mail: 380425 @mail.muni.cz

CV. 1 | Indukce + výroky

(2 omluvené absence)

zápočtové písemky: 22.10., 26.11. (10+10 bodů)

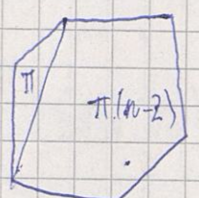
písemná zkouška: 80 bodů

cv. 1 ~~téma: indukce~~

1) najdi nejmenší m takové, že $\forall n \geq m: 2^n > (n+k)^2$
   závislé na k
   $(m,k) \dots (6,1)$

2) $\forall r \in \mathbb{R} \wedge r + \frac{1}{r} \in \mathbb{Z} \implies r^n + \frac{1}{r^n} \in \mathbb{Z}$

3) $\forall n$ součet vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku je $\pi(n-2)$



4)

5) $p \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}$ $\quad l \cdot \cos p \in \mathbb{Z}$, dokaž $\forall n \in \mathbb{N}: l^n \cos(np) \in \mathbb{Z}$

$$\cos(np) + \cos((n-2)p) = 2\cos((n-1)p) \cdot \cos p$$

$$l^n \cos(np) = 2 \cdot l^{n-1} \cos((n-1)p) \cdot l \cdot \cos p - l^2 \cdot l^{n-2} \cos((n-2)p)$$

bázový krok: ~~$n \in \{1,2\}$~~ $n \in \{0,1\}$

složený výrok - formule

$\boxed{\text{Cv. 2}}$

- materiály: math.muni.cz (~klima Základy matematiky
  IS - Kutálková (bakalářka)
  Kapitoly z diskrétní matematiky - Matoušek, Nešetřil

- priorita spojek:
  1) $\neg$
  2) $\wedge, \vee$
  3) $\rightarrow, \leftrightarrow$

- asociativita, distributivita

- kontradikce - nesplnitelná formule
- tautologie: $\neg(A \wedge \neg A)$ zákon o vyloučení třetího

$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$

$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)\big) \rightarrow (A \rightarrow C)$ tranzitivita

A	B	C	$B \wedge$	$(A \leftrightarrow C)$
1	1	1		1
1	1	0		0
1	0	1		0
1	0	0		0
0	1	1		0
0	1	0		1
0	0	1		0
0	0	0		0

- predikátová logika
- atomické formule tvoří složené formule
  + konstanty

- komutativita stejných kvantifikátorů

dobré platí $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi$ pro $\exists$ i $\vee$ analogicky

- Shefferův symbol $|$ (nand, rovna)

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

$\boxed{\text{ČV. 3}}$

- $P(A)$ ... potenční množina
- systém množin - množina, jejíž prvky jsou množiny

$$\left|\left\{ \{\{\emptyset,\emptyset\}\}, \emptyset, \{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\},\{\emptyset,\emptyset\}\} \right\}\right| = 2$$

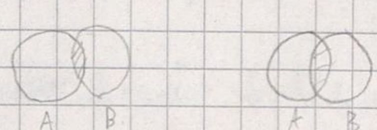
dost jich je prvků je stejných

- DeMorgan

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

- sym. rozdíl $A \div B$
- Dokažte:

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$



$$x \in A \setminus (A \setminus B) \iff x \in A \wedge x \notin A \setminus B \iff x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) \iff x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$$
$$\iff (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff x \in A \wedge x \in B$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$x \in R \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \iff$$
$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \iff x \in A \vee x \in B$$

$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$x\in A \wedge \neg(x\in B\wedge x\in C) \iff x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)$

$(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C)\iff x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)$

$A\div(B\div C) = (A\div B)\div C$

$x\in A\setminus(B\div C)\vee x\in(B\div C)\setminus A \iff (x\in A\wedge\neg(x\in B\setminus C\vee x\in C\setminus B))\vee((x\in B\setminus C)\vee x\in C\setminus B) \dots$

$\iff (x\in A\wedge(\neg(x\in B\wedge x\notin C)\wedge\neg(x\in C\wedge x\notin B)))\vee(((x\in B\wedge x\notin C)\vee(x\in C\wedge x\notin B))\wedge x\notin A)$

$\iff (x\in A\wedge((x\notin B\vee x\in C)\wedge(x\notin C\vee x\in B)))\vee(\dots)$

$\iff \cancel{(x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)}$

$\iff (((x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\in C))\wedge(x\notin C\vee x\in B))\vee(\dots)$

$\iff (\cancel{(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C)\vee(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C)\vee(x\in A\wedge x\notin B\wedge x}\dots$

$\iff (\cancel{(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C)}\vee(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C))$

– dokažte

$A\cap B\subseteq C\iff A\cap(B\setminus C)=\emptyset$

"$\Rightarrow$" $A\cap(B\setminus C)\neq\emptyset\Rightarrow A\cap B\not\subseteq C$

$x\in A\cap(B\setminus C)\iff x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C)\iff x\in A\cap B\wedge x\notin C\Rightarrow A\cap B\not\subseteq C$

"$\Leftarrow$" obměnou

– dokažte

$A\subseteq C\Rightarrow [A\subseteq B\iff (C\setminus B)\subseteq(C\setminus A)]$

