cap \eta = \{[7, 1, -1, 2]\}$$

$$\mu \cap \eta = p \cap \eta \qquad p \cap \eta = \{[7, 1, -1, 2]\}$$

přímka p je proložena body

$$B = [2, -2, 3, 3], \quad [7, 1, -1, 2]$$

$$p: X = [2, -2, 3, 3] + s(5, 3, -4, -1)$$

$\boxed{3. \text{PŘ.}}$

$\boxed{4. \text{CV.}}$

* Nechť symetrická bilineární forma f na vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^3$ vyjádření

$$f(x, y) = x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_1 + 3x_2 y_3 - x_3 y_1 + 3x_3 y_2$$

Metodou stejných elementárních řádkových a sloupcových úprav matice sym. bilineární formy f upravte tuto bilineární formu na diagonální tvar, v němž se budou vyskytovat pouze koeficienty $-1, 1, 0$ v tomto pořadí. Nalezněte bázi B prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, aby v souřadnicích vzhledem k bázi B měla bilineární forma f nalezený diagonální tvar

– Řešení: Matici bilineární formy f ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak $f(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & -1 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & -1 & 1\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -1 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -1 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1\\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -3 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & & & \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & & & \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & & & \end{array}\right)$$

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Závěr: buď B báze vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$ taková, aby $P=(id_{\mathbb{R}^3})_{\varepsilon,B}$ byla matice přechodu od báze B ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Pak $B=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\right)$.

Mějme souřadnice $(x)_B=(u_1,u_2,u_3)$, $(y)_B=(w_1,w_2,w_3)$.

Pak $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$

Odtud plyne

$$f(x,y)=(u_1,u_2,u_3)\cdot P^T\cdot A\cdot P\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=(u_1,u_2,u_3)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

takže $f(x,y)=u_1w_1+u_2w_2-u_3w_3$ je ~~bilineární~~ ~~výraz~~ vyjádření bilineární formy f v souřadnicích vzhledem k bázi B

– řešení jinak:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 1 & 2 & -1/2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 1/2 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3/8 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \hline 1 & 2 & -1/2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 1/2 & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3/8 & -3/4 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \hline 1 & 2 & -\frac{3}{4} & & & \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & & & \\ 1 & 2 & 1/4 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \hline \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & & & \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & & & \\ \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & 0 & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \end{array}\right) \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- buď $\overline{B}$ báze vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$ taková, aby $Q = (id_{\mathbb{R}^3})_{\varepsilon, \overline{B}}$ byla matice přechodu od báze $\overline{B}$ ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Pak $\overline{B} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$

- mějme souřadnice $(x)_{\overline{B}} = (s_1, s_2, s_3)$, $(y)_{\overline{B}} = (t_1, t_2, t_3)$

Pak $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$

Odtud plyne $f(x,y) = (s_1, s_2, s_3) \cdot Q^T \cdot A \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = (s_1, s_2, s_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$

takže $f(x,y) = s_1 t_1 + s_2 t_2 - s_3 t_3$

* Nechť kvadratická forma H na vekt. prostoru $\mathbb{R}^4$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^4$ vyjádření

$$H(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_4^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_1x_4 - 10x_2x_3 - 12x_2x_4 - 14x_3x_4$$

Najděte symetrickou bilineární formu h na vekt. prostoru $\mathbb{R}^4$ vytvářející kvadratickou formu H v tom smyslu, že pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^4$ platí

$$H(x) = h(x,x).$$

– řešení: Hledaná symetrická bilineární forma h má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^4$ vyjádření

$$h(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + 5x_4y_4 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 4x_1y_4 +$$
$$4x_4y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2 - 6x_2y_4 - 6x_4y_2 - 7x_3y_4 - 7x_4y_3$$

matice C formy H a h ve stand. bázi prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -6 \\ 3 & -5 & 4 & -7 \\ 4 & -6 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

takže $H(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$h(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.PŘ.}$

$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ podobnost matic $\qquad \cancel{h \neq x^{-1} \cdot h \cdot x} \qquad \cancel{h \neq x^{-1} h' x}$

– zápis: 4. a 5. př. z minulého roku

$\boxed{5.CV.}$

* Nechť kvadratická forma F na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^4$ vyjádření

$$F(x) = 9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 + 9x_4^2 + 18x_1x_2 - 18x_1x_3 - 6x_1x_4 + 7x_2x_3 + 4x_2x_4 + 16x_3x_4$$

Metodou doplňování na čtverce upravte ~~oo~~ tuto kvadratickou formu na diagonální tvar obsahující pouze koeficienty 1, -1, 0 v tomto pořadí. Najděte bázi β prostoru $\mathbb{R}^4$ takovou, aby v souřadnicích vzhledem k ~~…~~ bázi β měla kvad. forma F ~~…~~ nalezený diagonální tvar

$$F(x) = 9(x_1 + x_2 - x_3 - \tfrac{1}{3}x_4)^2 + 25x_2x_3 + 10x_2x_4 + 10x_3x_4$$

$$y_1 = x_1 + x_2 - x_3 - \tfrac{1}{3}x_4 \qquad x_1 = y_1 - y_2 + y_3 + \tfrac{1}{3}y_4$$
$$y_2 = x_2 \qquad x_2 = y_2$$
$$y_3 = x_3 \qquad x_3 = y_3$$
$$y_4 = x_4 \qquad x_4 = y_4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop S} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = 9y_1^2 + 25y_2y_3 + 10y_2y_4 + 10y_3y_4$$

$$y_1 = z_1$$
$$y_2 = z_2 + z_3$$
$$y_3 = z_2 - z_3$$
$$y_4 = z_4$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop T} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = 9z_1^2 + 25z_2^2 - 25z_3^2 + 20z_2z_4$$

$$F(x) = 9z_1^2 + 25\left(z_2 + \tfrac{2}{5}z_4\right)^2 - 25z_3^2 - 4z_4^2$$

$$s_1 = z_1 \qquad z_1 = s_1$$
$$s_2 = z_2 + \tfrac{2}{5}z_4 \qquad z_2 = s_2 - \tfrac{2}{5}s_4$$
$$s_3 = z_3 \qquad z_3 = s_3$$
$$s_4 = z_4 \qquad z_4 = s_4$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop U} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = 3s_1 \qquad s_1 = \tfrac{1}{3}u_1$$
$$u_2 = 5s_2 \qquad s_2 = \tfrac{1}{5}u_2$$
$$u_3 = 5s_3 \qquad s_3 = \tfrac{1}{5}u_3$$
$$u_4 = 2s_4 \qquad s_4 = \tfrac{1}{2}u_4$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{V} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

přitom
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = S \cdot T \cdot U \cdot V \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot T \cdot U \cdot V = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/5 & 1/6 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

buď B báze vek. prostoru $\mathbb{R}^4$ taková, aby $S \cdot T \cdot U \cdot V$ byla matice přechodu od báze B ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Pak

$B=\left((\frac{1}{7},0,0,0),(0,\frac{1}{5},\frac{1}{5},0),(-\frac{2}{5},\frac{1}{5},-\frac{1}{5},0),(\frac{1}{6},-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{2})\right)$

Přitom (u_1,u_2,u_3,u_4) jsou souřadnice vektoru $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ vzhledem k bázi B

Kvadratická forma F tedy nabývá výše uvedeného diagonálního tvaru v souřadnicích vzhledem k bázi B prostoru $\mathbb{R}^4$.

* stejné zadání

$$F(x)=4x_1x_2+2x_1x_3+6x_1x_4+18x_2x_3+24x_2x_4+34x_3x_4$$

$x_1=y_1+y_2$

$x_2=y_1-y_2$

$x_3=y_3$

$x_4=y_4$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{S}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

$$F(x)=4y_1^2-4y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3+6y_1y_4+6y_2y_4+18y_1y_3-18y_2y_3+24y_1y_4-24y_2y_4+34y_3y_4$$

$$F(x)=4y_1^2-4y_2^2+20y_1y_3-16y_2y_3+30y_1y_4-18y_2y_4+34y_3y_4$$

$$F(x)=4\left(y_1+\frac{5}{2}y_3+\frac{15}{4}y_4\right)^2-4y_2^2-25y_3^2-\frac{225}{4}y_4^2-16y_2y_3-18y_2y_4-36y_3y_4$$

$z_1=y_1+\frac{5}{2}y_3+\frac{15}{4}y_4$

$z_2=y_2$

$z_3=y_3$

$z_4=y_4$

$y_1=z_1-\frac{5}{2}z_3-\frac{15}{4}z_4$

$y_2=z_2$

$y_3=z_3$

$y_4=z_4$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{2}&-\frac{15}{4}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{T}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}$$

$$F(x)=4z_1^2-4z_2^2-25z_3^2-\frac{225}{4}z_4^2-16z_2z_3-18z_2z_4-36z_3z_4$$

$$F(x)=4z_1^2-4\left(z_2+2z_3+\frac{9}{4}z_4\right)^2-9z_3^2-36z_4^2\ \cancel{-16z_3z_4}$$