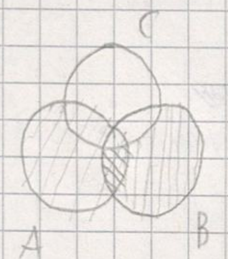
"$\Rightarrow$" $x\in A\Rightarrow x\in B$

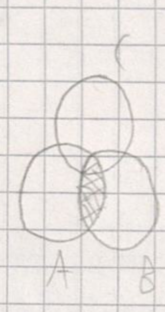
$x\in B\Rightarrow x\in C$ $\quad x\in C\setminus B\iff x\in C\wedge x\notin B \iff x\in C\wedge x\notin A\Rightarrow x\in C\setminus A$

"$\Leftarrow$" sporem, kdyby $x\in A\wedge x\notin B$, tak $x\in C\setminus B\Rightarrow x\notin C\setminus A$ (spor)

- rozhodněte, zda platí

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$





$$A_i = \{A_i \mid i \in I\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$$

$$\bigcup P(A) = A$$

$$\bigcup P(A) = \emptyset$$

- dokažte $A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$

$$x \in A \land x \in \bigcup_{i \in I} B_i \iff x \in A \land \exists i \in I : x \in B_i \iff \exists i \in I : (x \in A \land x \in B_i) \iff x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

$\boxed{\text{3. PŘ}}$

$A \cong B$: existuje izomorfismus (bijekce) $f: A \to B$ $\quad |A| = |B|$

$|A| \leq |B|$ . . . existuje prosté (injekce) zobrazení $f: A \to B$

- Cantorova věta: $|A| < |P(A)|$

Důkaz: $|A| \leq |P(A)|$, ~~prosté~~ ~~f~~ injekce ~~f: A~~ $f(a) = \{a\}$

Dokažme $|A| \neq |P(A)|$, to protože neexistuje surjekce $f: A \to P(A)$

Nechť $f: A \to P(A)$ je surjekce

$$Y = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Předpokládáme, že $Y = f(b)$ pro nějaké $b \in A$

$$\left.\begin{array}{l} b \in Y = f(b) \implies b \notin f(b) = Y \\ b \notin Y = f(b) \implies b \in Y \end{array}\right\} \text{spor}$$

- Najděme injekci $f: P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, tedy $|P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$, takže $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$

$$X \subseteq \mathbb{N} \qquad f(X) = 0{,}a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \qquad a_i = \begin{cases} 0 & i \notin X \\ 1 & i \in X \end{cases}$$

- dokonce platí i $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

- $\underline{A^B}$ ... množina zobrazení z $B \to A$

$|A^B| = |A|^{|B|}$

$2^Y \cong P($

$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$

$(A^B)^C \cong A^{B \times C}$

pokud B, C disjunktní: $A^{B \cup C} \cong A^B \times A^C$

- $P(X) \cong 2^X$ $\quad$ $2 = \{0, 1\}$

bijekce $F: P(X) \to 2^X$

$F(Y): X \to 2$

$Y \subseteq X$

$$F(Y)(x) = \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & x \notin Y \end{cases}$$

$F(Y)$ ... char. funkce Y ... χ_Y

$f: X \to 2$ $\quad$ $Y = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ $\quad$ f χ_Y

$g \circ f: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$f \circ id_A = f$

$id_B \circ f = f$

$f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$ ... pro bijekci f

$\left.\begin{array}{l} k_a \circ k_b = a \\ k_b \circ k_a = b \end{array}\right\}$ konst. zobrazení

$$\underbrace{\prod_{i \in I} A_i}_{\text{kart. součin}} = \{\underbrace{(a_i)_{i \in I}}_{I\text{-tice}} \mid a_i \in A_i\} = \{a: I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid a(i) \in A_i\}$$

$$\prod_{i \in I} A = A^I$$

- relace: podmnožina kart. součinu
- zobrazení: každý prvek má <u>právě</u> 1 obraz

$f: A \to B$

$R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ relace (funkce f)

zobrazení je spec. případ relace

Pro lib. $a \in A$ existuje právě jeden $b \in B$ tak, že $(a,b) \in R$ – def. zobrazení

- def. obor a obor hodnot relace se definuje ~~analogicky~~ podobně

$R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$

$S \circ R \subseteq A \times C$

$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists b \in B: (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$

$\boxed{4. CV}$

$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$

* Dokažte: $A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

$x \in A \vee x \in \bigcap_{i \in I} B_i \iff x \in A \vee (\forall i \in I)(x \in B_i) \iff (\forall i \in I)(x \in A \vee x \in B_i) \iff x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

* $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$

$x \in A \wedge x \notin \bigcap_{i \in I} B_i \iff x \in A \wedge (\exists i \in I)(x \notin B_i) \iff (\exists i \in I)(x \in A \wedge x \notin B_i) \iff \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$

* Najděte všechny množiny A, pro které

$A \setminus \{\emptyset\} = A \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

to znamená $A \setminus \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ $/ \cup \{\emptyset\}$

$A \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

~~$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$~~ * přijmě $\emptyset \notin A$

~~$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$~~

$A = \emptyset$

$A = \{\{\emptyset\}\}$

$A = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

$A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

* Pro které množiny A platí:

$$\bigcup A = \bigcap A$$

$$B \in \bigcup A \iff B \in \bigcap A$$

$$(\exists X \in A)(B \in X) \iff (\forall X \in A)(B \in X)$$ (použilo se jen "$\Rightarrow$")

$A = \{B\}$, tedy A je jednoprvková

* Dokažte $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$(x,y) \in A \times (B \cup C) \iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \iff (A \times B)$$

* Dokažte

$$A \times \bigcup_{i \in I} A_i = \cancel{(A \times B) \cup (A \times C)} \bigcup_{i \in I} (A \times A_i)$$

$$(x,y) \in A \times \bigcup_{i \in I} \iff x \in A \wedge (\exists i \in I)(y \in A_i) \iff (\exists i \in I)(x \in A \wedge y \in A_i) \iff \bigcup_{i \in I} (A \times A_i)$$

* Dokažte $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$

$$(x,y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in B \wedge y \in A) \iff$$

$$\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in A \wedge y \in B) \iff x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B$$

* Pro které množiny A, B platí $P(A \setminus B) \subseteq P(A) \setminus P(B)$

$$\emptyset \in P(A \setminus B)$$

$$\emptyset \in P(A) \wedge \emptyset \in P(B) \Rightarrow \emptyset \notin P(A) \setminus P(B)$$

spor, tedy žádné A, B

* Najděte všechna zobrazení z $\{1,2,3\}$ do $\{a,b\}$

$1 \mapsto$	a	a	a	b	b	b	a	b
$2 \mapsto$	a	a	b	a	b	a	b	b
$3 \mapsto$	a	b	a	a	a	b	b	b

obraz $Im(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$ $\quad f: A \to B$

injekce $A \to B$ existuje $\iff |A| \leq |B|$ $\qquad f: \emptyset \to A$ prázdné zobrazení

surjekce $A \to B$ existuje $\iff |A| \geq |B|$

* Pro které množiny A existuje injekce $\{0,1\}^A \to A \times A$

$$2^{|A|} \leq |A|^2$$

$$|A| \in \{2,3,4\}$$

* Pro které množiny A existuje surjekce $A \times A \to A^A$.

$$|A|^2 \geq |A|^{|A|}$$

$$|A| \in \{1,2\}$$

* je to zobrazení?

$f: \mathbb{Z} \to (0,1)$, $f(x) = |x|$ $\quad$ není

$f: \mathbb{Z} \to \{0,1,2\}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 1 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$ $\quad$ není

$f: \mathbb{Z} \to \{0,1,2\}$, $f(x) = x \bmod 3$ $\quad$ je $\quad$ je surjektivní

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = 3x$ $\quad$ je $\quad$ je injektivní

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = (x-1)^2 + 1$ $\quad$ je

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} y & \text{pokud } (y-1)^2+1 = x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$\boxed{\text{4. PŘ}}$

A^B množina všech zobrazení $B \to A$

(i) $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$

(ii) $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$ $\qquad$ najít důkazy, není potřeba ~~[illegible]~~ znát důkazy

(iii) $A^{B \cup C} \cong A^B \times A^C$

– skládání relací je asociativní

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

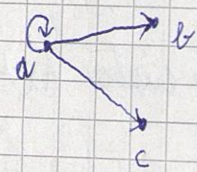
$R_{id_B} \circ R = R$

$R \circ R_{id_A} = R$

inverzní zobrazení R^{-1}, $B \times A$ $(b,a) \in R^{-1} \iff (a,b) \in R$

$R \subseteq A \times A$ relace na množině A

$(a,b) \in R$



$R = \{(a,a), (a,b), (a,c)\}$

– relace reflexivní, symetrická, tranzitivní – ekvivalence

např. $A \times A$, $=$, $\equiv$ (mod), def $\mathbb{Q}$

$$R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = cb$$

$a \in A$, $R_a = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$

třída relace R vzhledem a.

$\boxed{\text{5. CV.}}$

* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} y & (y-1)^2 + 1 = x \\ 0 & \end{cases}$

~~není injektivní ani surjektivní~~

~~je to~~ $x = 2$

$(y-1)^2 = 1$

$y \in \{0,2\}$, není to zobrazení

* $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to P(\mathbb{Z})$ $f((x,y)) = \{x,y\}$

to je zobrazení, není injektivní ani surjektivní

* $f: P(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}_0$ $f(X) =$ počet prvků X

~~je to zobrazení, není injektivní, je surjektivní~~

není to zobrazení, nelze zobrazit $\mathbb{Z}$

* $f: P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $f(X) =$ nejmenší prvek X — není to zobrazení, nikam nezobrazí $\emptyset$

* $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{ax+b}{2} \right\rfloor$

najděte a, b tak, aby f bylo

a) injektivní $(a,b) = (2,2)$

b) surjektivní $(a,b) = (2,2)$

~~ad~~

* $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x-2$ $g(x) = 2x+3$

$(f \circ g)(x) = 2x+3-2 = 2x+1$

$(g \circ f)(x) = 2(x-2)+3 = 2x-1$

$f^{-1}(x) = x+2$

$g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$f \circ g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} - 2 = \frac{x-7}{2}$