$z_1=$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1 \\ s_2 &= r_2 + 2r_3 + \tfrac{9}{4} r_4 \\ s_3 &= r_3 \\ s_4 &= r_4 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} r_1 &= s_1 \\ r_2 &= s_2 - 2s_3 - \tfrac{9}{4} s_4 \\ r_3 &= s_3 \\ r_4 &= s_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = 4s_1^2 - 4s_2^2 - 9s_3^2 - 36s_4^2$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 2s_1 \\ w_2 &= 2s_2 \\ w_3 &= 3s_3 \\ w_4 &= 6s_4 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} s_1 &= \frac{w_1}{2} \\ s_2 &= \frac{w_2}{2} \\ s_3 &= \frac{w_3}{3} \\ s_4 &= \frac{w_4}{6} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}}_{V} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2$$

Přitom
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = S \cdot T \cdot U \cdot V \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

přičemž vyjde
$$S \cdot T \cdot U \cdot V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Buď B báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ taková, aby $S \cdot T \cdot U \cdot V$ byla maticí přechodu od báze B ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Pak

$$B = \left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0\right), \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0\right), \left(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, 0\right), \left(-1, -\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{6}\right) \right)$$

Přitom (w_1, w_2, w_3, w_4) jsou souřadnice vektoru $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vzhledem k bázi B. Kvadratická forma F nabývá výše uvedeného diagonálního tvaru v souřadnicích vzhledem k bázi B prostoru $\mathbb{R}^4$.

6. CV.

* V Euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{E}_4$, to jest ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem najděte ortonormální bázi vekt. podprostoru U zadaného jako lineární obal $U = [r, s, t]$ vektorů

$$r = (1,5,5,7),\ s = (7,9,17,9),\ t = (5,21,3,25).$$

Aplikujte techniku Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu s následným normováním vektorů

- řešení: ortogonální báze podprostoru U: (u, v, w)

I: $u = r = (1,5,5,7)$

v hledáme ve tvaru $v = s + k\cdot u$ pro vhodné $k \in \mathbb{R}$.

II: aplikací skalárního součinu dostaneme: $\langle v, u\rangle = 0$

$$\langle v,u\rangle = \langle s,u\rangle + k\cdot\langle u,u\rangle$$

$$k = -\frac{\langle s,u\rangle}{\langle u,u\rangle} = -\frac{200}{100} = -2$$

$$v = (7,9,17,9) - (2,10,10,14) = (5,-1,7,-5)$$

III: w hledáme ve tvaru $w = t + p\cdot u + q\cdot v$ pro vhodná p, q reálná.

aplikacemi skalárního součinu dostaneme

$$0 = \langle w,u\rangle = \langle t,u\rangle + p\langle u,u\rangle + q\underbrace{\langle v,u\rangle}_{0}$$

$$\cancel{0 = \langle w,v\rangle = \langle t,u\rangle +}$$

$$p = \frac{-\langle t,u\rangle}{\langle u,u\rangle} = -\frac{300}{100} = -3$$

$$0 = \langle w,v\rangle = \langle t,v\rangle + p\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0} + q\langle v,v\rangle$$

$$q = \frac{-\langle t,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = -\frac{-100}{100} = 1$$

$$w = (5,21,3,25) + (-3,-15,-15,-21) + (5,-1,7,-5) = (7,5,-5,-1)$$

normy vektorů:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = 10$$

$$\|v\| = 10$$

$$\|w\| = 10$$

ortonormální báze vektor. podprostoru U: (e, f, g)

$e = \frac{1}{10}(1,5,5,7) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$f = \frac{1}{10}(5,-1,7,-5) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, -\frac{1}{2}\right)$

$g = \frac{1}{10}(7,5,-5,-1) = \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\right)$

* Nechť kvadratická forma F má na vekt. prostoru $\mathbb{R}^4$ ve standardních souřadnicích vyjádření tvaru $F(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4$.

Metodou doplňování na čtverce převedeme F na diagonální tvar:

$$F(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_2 \\ z_2 &= x_2 - x_3 \\ z_3 &= x_3 - x_4 \\ z_4 &= x_4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\ x_2 &= z_2 + z_3 + z_4 \\ x_3 &= z_3 + z_4 \\ x_4 &= z_4 \end{aligned}$$

F je pozitivně definitní na vekt. prostoru $\mathbb{R}^4$

Najdeme symetrickou bilineární formu f na vek. prostoru $\mathbb{R}^4$ určující kvad. formu F v tom smyslu, že $(\forall x \in \mathbb{R}^4)(F(x) = f(x,x))$. f má ve standardních souřadnicích vyjádření

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_4 - x_4y_3$$

$$f(x,y) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Symetrická bilineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^4$ je skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^4$.

* V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ o výše definovaným skalárním součinem najděte ortogonální doplněk vekt. podprostoru $V = [(2,1,-3,-2), \ldots]$ generovaného vektory $v = (2,1,-3,-2)$, $w = (3,4,2,-1)$

– řešení: ortogonální doplněk podprostoru V v prostoru $\mathbb{R}^4$ vzhledem ke skalárnímu součinu f je

$$\{y \in \mathbb{R}^4 \mid f(v,y) = 0, f(w,y) = 0\} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$= \left\{(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, (2,1,-3,-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 = (3,4,2,-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, (1,3,-5,-1) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 = (-1,3,1,-4) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

řešíme homogenní soustavu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & -18 & 9 \\ 0 & 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

Ortogonální doplněk podprostoru U v $\mathbb{R}^4$ vzhledem ke ska. součinu f je vektorový podprostor W generovaný vektory $y = (9,2,3,0)$, $y = (-9,-5,0,-6)$

* V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ s výše definovaným skalárním součinem b najděte ortogonální projekci vektoru $u=(1,5,-5,3)$ do ~~tohoto~~ vektorové podprostoru $U=\langle(2,1,-3,-2),(3,4,2,-1)$ [illegible]

– řešení: Buď W ortogonální doplněk podprostoru U ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ vzhledem ke skalárnímu součinu b. Pak $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ je přímý součet. To znamená, že k vektoru u existují jednoznačně určené vektory $p\in U, q\in W$ takové, že $u=p+q$. Vektor p je ortogonální projekce vektoru u do podprostoru U. Vektor q je ortogonální projekce vektoru u do podprostoru W.

Poněvadž $p\in U$ a $U=[v,w]$, existují $c,d\in\mathbb{R}$ tak, že $c\cdot v+d\cdot w=p$.

Odtud pro vektor q plyne $q=u-p=u-c\cdot v-d\cdot w$.

Poněvadž $q\in W$ a $v,w\in U$, kde podprostory U,W jsou navzájem ortogonální, plynou odtud rovnosti $b(q,v)=0$, $b(q,w)=0$.

Výsledkem ze tvaru vektoru q to znamená, že

$$b(u,v)-c\cdot b(v,v)-d\cdot b(w,v)=0$$
$$b(u,w)-c\cdot b(v,w)-d\cdot b(w,w)=0$$

to je soustava lin. rovnic pro neznámé c,d.

$$\begin{pmatrix} b(v,v) & b(w,v) \\ b(v,w) & b(w,w)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b(u,v) \\ b(u,w)\end{pmatrix}$$

Tato soustava má jediné řešení.

$$b(v,v)=(2,1,-3,-2)\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\-2\end{pmatrix}=(1,3,-5,-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\-2\end{pmatrix}=22$$

$$b(v,w)=b(w,v)=(2,1,-3,-2)\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\\-1\end{pmatrix}=(1,3,-5,-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\\-1\end{pmatrix}=6$$

~~$b(w,w)$~~

$$b(w,w)=(3,4,2,-1)\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\\1\end{pmatrix}=(-1,3,1,-4)\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\\-1\end{pmatrix}=15$$

$$b(u,v)=b(v,u)=(1,3,-5,-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\-5\\3\end{pmatrix}=38$$

$$b(u,w)=b(w,u)=(-1,3,1,-4)\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\-5\\3\end{pmatrix}=-3$$

Takže matice soustavy má tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c}22&6&38\\6&15&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}11&3&19\\2&5&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-22&24\\2&5&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-22&24\\0&49&-49\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-22&24\\0&1&-1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-1\end{array}\right)$$ tedy $c=2$, $d=-1$

to znamená, že $p=2v-w=(1,-2,-8,-3)$ je hledaná ortogonální projekce vektoru u.