* dokažte, že jsou bijekce a najděte ~~bijekce~~ inverze

a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x,y) = 2^{x-1}(2y-1)$

$2^{x_1-1}(2y_1-1) = 2^{x_2-1}(2y_2-1)$

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ injekce

surjekce $x = \nu_2(n)+1$ FTA

$f^{-1}(n) = \left(\nu_2(n)+1, \frac{\prod \alpha_i + 1}{2}\right)$

$n = 2^{\nu_2(n)} \prod_{\substack{\alpha_i > 0 \\ p_i > 2}} p_i^{\alpha_i}$

b) $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$f: (a,b) \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = \frac{x-a}{b-x}$

(interval

$\frac{x-a}{b-x} = \frac{y-a}{b-y}$

$xb - xy - ab + ya = yb + xa - xy - ab$

$xb + ya = yb + xa$

$x(b-a) = y(b-a)$

$x = y$ injekce

$a < x < b$

$ay + a < yb + a < yb + b$

zřejmé

surjekce

$\frac{x-a}{b-x} = y$

$x - a = yb - xy$

$x(y+1) = yb + a$

$x = \frac{yb+a}{y+1}$ surjekce

$x(b - f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) - a$

$xb - xf^{-1}(x) = f^{-1}(x) - a$

$f^{-1}(x)(x+1) = xb + a$

$f^{-1}(x): \mathbb{R}^+ \to (a,b)$ $f^{-1}(x) = \frac{xb+a}{x+1}$

* A, B množiny $A \cap B = \emptyset$

$$f: P(A \cup B) \to P(A) \times P(B)$$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

$$(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$$

$$X \cap A = Y \cap A \land X \cap B = Y \cap B$$

$$(x \in X \land x \in A) \iff (x \in Y \land x \in A)$$

A B

$X = Y$ injekce

$$z \in P(A) \times P(B)$$

$$f(X) = z = (X \cap A, X \cap B) = (Z_1, Z_2)$$

$$f(Z_1 \cup Z_2) = ((Z_1 \cup Z_2) \cap A, (Z_1 \cup Z_2) \cap B)$$

$$= (Z_1, Z_2) \quad \text{surjekce}$$

A Z_1 B Z_2

$$f^{-1}: P(A) \times P(B) \to P(A \cup B)$$

$$f^{-1}(Z_1, Z_2) = Z_1 \cup Z_2$$

* $f: A \to A$ $\exists n \in \mathbb{N}: f^n = id_A$

Pak f je bijekce

$f(x) = f(y)$

$f^n(x) = f^n(y)$

$x = y$

injekce

$y = f(x)$

$f^{n-1}(y) = x$

surjekce

* $f: A \to B$ $g: B \to C$, zjistěte zda platí

a) f, g inj. $\iff$ $g \circ f$ inj.

b) f, g surj. $\iff$ $g \circ f$ surj.

5. PŘ

$f: A \to B$

$J_f \subseteq A \times A \qquad J_f = \{(a,b) \in J_f \mid f(a) = f(b)\}$ jádro f

je to relace ekvivalence

$A \setminus R = \{R_a \mid a \in A\}$ faktorová množina určená R

$p_R: A \to A \setminus R \qquad p_R(a) = R_a$ projekce

$J_{p_R} = R$

$A \setminus J_f \cong Im(A)$

$\qquad\qquad\quad \shortparallel$

$\qquad\qquad\quad f(A)$

- rozklad R množiny A je systém podmnožin množiny A takový, že

(i) $\bigcup R = A$

(ii) $X_1 \neq X_2 \wedge X_1, X_2 \in R \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset$

relace ekviv. a rozklad je to samé

6. CV

$P(A) \cong 2^A$

$X \subseteq A$ charakteristické zobrazení (indikátor množiny)

- relace je uspořádání, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní

* Na množině $A = \{0,1\}$ nalezněte všechny relace a určete, které z nich jsou R, S, A, T.

$A \times A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$|A \times A| = 16$

$R_1 = \emptyset$

$R_2 = \{(0,0)\}$

$R_3 \{(0,1)\}$

$R_4 = \{(1,0)\}$

$R_5 = \{(1,1)\}$

$R_6 = \{(0,0), (0,1)\}$

$R_7 = \{(0,0), (1,0)\}$

$R_8 = \{(0,0), (1,1)\}$

$R_9 = \{(0,1), (1,0)\}$

$R_{10} = \{(0,1), (1,1)\}$

$R_{11} = \{(1,0), (1,1)\}$

$R_{12} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$

$R_{13} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

$R_{14} = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$

$R_{15} = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$

$R_{16} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

reflexivní: $R_2, R_4, R_8, R_{13}, R_{14}, R_{16}$

symetrická: $R_1, R_2, R_5, R_8, R_9, R_{12}, R_{15}, R_{16}$

antisymetrická: $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13}, R_{14}$

tranzitivní: $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13}, R_{14}, R_{16}$

$R \circ R^{-1} \subseteq id_A$ (nemusí platit rovnost)

* Na množině $\{1,2,3\}$ nalezněte všechny relace ekvivalence

$E_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)$

$E_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

$E_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$

$E_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

$E_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

* ~~Nechť~~ $A = \{1,2,3\}$.