* V Euklidovském vekt. prostoru $\mathbb{R}^4$ s výše definovaným skalárním součinem f najděte ortonormální bázi vektorového podprostoru V zadaného jako lineární obal vektorů $[r, s, t]$,

kde $r = (2,3,2,5)$, $s = (4,3,1,-2)$, $t = (-2,-2,7,-3)$

výsledek: $\left(\frac{1}{6}(2,3,2,5), \frac{1}{6}(10,9,4,1), \frac{1}{10}(6,7,12,5)\right)$

$$u = r = (2,3,2,5)$$

$$\cancel{v = s + k\cdot u}$$

$$\cancel{\langle u, s + k\cdot u\rangle = \langle u,s\rangle + k\cdot\langle u,u\rangle = 0}$$

$$\cancel{k = -\frac{\langle u,s\rangle}{\langle u,u\rangle} = -\frac{9}{42} = -\frac{3}{14}}$$

$$\cancel{v = (4,3,1,-2) - \frac{3}{17}}$$

$$\cancel{f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_4}$$

$$f(x,y) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$v = s + k\cdot u = (4,3,1,-2) + \left(1, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right) = \left(5, \frac{9}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) \implies \text{vezmi } v = (10,9,4,1)$$

$$k = -\frac{f(u,s)}{f(u,u)} = \frac{1}{2}$$

$$f(u,u) = (2,3,2,5)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (-1,2,-4,8)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 36$$

$$f(u,s) = (-1,2,-4,8)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -18$$

$$w = t + a\cdot u + b\cdot v = (-2,-2,7,-3) + \left(3, \frac{9}{2}, 3, \frac{15}{2}\right) + \left(5, \frac{9}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) = (6,7,12,5)$$

$$f(u, t + a\cdot u + b\cdot v) = f(u,t) + a\cdot f(u,u) = 0 \implies a = -\frac{f(u,t)}{f(u,u)} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$

$$f(v, t + a\cdot u + b\cdot v) = f(v,t) + b\, f(v,v) = 0 \implies b = -\frac{f(v,t)}{f(v,v)} = \frac{1}{2}$$

$$f(u,t) = (-1,2,-4,8)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = -54$$

$$f(v,v) = (10,9,4,1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,4,-2,-2)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 36$$

$$f(v,t) = (1,4,-2,-2)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = -18$$

$$f(w,w) = (6,7,12,5)\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\12\\5\end{pmatrix} = (-1,-4,12,-2)\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\12\\5\end{pmatrix} = 100$$

ortonormální báze: $\left(\frac{1}{6}(2,3,2,5), \frac{1}{6}(10,9,4,1), \frac{1}{10}(6,7,12,5)\right)$

$\boxed{7.CV.}$

* V Euklidovském vek. prostoru E^5, to jest ve vek. prostoru R^5 se standardním skalárním součinem, ~~najděte vzájemnou~~ zjistěte vzájemnou polohu a vzdálenost rovin ρ, η zadaných parametrickými popisy:

$$\rho: X = [1,3,5,1,5] + p\cdot(1,3,5,1,-2) + q\cdot(1,-1,-3,5,-2)$$

$$\eta: X = [1,5,3,7,10] + u\cdot(1,-5,1,-7,4) + v\cdot(1,4,1,8,-5)$$

– řešení:

– vzájemná poloha rovin ρ, η:

$$\underbrace{[1,5,3,7,10]}_{B} - \underbrace{[1,3,5,1,5]}_{A} = (0,2,-2,6,5)$$

$$\begin{array}{l} Z(\rho) \\ \\ Z(\eta) \\ \\ B-A \end{array}\begin{pmatrix}1&3&5&1&-2\\1&-1&-3&5&-2\\\hline 1&-5&1&-7&4\\1&4&1&8&-5\\\hline 0&2&-2&6&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&1&-2\\0&4&8&-4&0\\\hline 0&8&4&8&-6\\0&-1&4&-7&3\\\hline 0&2&-2&6&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&1&-2\\0&1&2&-1&0\\\hline 0&0&-6&8&-3\\0&0&-6&8&-3\\\hline 0&0&0&0&8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&5&1&-2\\0&1&2&-1&0\\\hline 0&0&6&-8&3\\0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&8\end{pmatrix}$$

$Z(\rho)+Z(\eta)$

$$\dim(Z(\rho)+Z(\eta)) = 3, \dim(Z(\rho)\cap Z(\eta)) = 1$$

$$Z(\rho) \not\subseteq Z(\eta) \wedge Z(\eta) \subseteq Z(\rho) \wedge B-A \notin Z(\rho)+Z(\eta)$$

Roviny ρ a η jsou částečně mimoběžné

Součet zaměření rovin ρ, η: $Z(\rho)+Z(\eta) = [\underbrace{(1,3,5,1,-2)}_{f}, \underbrace{(0,1,2,-1,0)}_{g}, \underbrace{(0,0,6,-8,3)}_{h}]$

Ortogonální doplněk součtu zaměření:

$$(Z(\rho)+Z(\eta))^\perp = \{x \in R^5 \mid \langle f,x\rangle = \langle g,x\rangle = \langle h,x\rangle = 0\}$$

To vede na homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix}1&3&5&1&-2\\0&1&2&-1&0\\0&0&6&-8&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}6&18&0&46&-27\\0&3&0&5&-3\\0&0&6&-8&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}6&0&0&16&-9\\0&6&0&10&-6\\0&0&6&-8&3\end{pmatrix}$$

$$(Z(\rho)+Z(\eta))^\perp = [(16,10,-8,-6,0),(9,6,-3,0,6)] = [\underbrace{(8,5,-4,-3,0)}_{s}, \underbrace{(3,2,-1,0,2)}_{t}]$$

Buď r ortogonální projekce $B-A$ do vek. podprostoru $(Z(\rho)+Z(\eta))^{\perp}$. Pak norma $\|r\|$ vektoru r je vzdáleností $v(\rho,\eta)$ rovin ρ,η. Pak $r = a\cdot s + b\cdot t$ pro čísla $a,b \in \mathbb{R}$.
Uvažme $z = (B-A) - r$, tedy vektor $z = (B-A) - a\cdot s - b\cdot t$.
Pak vektor z je ortogonální projekce vektoru $B-A$ do vektorového podprostoru $Z(\rho)+Z(\eta)$. Je tedy tento vektor z ortogonální ke všem vektorům z $(Z(\rho)+Z(\eta))^{\perp}$.
Zejména je tedy vektor z ortogonální k vektorům s,t. To znamená, že platí
$\langle z,s\rangle = 0$, $\langle z,t\rangle = 0$.
Vzhledem k tvaru vektoru z tak dostáváme

$$0 = \langle B-A,s\rangle - a\cdot\langle s,s\rangle - b\langle t,s\rangle$$
$$0 = \langle B-A,t\rangle - a\cdot\langle s,t\rangle - b\langle t,t\rangle$$

Jinak zapsáno dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé a,b:

$$\begin{pmatrix} \langle s,s\rangle & \langle t,s\rangle \\ \langle s,t\rangle & \langle t,t\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle B-A,s\rangle \\ \langle B-A,t\rangle \end{pmatrix}$$

Tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 114 & 38 & 0 \\ 38 & 18 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 19 & 9 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \text{ takže } a=-1, b=3$$

Odtud $r = -(8,5,-4,-3,0) + 3\cdot(3,2,-1,0,2) = (1,1,1,3,6)$.
Tedy vzdálenost $v(\rho,\eta) = \|r\| = \sqrt{1+1+1+9+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.
Vzdálenost rovin ρ a η tedy je $v(\rho,\eta)$

$$\cancel{(U\cap V)+W=\{0\},\ (V\cap W)+U=\{0\},\ (U\cap W)+W=\{0\}}$$

$$\cancel{(\forall z\in A)(\exists!\, u\in U)(\exists!\, v\in V)(\exists!\, w\in W)(z=u+v+w)}$$

* V euklidovském vek. prostoru $\mathbb{E}^5$ jsou prostřednictvím parametrických rovnic dány přímka $p: X = [4,5,2,3,-1] + r\cdot(1,1,-1,1,-1)$
a rovina $\rho: X = [5,2,5,6,7] + s\cdot(1,-1,1,1,-1) + t\cdot(1,-1,-1,-1,1)$.
Ověřte, že přímka p a rovina ρ jsou vzájemně mimoběžné, a tedy jsou úplně mimoběžné.
Zjistěte vzdálenost přímky p od roviny ρ v $\mathbb{E}^5$. Najděte příčku těchto navzájem úplně mimoběžných podprostorů, tedy přímky p od roviny ρ.

To znamená, najděte ty jednoznačně určené body $C \in p$ a $D \in \rho$, pro něž délka úsečky CD je rovna vzdálenosti přímky p od roviny ρ v $\mathbb{E}^5$.

– řešení:

– označení: $A = [4,5,2,3,-1]$, $f = (1,1,-1,1,-1)$

$B = [5,2,5,6,7]$, $g = (1,-1,1,1,-1)$, $h = (1,-1,-1,-1,1)$

$u = B - A = (1,-3,3,3,8)$

– vzájemná poloha:

$$\begin{array}{c} g \\ h \\ f \\ u \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$Z(p) \not\subseteq Z(\rho)$ ani $Z(\rho) \not\subseteq Z(p)$ $\quad B - A \notin$

p, ρ jsou úplně mimoběžné

Vzdálenost přímky p od roviny ρ:

Uvažme ortogonální projekci v vektoru $u = B - A$ do přímého součtu zaměření $Z(p) \oplus Z(\rho)$.

Je $v = a \cdot f + b \cdot g + c \cdot h$ pro jisté $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ovšem vektor $w := u - v$ je ortogonální projekcí vektoru $u = B - A$ do ortogonálního doplňku $(Z(p) \oplus Z(\rho))^{\perp}$ v $\mathbb{E}^5$.

Přitom $w = u - af - bg - ch$.

Je tedy tento vektor w ortogonální ke všem vektorům ze $Z(p) \oplus Z(\rho)$.

Zejména je tedy vektor w ortogonální k vektorům f, g, h, což znamená

$\langle f, w \rangle = \langle g, w \rangle = \langle h, w \rangle = 0$

Vzhledem ke tvaru vektoru w tak dostáváme

$$0 = \langle f, u \rangle - a \cdot \langle f, f \rangle - b \langle f, g \rangle - c \cdot \langle f, h \rangle$$

$$0 = \langle g, u \rangle - a \cdot \langle g, f \rangle - b \langle g, g \rangle - c \cdot \langle g, h \rangle$$

$$0 = \langle h, u \rangle - a \cdot \langle h, f \rangle - b \cancel{\langle g, h \rangle} \langle h, g \rangle - c \cdot \langle h, h \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \langle f,f \rangle & \langle f,g \rangle & \langle f,h \rangle \\ \langle g,f \rangle & \langle g,g \rangle & \langle g,h \rangle \\ \langle h,f \rangle & \langle h,g \rangle & \langle h,h \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f,u \rangle \\ \langle g,u \rangle \\ \langle h,u \rangle \end{pmatrix}$$

Tato soustava lineárních rovnic pro neznámé a, b, c má jediné řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & -10 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & 24 & +20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad a = -2,\ b = 1,\ c = 1$$

Takže $w = u + 2f - g - h$

$w = (1, 1, 1, 5, 6)$

Norma tohoto vektoru w je rovna vzdálenosti přímky p od roviny ρ:

$$v(p, \rho) = \|w\| = \sqrt{1+1+1+25+36} = \sqrt{64} = 8$$

Navíc $w = B - A + 2f - g - h = \underbrace{B - g - h}_{\in \rho} - \underbrace{(A - 2f)}_{\in p}$

Čili $C := A - 2f = [2, 3, 4, 1, 1] \in p$

$D := B - g - h = [3, 4, 5, 6, 7] \in \rho$, přičemž $D - C = w = (1, 1, 1, 5, 6)$.

Takže $v(p, \rho) = \|D - C\| = \sqrt{1+1+1+25+36} = \sqrt{64} = 8$.

Úsečka CD tedy realizuje vzdálenost přímky p od roviny ρ.

$\boxed{8. \text{CV.}}$

* V Euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{E}_5$ zjistěte odchylku vektoru $u = (1, 1, 1, 1, 2)$ od vektorového podprostoru V zadaného jako lineární obal uvedeného souboru vektorů: $V = [(1, 5, 5, -7, 6), (1, -1, -1, 5, -6)]$.

Řešení: Poněvadž $u \notin V^{\perp}$, odchylka $\sphericalangle(u, V) = \sphericalangle(u, w)$, kde w je ortogonální projekce vektoru u do vektorového podprostoru V. ~~Takže w~~

Označím $s = (1, 5, 5, -7, 6)$, $t = (1, -1, -1, 5, -6)$.

Takže $w = a \cdot s + b \cdot t$ pro jisté $a, b \in \mathbb{R}$.

Pak vektor $v = u - w = u - a \cdot s - b \cdot t$ je ortogonální projekcí vektoru u do ortogonálního doplňku $V^{\perp}$ vektorového podprostoru V. Je tedy v ortogonální ke všem vektorům z podprostoru V, zejména je ortogonální k vektorům s a t: $\langle v, s\rangle = 0$, $\langle v, t\rangle = 0$.

To znamená, že $\langle u, s\rangle - a \cdot \langle s, s\rangle - b \cdot \langle t, s\rangle = 0$

$\langle u, t\rangle - a \cdot \langle s, t\rangle - b \cdot \langle t, t\rangle = 0$, neboli

$$\begin{pmatrix} \langle s, s\rangle & \langle t, s\rangle \\ \langle s, t\rangle & \langle t, t\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, s\rangle \\ \langle u, t\rangle \end{pmatrix}$$

Tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} 136 & -80 & | & 16 \\ -80 & 64 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 17 & -10 & | & 2 \\ -10 & 8 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & | & 1 \\ 0 & 12 & | & 1 \end{pmatrix}$$

takže $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{12}$

tedy $w = \frac{1}{6}(1,5,5,-7,6) + \frac{1}{12}(1,-1,-15,-6) = \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1,3,3,-3,2)$

Víme, že

$$\cos \sphericalangle(u,w) = \frac{\langle u,w\rangle}{\|u\|\cdot\|w\|} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 8}{\sqrt{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{32}} = \frac{1}{2}$$

$\sphericalangle(u,w) = \frac{\pi}{3}$, a tedy $\sphericalangle(u,V) = \frac{\pi}{3}$

* V Euklidovském vekt. prostoru $\mathbb{E}_5$ zjistěte odchylku vektoru $u = (1,2,3,3,5)$ od vektorového podprostoru V, zadaného implicitně jako množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$V: \quad x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0,$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

– řešení: Ortogonální doplněk $V^\perp$ vekt. podprostoru V je lineárním obalem dvojice vektorů, které figurují jako řádky homogenní soustavy lineárních rovnic, která zadává vektorový podprostor V:

$$V^\perp = [(1,-1,3,3,-1),(3,-1,1,1,1)]$$

Označení: $h = (1,-1,3,3,-1)$, $k = (3,-1,1,1,1)$

Vypočteme nejprve ortogonální projekci v vektoru u do ortogonálního doplňku $V^\perp$. Pak $v = c\cdot h + d\cdot k$ pro jistá $c,d \in \mathbb{R}$. Přitom $w = u - v = u - c\cdot h - d\cdot k$ je ortogonální projekce vektoru u do vektorového podprostoru V, a je tedy tento vektor ortogonální ke všem vektorům z podprostoru $V^\perp$. Zejména je tedy vektor w ortogonální k vektorům h a k: $\langle w,h\rangle = 0$, $\langle w,k\rangle = 0$

To znamená, že $\langle u,h\rangle - c\cdot\langle h,h\rangle - d\cdot\langle k,h\rangle = 0,$

$$\langle u,k\rangle - c\cdot\langle h,k\rangle - d\langle k,k\rangle = 0,$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \langle h,h\rangle & \langle k,h\rangle \\ \langle h,k\rangle & \langle k,k\rangle \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u,h\rangle \\ \langle u,k\rangle \end{pmatrix}$$

Tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení:

$$\begin{pmatrix} 21 & 4 & | & 12 \\ 4 & 13 & | & 12 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 4 & | & 3 \end{pmatrix}$$, takže $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{4}$, tedy $v = \frac{1}{4}(1,-1$

$$v = \frac{1}{4}(1,-1,3,3,-1) + \frac{3}{4}(3,-1,1,1,1) = \left(\frac{5}{2},-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

takže ~~u~~ $v \neq u$, a tedy $u \notin V^\perp$. To znamená, že odchylka

$\measuredangle(u,V) = \measuredangle(u,w)$, kde $w = u - v$ je již zmíněná ortogonální projekce vektoru u do podprostoru V. Dostáváme tedy

$$w = u - v = (1,2,3,3,5) - \left(\tfrac{5}{2}, -1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{3}{2}, 3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{9}{2}\right) = \tfrac{3}{2}(-1,2,1,1,3)$$

Víme, že $\cos \measuredangle(u,w) = \dfrac{\langle u,w\rangle}{\|u\|\cdot\|w\|} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot 24}{\sqrt{48}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

takže $\measuredangle(u,w) = \dfrac{\pi}{6}$

* V euklidovském vektorovém prostoru E_5 zjistěte vektorového podprostoru V zadaného jako lineární obal uvedeného souboru dvou vektorů $V = [(1,1,1,-10,-3),(0,1,1,7,2)]$ od nadroviny N zadané implicitně jako množina všech řešení následující homogenní lineární rovnice nad R.

$$N: 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0.$$

– řešení: Ortogonální doplněk $N^\perp$ nadroviny N je jednorozměrný vektorový podprostor, který lze vyjádřit jako lineární obal $N^\perp = [(3,3,4,4,5)]$

– Označme: $r = (3,3,4,4,5)$,

$s = (1,1,1,-10,-3)$, $t = (0,1,1,7,2)$.