a) nalezněte injektivní zobrazení $f: A \to A$, které není reflexivní relací

b) nalezněte reflexivní relaci R na A, která není zobrazením

c) ~~Nechť~~ nalezněte zobrazení $f: A \to A$, které je symetrickou relací a platí $f \circ f \neq f$

a) $f = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

b) $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$

c) $f = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$ $\quad f \circ f = id_A \neq f$

$\boxed{6.\ PŘ.}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \; = \mathbb{Z}$, kde $(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$

$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- uspořádané množiny $(A, \leq)$
- relace uspořádání – reflex., antisym., tranz.
  - značení $\leq$

- př. uspořádaných množin: $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq)$
- lin. usp. množina aka řetězec - neobsahuje nesrovnatelné prvky
- Hasseův diagram
- protiřetězec
- nejmenší prvek
- největší prvek

$\geq = (\leq)^{-1}$

- duálně uspořádaná množina

$(A, \geq) = (A, \leq)^{op}$

- princip duality
- izotonní zobrazení
- izomorfismus
- supremum, infimum

sup $\emptyset$ ... nejmenší prvek A

$\boxed{7.CV}$

* Najděte relaci R na množině $\mathbb{N}$, která není zobrazení, ale $R \circ R$ zobrazení je

$R_1 = \{(1,2), (1,3), (2,3), (4,4), (5,5), (6,6), \dots\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\} \cup \{(n,n) \mid n \geq 4\}$

$R_2 = \{(n,2) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(3,4)\}$

* ϱ relace na množině $\mathbb{N}$, rozhodněte, zda je R, S, A, T

a) $x \varrho y \iff x \cdot y$ je liché — ~~reflexivní~~ je tranzitivní, symetrické

b) $x \varrho y \iff x, y$ jsou nesoudělná — je symetrická

c) $x \varrho y \iff y = x \lor y = 2x \lor y = 3x$ — je reflexivní, je antisymetrická

* ϱ relace na $\mathbb{Z}$, rozhodněte zda ϱ je R, S, A, T

a) $x \varrho y \iff x \neq y$ — je symetrická

b) $x \varrho y \iff x$ sudé, y liché — je antisymetrická, tranzitivní (obě platí vacuous truth)

c) $x \varrho y \iff x^2 = y$ — je antisymetrická, ~~...~~

* $A \neq \emptyset$, A konečná množina, ϱ relace na $P(A)$, je ϱ R, S, A, T?

a) $X \varrho Y \iff X \cup Y = A$ — je symetrická — např. T není $(A \setminus \{a\}, \{a\}), (\{a\}, A \setminus \{a\})$, $a \in A$

b) $X \varrho Y \iff X \cap Y = \emptyset$ — je symetrická — pro $|A| = 1$ je antisymetrická, tranzitivní

$R_a = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$ ... třída relace ekvivalence R určená prvkem

- třídy R_a pro $a \in A$ tvoří rozklad množiny A

$A \setminus R = \{R_a \mid a \in A\}$ ... faktorová množina relace R na množině A

* $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

ρ na M, $x \rho y \Leftrightarrow x$ a y mají stejný součet cifer

a) dokažte, že ρ je ekvivalence

b) najděte $M \setminus \rho$

ad a) reflex. zřejmé, symetrie zřejmé, tranzitivita zřejmé

ad b) $M \setminus \rho = \{\{1, 10\}, \{2, 11, 20\}, \{3, 12\}, \{4, 13\}, \{5, 14\}, \{6, 15\}, \{7, 16\}, \{8, 17\}, \{9, 18\},$
$\{19\}\}$

* ~~Na M = ...~~ Na $\mathbb{Z}$ zvolme relaci $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x \vee y = x+1\}$

reflexivní je

není symetrická

~~není tranzitivní~~ ρ není ekviv

* relace ρ na $P(\mathbb{N})$, $\rho = \{(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \mid A \setminus B$ je konečná množina$\}$

ρ je reflexivní

ρ není symetrická $\quad A = \emptyset, B = \mathbb{N}$

ρ není ekviv.

* na $\mathbb{Z}$ relace ρ, $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(y = x + 4k)$

je reflexivní $k = 0$

je symetrická $k, -k$

je tranzitivní $k + l$ $\qquad z = y + 4k = x + 4l + 4k = x + 4(k+l)$

~~$\mathbb{Z} \setminus \rho = \{\{4a\}, \{4a+1\}, \{4a+2\}, \{4a+3\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$~~

$\mathbb{Z} \setminus \rho = \{$ ~~$\{k \equiv 0 \pmod 4$~~ $[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$

$\boxed{7.\ \text{PŘ.}}$

$\sup\{a, b\} = a \vee b \qquad \inf\{a, b\} = a \wedge b$

$\sup X = \bigvee X \qquad \inf X = \bigwedge X$

$(P(X), \leq)$

$A \subseteq P(X) \qquad \sup A = \bigcup A \qquad \inf A = \bigcap A$

X^- množina dolních závor X

$(\mathbb{N}, |)$ ~~gcd(a,b) = a \vee b~~

$lcm(a,b) = a \vee b$

$gcd(a,b) = a \wedge b$

- věta: buď $(A, \leq)$ jejíž ~~libovolná~~ každá podmnožina má supremum, pak ~~libovolná~~ každá podmnožina má infimum

  $\underbrace{\text{každá podmnožina má supremum}}_{\text{tzv. úplný svaz}}$

- zavedení reálných čísel – Dedekind cuts

- ~~kombinatorika~~

8. CV.

* relace ekvivalence ϱ na $\mathbb{Z}$, najděte $\mathbb{Z}/\varrho$

a) $x \varrho y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 7$

$$\mathbb{Z}/\varrho = \{[0]_7, [1]_7 \cup [6]_7, [2]_7 \cup [5]_7, [3]_7 \cup [4]_7\}$$

b) $x \varrho y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y$

$(x+1)^2 = (y+1)^2$

$x = y$

$x+1 = -y-1$

$x = -y-2$

$$\mathbb{Z}_x = \{x, -x-2\}$$

$$\mathbb{Z}/\varrho = \{\mathbb{Z}_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

c) $x \varrho y \Leftrightarrow 2 \mid (x^2 - y^2)$

$$\mathbb{Z}/\varrho = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_2\}$$

* Nalezněte jádra a popište příslušný rozklad

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

$$J_f = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor\}$$ $\mathbb{R}_x = [x, x+1)$

$$\mathbb{R}/J_f = \{[x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

$$J_f = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |a| = |b|\}$$

$$\mathbb{R}/J_f = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

c) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x) = x \bmod n$

$$\ker f = \{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n \mid (a-b)\}$$

$$\mathbb{Z}/\ker f = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$$

(3) R, S relace na množině A, zda platí:

a) R,S reflexivní $\Rightarrow R\circ S$ reflexivní

b) R,S symetrické $\Rightarrow R\circ S$ symetrické

c) R,S tranzitivní $\Rightarrow R\circ S$ tranzitivní

ad a) $(\forall a\in A)((a,a)\in R)$

$(\forall a\in A)((a,a)\in S)$

$R\circ S = \{(a,b)\in A\times A \mid (\exists s\in A)((a,s)\in S \wedge (s,b)\in R)\}$

$(\forall a\in A)((a,a)\in R\circ S)$ ✓

ad b) ~~$(\forall a,b\in A)((a,b)\in A$~~

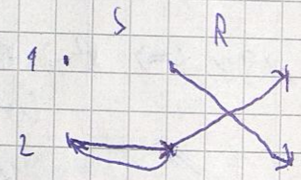
$(a,b)\in S \Rightarrow (b,a)\in S$

$(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$

$R = \{(1,2),(2,1)\}$

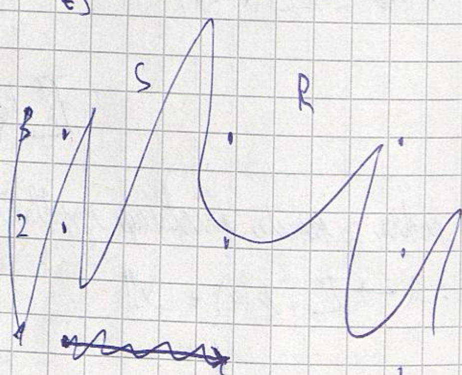
$S = \{(2,2)\}$

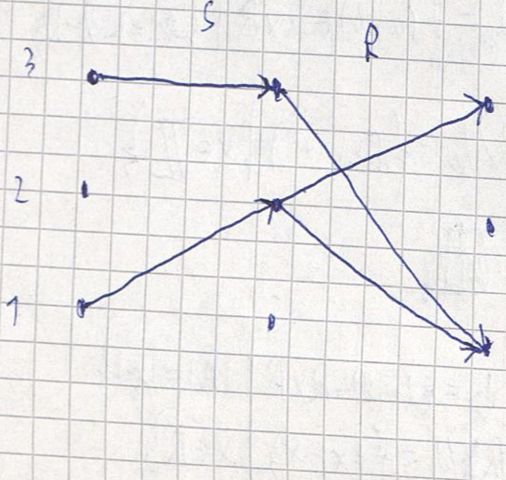
$R\circ S = \{(2,1)\}$ X



ad c) $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$

$\in S \qquad \in S \qquad\qquad \in S$





$S = \{(1,2),(3,3)\}$

$R = \{(2,1),(2,3),(3,1)\}$

$R\circ S = \{(1,3),(3,1),(1,1)\}$

X

* $R \subseteq A\times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$ dokažte

a) $(R^{-1})^{-1} = R$

b) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

c) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

ad a) $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$

$(R^{-1})^{-1} = \{(b,a) \mid (b,a) \in R\} = R$

ad b)

$(a,b) \in T \circ (S \circ R) \iff (\exists c \in C)\big((a,c) \in S \circ R \wedge (c,b) \in T\big) \iff$

$\iff \underline{(\exists c \in C)}(\exists d \in B)\big((a,d) \in R \wedge \underline{(d,c) \in S \wedge (c,b) \in T}\big)$

$\iff (\exists d \in B)\big((a,d) \in R \wedge (d,b) \in T \circ S\big)$

$\iff (a,b) \in (T \circ S) \circ R$

ad c) $\cancel{(S \circ R)^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in S \circ R\}}$

$\cancel{= \{(a,b) \mid \exists c \in B}$

$(a,b) \in R^{-1} \circ S^{-1} \iff (\exists c \in B)\big((a,c) \in S^{-1} \wedge (c,b) \in R^{-1}\big) \iff$