Pro hledanou odchylku platí $\measuredangle(V,N) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(V,N^\perp)$.

Přitom $\measuredangle(V,N^\perp) = \measuredangle(r,V)$, a poněvadž $r \notin V^\perp$, máme pro tuto poslední odchylku vztah

$\measuredangle(r,V) = \measuredangle(r,g)$, kde g je ortogonální projekce vektoru r do vektorového podprostoru V. Takže $g = p\cdot s + q\cdot t$ pro jistá $p,q \in R$.

Pak ale vektor $f = r - g = r - p\cdot s - q\cdot t$ je ortogonální projekcí vektoru r do ortogonálního doplňku $V^\perp$. Je tedy vektor f ortogonální ke všem vektorům z V, zejména že je ortogonální k vektorům s a t: $\langle f,s\rangle = 0$, $\langle f,t\rangle = 0$.

To znamená, že
$$\langle r,s\rangle - p\cdot\langle s,s\rangle - q\cdot\langle t,s\rangle = 0,$$
$$\langle r,t\rangle - p\cdot\langle s,t\rangle - q\cdot\langle t,t\rangle = 0.$$

Neboli $\begin{pmatrix} \langle s,s\rangle & \langle t,s\rangle \\ \langle s,t\rangle & \langle t,t\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle r,s\rangle \\ \langle r,t\rangle \end{pmatrix}$

Tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 112 & 74 & -45 \\ 74 & 55 & 45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 112 & 74 & -45 \\ 38 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 112 & 74 & -45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -18 & -45 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Takže $r = \frac{5}{4}, q = \frac{5}{2}$. Tedy $g = \frac{5}{4}(1,1,1,-10,-3) + \frac{5}{2}(0,1,1,7,2) = \left(\frac{5}{4}, \frac{15}{4}, \frac{15}{4}, \ldots\right)$

$$= \frac{5}{4}(1,3,3,4,1)$$

Víme, že $\cos \sphericalangle(u,g) = \frac{\langle u,g \rangle}{\|u\| \cdot \|g\|} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 45}{\sqrt{75} \cdot \frac{5}{4} \sqrt{36}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Takže ~~$\sphericalangle(u,g)$~~ $\sphericalangle(V, N^{\perp}) = \sphericalangle(u,g) = \frac{\pi}{6}$

a tedy $\sphericalangle(V,N) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{9.\text{CV.}}$

* Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ všech polynomů jedné proměnné x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 3 buď zadán lineární operátor $\varphi: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definovaný pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ předpisem $f(x) \mapsto f(x) + f''(x) + x^3 \cdot f'''(x)$.

I) Najděte matici $B = (\varphi)_{\xi,\xi}$ lineárního operátoru φ ve standardní bázi $\xi = (1,x,x^2,x^3)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$: Nechť $f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Pak $f(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$ pro čísla $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Pak $\varphi(f(x)) = d + cx + bx^2 + ax^3 + 2b + 6ax + 6ax^3 = d + 2b + (c+6a)x + bx^2 + 7ax^3$

Takže $\varphi(1) = 1$ $\quad \varphi(x) = x$ $\quad \varphi(x^2) = 2 + x^2$ $\quad \varphi(x^3) = 6x + 7x^3$

$$B = (\varphi)_{\xi,\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

II) Najděte všechna vlastní čísla matice $B = (\varphi)_{\xi,\xi}$ a to i když ji uvažujeme jako matici nad $\mathbb{C}$: charakteristický polynom:

$$|\lambda \cdot E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda-7)$$

Vlastní čísla jsou reálná:

1 algebraické násobnosti 3

7 algebraické násobnosti 1

III) Najděte invariantní podprostory vlastních vektorů lineárního operátoru φ příslušné jednotlivým vlastním číslům matice B:

Pro vlastní číslo 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ řešením je podprostor ~~$[(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T]$~~

$[1, x]$ všech lineárních a konstantních polynomů

$\dim [1,x] = 2$

tedy geometrická násobnost vlastního čísla 1 je 2.

pro vlastní číslo 7:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Řešením je podprostor $[x+x^3]$

$\dim [x+x^3] = 1$

tedy geometrická násobnost vlastního čísla 7 je 1.

* Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ všech polynomů jedné proměnné x s reálnými koef. stupně nejvýše 2 buď zadán lineární operátor

$$\eta: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

definovaný pro všechny polynomy $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ předpisem

$$f(x) \longmapsto 2x\,f(x) + (1-x^3)\cdot f''(x).$$

I) Ověřte, že η je skutečně korektně definovaným lineárním operátorem na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$: Nechť $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Pak $f(x) = c+bx+ax^2$ pro čísla $a,b,c \in \mathbb{R}$. Pak $\eta(f(x)) = 2x(c+bx+ax^2) + (1-x^3)2a = 2a+2cx+2bx^2$, takže $\eta(f(x)) \in \mathbb{R}_2[x]$. Linearita operátoru η je zřejmá.

II) Najděte matici $A=(\eta)_{\xi,\xi}$ lineárního operátoru η ve standardní bázi $\xi = (1,x,x^2)$ prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

$\eta(1) = 2x$

$\eta(x) = 2x^2$

$\eta(x^2) = 2$

$$A = (\eta)_{\xi,\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

III) Najděte všechna vlastní čísla matice $A = (\eta)_{\xi,\xi}$, a to i když ji považujete za matici nad $\mathbb{C}$:

charakteristický polynom:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8 = (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4)$$

vlastní čísla:

reálné: 2

komplexně sdružené: $-1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$

IV) Najděte invariantní podprostor vlastních vektorů lineárního operátoru η příslušný reálnému vlastnímu číslu z matice A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešením je podprostor $[1+x+x^2]$.

$\dim[1+x+x^2]=1$

V) Uvažte na vektorovém prostoru $\mathbb{C}_2[x]$ všech polynomů jedné proměnné x s koeficienty komplexními koeficienty stupně nejvýše 2 lineární operátor

$$\hat{\eta}: \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$$

definovaný pro všechny polynomy z $\mathbb{C}_2[x]$ týmž předpisem jako η.

Ukažte, že reálné a imaginární části vlastních vektorů lineárního operátoru $\hat{\eta}$ příslušných komplexně sdruženým vlastním číslům $-1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$ generují invariantní podprostor lineárního operátoru η dimenze 2:

pro vlastní číslo $-1+i\sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} -1+i\sqrt{3} & 0 & -2 \\ -2 & -1+i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2 & -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1-i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1-i\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1-i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1-i\sqrt{3} \\ 0 & -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1-i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1-i\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 1-i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1-i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1-i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+i\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 1-i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Řešením je podprostor $[1+i\sqrt{3}+(1-i\sqrt{3})x-2x^2]$ (dimenze 1)

$= [\underbrace{1+x-2x^2}_{\text{reálná část}}+i(\underbrace{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}_{\text{imaginární část}})]$

Pro vlastní číslo $-1-i\sqrt{3}$: analogicky $[1+x-2x^2+i(-\sqrt{3}+\sqrt{3}x)]$

Potom $\hat{\eta}(1+i\sqrt{3}+(1-i\sqrt{3})x-2x^2) = (-1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}+(1-i\sqrt{3})x-2x^2) =$

$= (-1+i\sqrt{3})(1+x-2x^2+i(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)) =$

$= -(1+x-2x^2)-\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)+i[\sqrt{3}(1+x-2x^2)-(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)]$

$= \hat{\eta}(1+x-2x^2+i(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)) =$

$= \eta(1+x-2x^2)+i\cdot\eta(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)$

tedy $\eta(1+x-2x^2) = -(1+x-2x^2)-\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)$

$\eta(\sqrt{3}-\sqrt{3}x) = \sqrt{3}(1+x-2x^2)-(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)$

Je tedy vekt. podprostor $[1+x-2x^2, \sqrt{3}-\sqrt{3}x] = [1+x-2x^2, 1-x]$ je invariantním podprostorem lineárního operátoru η v $\mathbb{R}_2[x]$ odpovídajícím komplexně sdruženým vlastním číslům

$\boxed{9.\text{PŘ}}$

$\boxed{10.\text{CV.}}$

* Nechť lineární operátor $\eta: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dán svou maticí $A = (\eta)_{\nu,\nu} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ve standardní bázi ν vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Očividně matice A je ortogonální, takže η je ortogonální operátor na euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů vektorů matici A zjistěte, jakou geometrickou transformaci euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ lineární operátor η reprezentuje. Najděte v této souvislosti odpovídající matici lineárního operátoru η ve vhodné ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$.