$\iff (\exists c \in B)\big((c,a) \in S \wedge (b,c) \in R\big) \iff$

$\iff (b,a) \in S \circ R \iff (a,b) \in (S \circ R)^{-1}$

* $R_1, R_2 \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, dokažte

$S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$

$(a,b) \in S \circ (R_1 \cup R_2) \iff (\exists c)\big((a,c) \in (R_1 \cup R_2) \wedge (c,b) \in S\big) \iff$

$\iff (\exists c)\big(((a,c) \in R_1 \vee (a,c) \in R_2) \wedge (c,b) \in S\big) \iff$

$\iff (\exists c)\big(((a,c) \in R_1 \wedge (c,b) \in S) \vee ((a,c) \in R_2 \vee (c,b) \in S)\big)$

$\iff (a,b) \in S \circ R_1 \vee (a,b) \in S \circ R_2$

$\iff (a,b) \in (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$

$a < b \iff a \leq b \wedge$ neexistuje $c \in A$: $a < c < b$

* Urče, zda se jedná o uspořádání na $\mathbb{N}$

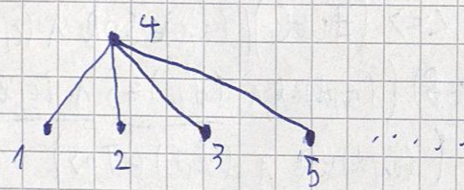
a) $x \leq y \iff x = y$ R, A, T

b) $x \leq y \iff x \leq y$ R, A, T

c) $x \leq y \iff x < y$ není R

ad b)

d) $x \leq y \iff y = 4 \vee y = x$ ~~není tranzitivní~~ R, A, T



e) $x \leq y \iff d(x) \leq d(y)$ není antisymetrické

počet cifer

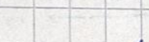
f) $x \leq y \iff x \not\equiv y \pmod 5$ není reflexivní

* a) $M = \{a, b, c\}$, $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

b) $M = \{a, b, c\}$, $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$

c) $M = \{a, b, c, d\}$, $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c)\}$

ad a)



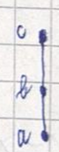
nejmenší, největší neexistují

max., min: a, b, c

sup $\{a, c\}$ neexistuje

inf $\{a, c\}$ neexistuje

ad b)



min: a

max: c

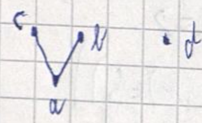
nejmenší: a

největší: c

sup $\{a, b, c\} = c$

inf $\{a, b, c\} = a$

ad c)



min: a, d

max: b, c, d

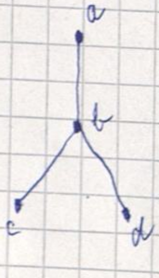
nejmenší: neexistuje

největší: neexistuje

sup $\{b, c\}$ neexistuje

inf $\{b, c\} = a$

* a)



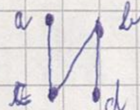
$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (b,a), (c,a), (d,a), (c,b), (d,b)\}$

min: c, d

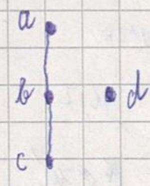
max: a

nejmenší: neexistuje

největší: a

b) 

min: c, d nejm.: neex
max: a, b nejv.: neex

c) 

min: c, d nejm.: neex.
max: a, d nejv.: neex

$\boxed{8.\text{PŘ.}}$

- důkaz PIE
- počet surjekcí
- Eulerova fce
- grafy
- ireflexivní relace: $(a,a) \notin R$ pro všechna $a \in A$

$\boxed{9.\text{CV.}}$

* A je množina, dokažte, že $(P(A), \subseteq)$ je uspořádaná množina

$X \subseteq X$

$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

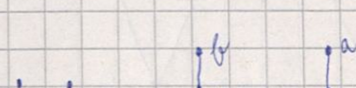
Hasseův diagram: a) $A = \emptyset$ 

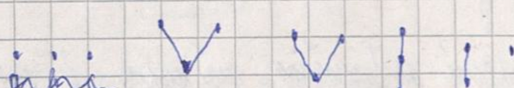
b) $A = \{a\}$ 

c) $A = \{a, b\}$ 

d) $A = \{a, b, c\}$ 

* ~~Hasse~~ Hasseovské diagramy všech uspořádání na

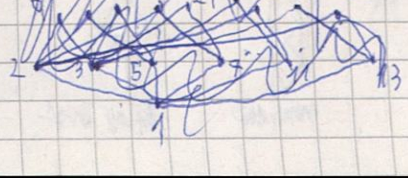
a) dvouprvkové množině $A = \{a, b\}$ 

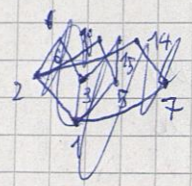
b) trojprvkové ... (až na izomorfismus) 

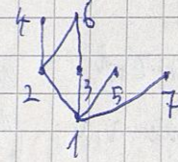
* Na $M = \{1, 2, \dots 17\}$ relace R:

$(x,y) \in R \iff (\exists n \in \mathbb{N})(y = nx) \iff x \mid y$

zřejmě je to uspořádání (z def. dělitelnosti)