Řešení: charakteristický polynom matice A.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & \lambda-\frac{2}{3} \end{vmatrix} = (\lambda-\tfrac{2}{3})^3 + \frac{1}{27} - \frac{8}{27} + \frac{2}{3}(\lambda-\tfrac{2}{3}) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{8}{27} - \frac{7}{27} +$$

$$+\frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{9} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)$$

vlastní čísla matice A: reálné: $\mu = 1$

komplexně sdružené: $\nu = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\nu} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

vlastní vektory lineárního operátoru η:

pro $\mu = 1$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

příslušný podprostor vlastních vektorů: $U = [(1,1,-1)]$

ortonormální báze: $f = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(1,1,-1)$

pro $\nu = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$: $\begin{pmatrix} \frac{-1+i3\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{-1+i3\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1+i3\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1+i3\sqrt{3} & 2 & 4 \\ -4 & -1+i3\sqrt{3} & -2 \\ -2 & 4 & -1+i3\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1-i3\sqrt{3} \\ 4 & 1-3i\sqrt{3} & 2 \\ 28 & -2+6i\sqrt{3} & -4-12i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1-3i\sqrt{3} \\ 0 & 9-3i\sqrt{3} & 6i\sqrt{3} \\ 0 & 54-6i\sqrt{3} & -18+30i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1-3i\sqrt{3} \\ 0 & 3-i\sqrt{3} & 3i\sqrt{3} \\ 0 & 9-i\sqrt{3} & -3+5i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1-i3\sqrt{3} \\ 0 & 12 & -6+6i3\sqrt{3} \\ 0 & 84 & -42+42i3\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1-i3\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1+i\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

příslušný podprostor vlastních vektorů v $\mathbb{C}^3$:

$$V = [(1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, 2)] = [(1,1,2) + i(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)]$$

příslušný dvourozměrný invariantní podprostor v $\mathbb{R}^3$:

$$W = [(1,1,2), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)] = [(1,1,2), (1,-1,0)]$$

ortonormální báze W: $g = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)$, $h = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$

Přitom $\nu = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

Lineární operátor $\eta: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ aplikovaný na vlastní vektor $(1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, 2)$ příslušný vlastnímu číslu ν:

$$\eta((1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, 2)) = \eta((1,1,2) + i(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)) = \left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left((1,1,2) + i(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1,1,2) - \frac{3}{2}(1,-1,0) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1,1,2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1,-1,0)\right) =$$

$$= \eta((1,1,2)) + i\,\eta((\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0))$$

Takže $\eta(f) = 1\cdot f = f$

$$\eta(g) = \eta\left(\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\,\eta((1,1,2)) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{1}{2}(1,1,2) - \frac{3}{2}(1,-1,0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0) = \frac{1}{2}g - \frac{\sqrt{3}}{2}h = \cos\frac{\pi}{3}\cdot g - \sin\frac{\pi}{3}\cdot h$$

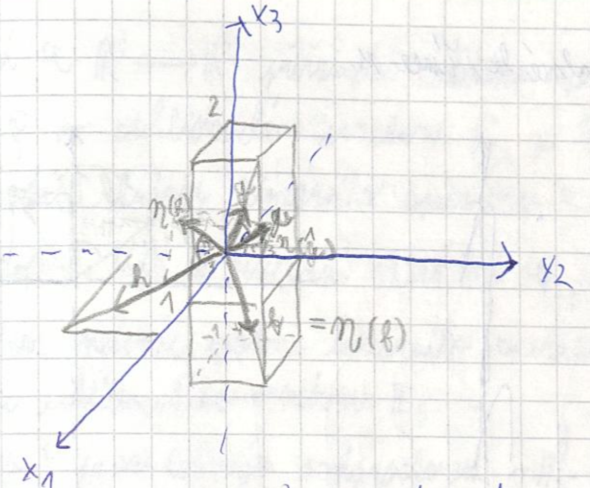
$$\eta(h) = \eta\left(\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\eta((\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot g + \frac{1}{2}\cdot h = \sin\frac{\pi}{3}\cdot g + \cos\frac{\pi}{3}\cdot h$$

Matice ortogonálního operátoru η v ortonormální bázi $\alpha = (f, g, h)$ eukleidovského prostoru E_3: $f = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)$

$$(\eta)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Náčrt:



Transformace euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ realizovaná ortogonálním operátorem η je tedy rotace kolem osy určené vektorem $f = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1)$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ ve smyslu od vektoru $h = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$ k vektoru $g = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2)$

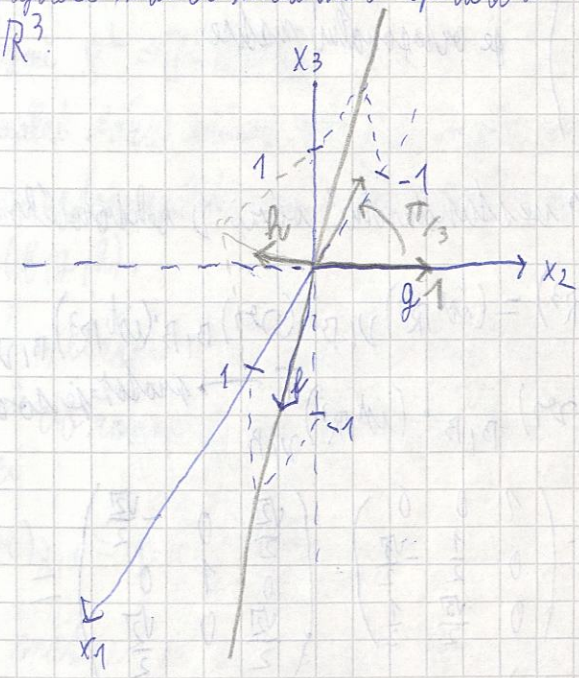
* Nechť lineární operátor $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je ortogonální transformací euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ charakterizovanou geometricky jako rotace o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem přímky r zadané implicitně homogenní soustavou lineárních rovnic

$$r: x_1 + x_3 = 0, \; x_2 = 0$$

v tom smyslu, že obrazem bodu $[0,1,0]$ je bod mající všechny složky kladné. Najděte matici lineárního operátoru φ ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení:

náčrt:



ortonormální báze $B = (f, g, h)$:

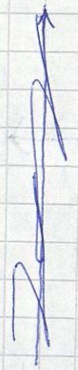
$f = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$ $\qquad [f]^{\perp} = [c, d]$

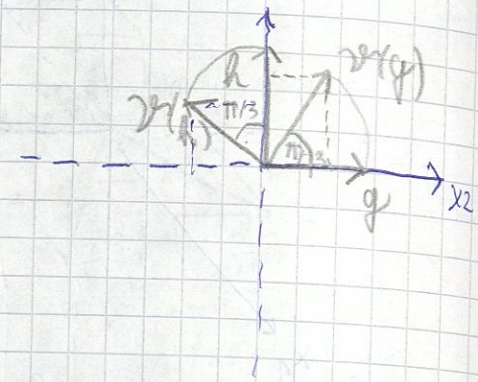
$g = (0,1,0)$ $\qquad c = (0,1,0) \quad c \perp f$

$h = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$ $\qquad d = (1,0,1) \quad d \perp f$

$c \perp d$ (náhodou)

V rovině procházející počátkem kolmé k přímce u:





Pak $\varphi(f) = f$

$\varphi(g) = g \cdot \cos\frac{\pi}{3} + h \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}g + \frac{\sqrt{3}}{2}h = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ — všechny složky kladné!

$\varphi(h) = h \cdot \cos\frac{\pi}{3} - g \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}h - \frac{\sqrt{3}}{2}g$

Matice lineárního operátoru φ v ortonormální bázi B:

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matice přechodu od báze B ke standardní bázi v $\mathbb{R}^3$:

$$(id_{\mathbb{R}^3})_{V,B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$ je ortogonální matice

Matice lineárního operátoru φ ve standardní bázi V vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$(\varphi)_{V,V} = (id_{\mathbb{R}^3} \circ \varphi \circ id_{\mathbb{R}^3}) = (id_{\mathbb{R}^3})_{V,B} \cdot (\varphi)_{B,B} \cdot (id_{\mathbb{R}^3})_{B,V} =$$

$$= (id_{\mathbb{R}^3})_{V,B} \cdot (\varphi)_{B,B} \cdot (id_{\mathbb{R}^3})^T_{V,B}$$ → protože je to ortogonální matice

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{11. CV.}}$

* Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána rovina ρ procházející počátkem mající implicitní vyjádření
$\rho: 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$.

Pak zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ přiřazující každému vektoru z $\mathbb{R}^3$ jeho ortogonální projekci do roviny ρ v euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ je lineárním operátorem na vek. prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte matici tohoto lineárního operátoru φ ve standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda lineární operátor φ je samoadjungovaným operátorem či nikoliv.

řešení: Najdeme nejprve matici lineárního operátoru φ ve vhodné ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$.

Rovina ρ je vektorovým podprostorem v $\mathbb{R}^3$. Najdeme ortonormální bázi roviny ρ v $\mathbb{E}_3$.

Zřejmě $\rho = [\underbrace{(2,-1,0)}_{s}, \underbrace{(1,0,-4)}_{t}]$

Aplikujeme Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces:

$a = s = (2,-1,0)$ $\qquad \|a\| = \sqrt{5}$

$b = t + q \cdot a$

$0 = \langle b, a\rangle = \langle t, a\rangle + q\langle a, a\rangle$, tedy $q = -\dfrac{\langle t, a\rangle}{\langle a, a\rangle} = -\dfrac{2}{5}$

$b = t - \frac{2}{5}a = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -4\right) = \frac{1}{5}\cdot(1,2,-20)$

$5b = (1,2,-20)$ $\qquad \|5b\| = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}$

Ortonormální bázi roviny ρ tvoří tedy např. $f = \frac{\sqrt{5}}{5}(2,-1,0)$, $g = \frac{\sqrt{5}}{45}(1,2,-20)$

Dále zřejmě $\rho^\perp = [(4,8,1)]$

Ortonormální bázi přímky $\rho^\perp$ tedy tvoří vektor $h = \frac{1}{9}(4,8,1)$

Vhodnou ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ je tedy například báze $\alpha = (f, g, h)$.

Lineární operátor φ přiřazující každému vektoru z $\mathbb{R}^3$ jeho ortogonální projekci do roviny ρ má pak z definice vzhledem k nalezené bázi α prostoru $\mathbb{E}_3$ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tato matice je symetrická, báze α je ortonormální.

Je tedy φ samoadjungovaný lineární operátor. Matici přechodu od báze α ke standardní bázi ν vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$(id_{\mathbb{R}^3})_{\nu,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{45} & \frac{4}{9} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{45} & \frac{8}{9} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{5}}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$ ← tato matice je ortogonální

Matice lineárního operátoru φ vzhledem k standardní bázi ν prostoru $\mathbb{R}^3$ pak vychází

$$(\varphi)_{\nu,\nu} = (id_{\mathbb{R}^3} \circ \varphi \circ id_{\mathbb{R}^3}) = \overbrace{(id_{\mathbb{R}^3})_{\nu,\alpha}}^{\text{ortogonální}} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id_{\mathbb{R}^3})_{\alpha,\nu} =$$

$$= (id_{\mathbb{R}^3})_{\nu,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id_{\mathbb{R}^3})^T_{\nu,\alpha} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt5}{5} & \frac{\sqrt5}{45} & \frac49 \\ -\frac{\sqrt5}{5} & \frac{2\sqrt5}{45} & \frac89 \\ 0 & -\frac{4\sqrt5}{9} & \frac19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt5}{5} & -\frac{\sqrt5}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt5}{45} & \frac{2\sqrt5}{45} & -\frac{4\sqrt5}{9} \\ \frac49 & \frac89 & \frac19 \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 65 & -32 & -4 \\ -32 & 17 & -8 \\ -4 & -8 & 80 \end{pmatrix}$$

* Nechť kvadratická forma Q na euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ má ve standardních souřadnicích vyjádření tvaru

$$Q(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

Ortogonální (!) transformací souřadnic převeďte kvadratickou formu Q na diagonální kanonický tvar. Určete příslušnou ortonormální polární bázi kvadratické formy Q. Tedy najděte ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$, v jejíchž souřadnicích nabývá kvadratická forma Q zmíněného diagonálního kanonického tvaru.

řešení: $Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Matici kvadratické formy Q ve standardní bázi $\mathbb{E}_3$:

$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ matici chápeme jako matici $(\psi)_{\nu,\nu}$ samoadjungované transformace ψ prostoru $\mathbb{E}_3$ ve standardní bázi ν.

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda-8 & -1 & -4 \\ -1 & \lambda-8 & 4 \\ -4 & -4 & \lambda+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-9 & \lambda-9 & 0 \\ -1 & \lambda-8 & 4 \\ -4 & 4 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda-9) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-8 & 4 \\ -4 & 4 & \lambda+7 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-7 & 4 \\ -4 & 8 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda-9) \begin{vmatrix} \lambda-7 & 4 \\ 8 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda^2 - 49 - 32) = (\lambda-9)^2(\lambda+9)$$

vlastní čísla: $\sigma_1 = 9$ násobnosti 2

$\sigma_2 = -9$ násobnosti 1.

u samoadj. operátoru se algebraická = geometrická vlastní vektory: ~~Pro~~ ~~$\sigma u_1 = 9$:~~

~~$\lambda E - C$~~

pro $\sigma u_1 = 9$: $\quad \sigma u_1 \cdot E - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \sim (1 \ -1 \ -4)$

invariantní podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu $\sigma u_1 = 9$: $\quad W1 = [\underbrace{(1,1,0)}_{s}, \underbrace{(4,0,1)}_{t}]$

Ortogonální báze W_1: (u, v)

Ortogonalizační proces:

$u = s = (1,1,0)$

$v = t + r \cdot u$

$0 = \langle v, u \rangle = \langle t, u \rangle + r \cdot \langle u, u \rangle$

$r = -\dfrac{\langle t, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = -\dfrac{4}{2} = -2$

$v = (4,0,1) - 2(1,1,0) = (2,-2,1)$

ortonormální báze W_1: $(f, g) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0), \frac{1}{3}(2,-2,1) \right)$

pro $\sigma u_2 = -9$: $\quad \sigma u_2 \cdot E - C = \begin{pmatrix} -17 & -1 & -4 \\ -1 & -17 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -18 & -18 & 0 \\ 1 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

invariantní podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu $\sigma u_2 = -9$: $\quad W_2 = [\underbrace{(1,-1,4)}_{w}]$ — není náhoda, že je ortogonální k s, t.

normalizace: $h = \frac{\sqrt{2}}{6}(1,-1,-4)$

$E_3 = W_1 \oplus W_2$ je ortogonální součet.

Hledaná ortonormální báze euklidovského prostoru E_3: $\quad \rho = (f, g, h)$.

Matice přechodu od báze ρ ke standardní bázi ν v E_3:

$S = (id_{\mathbb{R}^3})_{\nu, \rho}$ má ve sloupcích vektory báze ρ.

S je ortogonální matice: $S^{-1} = S^T$.

Samoadjungovaná transformace ψ ~~ve~~ eukleidovského prostoru E_3 má vzhledem k bázi γ diagonální matici.

$$\cancel{D/=\gamma} \quad D=(\psi)_{\gamma,\gamma}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \text{ z def } (\psi)_{\gamma,\gamma}\text{, báze a vl. čísel}$$

Přitom máme

$$D=(id_{\mathbb{R}^3}\circ\psi\circ id_{\mathbb{R}^3})_{\gamma,\gamma}=(id_{\mathbb{R}^3})_{\gamma,\nu}\cdot(\psi)_{\nu,\nu}\cdot(id_{\mathbb{R}^3})_{\nu,\gamma}=$$

$$=(id_{\mathbb{R}^3})^{-1}_{\nu,\gamma}\cdot(\psi)_{\nu,\nu}\cdot(id_{\mathbb{R}^3})_{\nu,\gamma}=$$

$$=S^{-1}\cdot C\cdot S$$

$$=S^{T}\cdot C\cdot S$$

Nechť y_1,y_2,y_3 jsou souřadnice vektoru $x=(x_1,x_2,x_3)$ vzhledem k bázi γ. Pak máme $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.

Odtud plyne $Q(x)=(x_1,x_2,x_3)\cdot C\cdot\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(y_1,y_2,y_3)\cdot S^T\cdot C\cdot S\cdot\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=$

$$=(y_1,y_2,y_3)\cdot D\cdot\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Takže $Q(x)=9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2$ je diagonální kanonický tvar kvadratické formy Q. Přitom

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=S\cdot\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

je příslušná ortogonální transformace souřadnic

$\boxed{\text{10. PŘ.}}$ $(\cancel{x})/2=1$

$\boxed{\text{12. CV.}}$

* Najděte Jordanův kanonický tvar $J(A)$ matice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1\\ 4 & -3 & 3 & -5\\ -3 & 4 & -1 & 4\\ -4 & 5 & -3 & 7\end{pmatrix}$$

$\varphi(x)=A\cdot x$

$\varphi(x)=\lambda x$

$A\cdot x-\lambda\cdot x=0$

$A\cdot x-\lambda\cdot E\cdot x=0$

$(A-\lambda E)\cdot x=0$

$(A-\lambda E)\cdot x=0$

Najděte čtvercovou regulární matici P takovou, aby platila

$$J(A)=P^{-1}\cdot A\cdot P$$

~~Najděte Ch~~

– řešení:

charakteristický polynom matice A:

~~$|A-\lambda\cdot E|$~~

$$|A-\lambda\cdot E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3-\lambda & 3 & -5 \\ -3 & 4 & -1-\lambda & 4 \\ -4 & 5 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2-\lambda & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -1-\lambda & 4 \\ -4 & -2+\lambda & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2-\lambda & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(-1-\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)^3$$

vlastní čísla: -1 alg. násobnosti 1
2 alg. násobnosti 3

vlastní vektory příslušné vlastnímu čísle -1:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -9 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu -1:

$U = [(0,1,-1,-1)]$ dimenze 1.

Vlastní vektor: $f = (0,1,-1)$

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 3 & -5 \\ -3 & 4 & -3 & 4 \\ -4 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podprostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu 2:

$V = [(0,1,0,-1)]$ dimenze 1

Vlastní vektor: $g = (0,1,0,-1)$

Vlastní číslo 2 je geom. násobnosti 1.

Jedna Jordanova buňka řádu 3 odpovídající vlastnímu číslu 2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

příslušný řetězec vektorů: g, h, k

platí pro něj:

$$A \cdot g^T = 2 \cdot g^T \qquad\qquad (A-2E)\,g^T = 0$$
$$A \cdot h^T = g^T + 2 \cdot h^T \qquad \text{neboli} \qquad (A-2E)\,h^T = g^T$$
$$A \cdot k^T = h^T + 2 \cdot k^T \qquad\qquad (A-2E)\,k^T = h^T$$

$$\cancel{(x)_\varepsilon = (A)(id)_{\varepsilon,\alpha} \cdot (x)_\alpha}$$

Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic pro vektor h:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & -3 & 4 & 0 \\ -4 & 5 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Množinou všech řešení soustavy je afinní podprostor:

$(1,0,-1,0) + [(0,1,0,-1)]$

Lze volit: $h = (1,0,-1,0)$

Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic pro vektor k:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Množinou všech řešení soustavy je afinní podprostor:

$(-2,-1,1,0) + [(0,1,0,-1)]$

lze volit $k = (-2,-1,1,0)$.

Jordanův kanonický tvar matice A je

$$J(A) = \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Pro matici P mající ve sloupcích postupně uloženy složky vektorů f, g, h, k:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pak platí $J(A) = P^{-1} \cdot A \cdot P$

* Najděte Jordanův kanonický tvar $J(B)$ matice

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 11 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & 1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Najděte čtvercovou regulární matici Q takovou, aby $J(B) = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$

- řešení:
- char. polynom matice B:

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 11-\lambda & 4 & -8 \\ -3 & -4 & 1-\lambda & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 6-2\lambda & 0 \\ -3 & -4 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & -3 & 9-3\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & -3 & 9-3\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 9-\lambda & 4 \\ 0 & -3 & 15-3\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & -3 \\ -3 & 9-\lambda & 4 \\ 0 & 15-3\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5-\lambda & 1 \\ -3 & 9-\lambda & 4 \\ 0 & 3(5-\lambda) & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5-\lambda & 1 \\ -3 & 9-\lambda & 4 \\ 0 & 3(5-\lambda) & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5-\lambda & 1 \\ -3 & 9-\lambda & 4 \\ -9+3\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 6-\lambda & 5-\lambda & 1 \\ 9 & 9-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 6-\lambda & 5-\lambda \\ 9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \left((6-\lambda)(9-\lambda) - 9(5-\lambda) \right) = (\lambda-3)^4$$

vlastní číslo = 3 algebraické násobnosti 4.

13. CV.

* pokrač. minulé úlohy

vlastní vektory příslušné vl. číslu 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

~~W~~

prostor vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu 3:

$W = [(2,0,-3,0),(0,1,0,1)]$ dimenze 2.

Vlastní číslo 3 je geometrické násobnosti 2.

Dvě Jordanovy buňky odpovídající vlastnímu číslu 3.

Nevíme dosud jejich řády, jeden z nich je ale >1.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 3 jsou tvaru

$a\cdot(2,0,-3,0)+b\cdot(0,1,0,1)$ pro $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$.

Nevíme pro kterou dvojici a,b se podaří k doplněnému vlastnímu vektoru najít další vektor řetězce odpovídajícího Jordanově buňce řádu >1.

Pro tento další vektor h platí

$$B\cdot h^T = a\cdot(2,0,-3,0)^T + b\cdot(0,1,0,1)^T + 3\cdot h^T$$

neboli

$$(B-3E)\cdot h^T = a\cdot(2,0,-3,0)^T + b\cdot(0,1,0,1)^T.$$

Řešíme soustavu lineárních rovnic pro vektor h s parametry a,b na pravé straně.

Rozšířená matice této soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 2a \\ 6 & 8 & 4 & -8 & b \\ -3 & -4 & -2 & 4 & -3a \\ 9 & 9 & 6 & -9 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 2a \\ 3 & 4 & 2 & -4 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-6a \end{array}\right)$$

Tato soustava má řešení právě tehdy, když $b-6a=0$, tj. právě když $b=6a$.

BÚNO lze volit $a=1, b=6$. Dokončíme pak řešení soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Množinou všech řešení soustavy pro volbu $a=1, b=6$ je afinní podprostor

$\cancel{P = (-\frac{1}{3}, 1, 0 (1,1,-2,0) + [(2,0,-3,}$

$$P = \left(-\frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) + [(2,0,-3,0), (0,1,0,1)]$$

$$= (1,1,-2,0) + [(2,0,-3,0), (0,1,0,1)]$$

Poněvadž pro jinou lineárně nezávislou volbu dvojice $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nemá výše uvedená soustava lineárních rovnic řešení, znamená to, že druhá Jordanova buňka odpovídající vlastnímu číslu velikosti >1 není, neboť k ní neexistuje* jí odpovídající řetězec. Jsou tedy Jordanovy buňky odpovídající vlastnímu číslu 3 dvě řádů 3 a 1.

Pro Jordanovu buňku řádu 3 musíme ale ještě najít třetí vektor k odpovídajícího řetězce. Nevíme ale, pro který vektor z afinního podprostoru P se to podaří. Vektory z afinního podprostoru P jsou tvaru

$$(1,1,-2,0) + c\cdot(2,0,-3,0) + d\cdot(0,1,0,1) \quad \text{pro } (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pro zmíněný vektor k pak platí

$$B \cdot k^T = (1,1,-2,0)^T + c\cdot(2,0,-3,0)^T + d\cdot(0,1,0,1) + 3\cdot k^T,$$

neboli

$$(B-3E)\cdot k^T = (1,1,-2,0)^T + c\cdot(2,0,-3,0)^T + d\cdot(0,1,0,1).$$

Řešíme soustavu lineárních pro vektor k, tentokrát s parametry c, d na pravé straně.**

Rozšířená matice této soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 2 & -3 & 1+2c \\ 6 & 12 & 4 & -8 & 1+d \\ -3 & -4 & 1 & 4 & -2-3c \\ 9 & 9 & 6 & -6 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 1+2c \\ 3 & 4 & 2 & -4 & 2+3c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3-6c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3-6c+d \end{array}\right)$$

Tato soustava má řešení právě tehdy, když $-3-6c+d$, tj. právě když $d = 3+6c$.

BÚNO můžeme zvolit $c=0, d=3$. Dokončíme pak řešení soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Množinou všech řešení soustavy pro volbu $c=0, d=3$ je afinní podprostor

$$\mathcal{Q} = (-\tfrac{2}{3}, 1, 0, 0) + [(2, 0, -3, 0), (0, 1, 0, 1)]$$
$$= (0, 1, -1, 0) + [(2, 0, -3, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

Za vektor k lze ovšem volit kterýkoliv vektor z tohoto afinního podprostoru.
Při výše uvedených volbách parametrů a, b, c, d tak k Jordanově buňce řádu 3 příslušné vlastnímu číslu 3 dostáváme následující odpovídající řetězec vektorů:

$g = (2, 6, -3, 6)$, $h = (1, 4, -2, 3)$, $k = (0, 1, -1, 0)$

K Jordanově buňce řádu 1 příslušné vlastnímu číslu 3 pozůstává odpovídající řetězec ~~f~~ z jediného vlastního vektoru příslušného vlastnímu číslu 3, na nějž lze zvolit kterýkoliv vlastní vektor lineárně nezávislý na g, tedy například pro volbu $a = 0$, $b = 1$ vektor

$f = (0, 1, 0, 1)$.

Jordanův kanonický tvar matice B je

$$J(B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro matici Q mající ve sloupcích postupně uloženy složky vektorů f, g, h, k:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak platí $J(B) = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$.