Hasseův diagram

max: 4, 5, 6, 7
min: 1
nejv: není
nejm: 1

– automorfismus množiny $(A, \leq)$ – izomorfismus $f: A \to A$

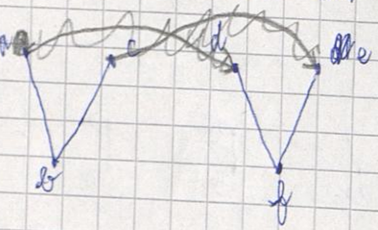
* rozhodněte, zda jsou zobrazení izotonní

a) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x+1$ izotonní $x \leq y \Rightarrow x+1 \leq y+1$
b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$ izomorfismus
c) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$ izotonní $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$
d) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$ není izotonní $-1 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 0$
e) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$ není izotonní $-2 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 1$
f) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 1$ izotonní $x \leq y \Rightarrow 1 \leq 1$
g) $P(\{a,b\}) \to P(\{a,b,c\})$, $X \mapsto X$ izotonní
h) $P(\{a,b\}) \to P(\{a,b,c\})$, $X \mapsto X \cup \{c\}$ izotonní $X \subseteq Y \Rightarrow X \cup \{c\} \subseteq Y \cup \{c\}$

* Hledáme všechna izotonní zobrazení

je jich 15

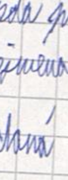
* Hledáme všechny automorfismy $\{a, b, c, d, e, f\}$



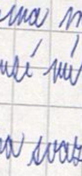
jsou celkem 8

– svaz – libovolná neprázdná a konečná podmnožina má sup a inf. $\Leftrightarrow$ lib. 2-prvková podmn. má sup. a inf.
– úplný svaz A – každá podmnožina má sup a inf
(zejména A musí mít nejmenší a největší prvek)

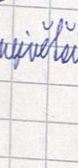
* rozhodněte, zda je daná množina svaz.



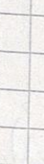
nemá sup



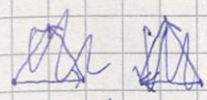
úplný svaz



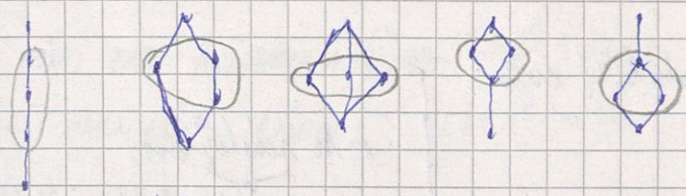
úplný svaz



úplný svaz



* najděte všechny pětiprvkové svazy až na izomorfismus



* rozhodněte, zda je svaz (úplný)

a) $M = P(\{A\})$, A množina, ϱ je $\subseteq$

~~$M = \{\emptyset, \{A\}\}$~~ inf. průniky podmnožin

$M = \{\{A\}, \emptyset\}$ sup. , sjednocení podmnožin

úplný svaz

b) A nekonečná, M množina jejích ~~všech~~ konečných podmnožin, ϱ je $\subseteq$

svaz, není ú

*$M = P(\{A\}) - \{\emptyset\} = \{A\}$, ϱ je $\subseteq$

supremum = infimum = mn $\{A\}$ => úplný svaz

* $M = \mathbb{N}$, ϱ je $|$ (dělitelnost)

svaz (není úplný)

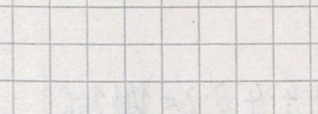
inf = gcd
sup = lcm

$\boxed{9. PŘ.}$

- minimální cesta (Dijkstra), minimální kostra (Kruskal, Borůvka, Jarník)
- i grafy se zkouší!

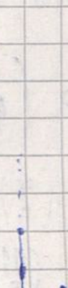
$\boxed{10. CV}$

* najděte 4-prvkovou uspořádanou množinu, které má 2 maximální prvky a nemá největší prvek

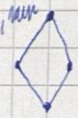


* najděte 4-prvkovou množinu, kde je každý prvek max i min.

* Najděte usp. množinu, kde je 1 max a žádný nejv., konečná neexistuje



* 2 nesrovnatelné, nejvíc max, min
~~∄ max, sup~~



* 1 nejm., 3 min.
neexistuje

* $M = \mathbb{N}$, ~~[illegible]~~ usp. $\leq$, je to svaz nebo úplný svaz?

je to neúplný svaz
protože chybí největší prvek, to je úplný

* M = množina všech ekvivalencí na A, –||–?

$x \in M$
$x \subseteq A \times A$

infima: průniky
suprema: ~~[illegible]~~ tranzitivní obal sjednocení

je to úplný svaz

nejv. prvek: $A \times A$
nejm. prvek: $\{(a,a) \mid a \in A\}$

* A svaz, dokažte $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ $L \leq R$

$(a \wedge b) \leq a \leq a \vee b$
~~$(a \wedge b) \leq b \leq a \vee b$~~
$a \wedge b \leq b \leq b \vee c$
$a \wedge b \leq a \leq c \vee a$

$a \wedge b$ je dolní závora $\{a \vee b, b \vee c, c \vee a\}$
$b \wedge c$ –||–
$c \wedge a$ –||–

tedy $a \wedge b \leq R$
$b \wedge c \leq R$
$c \wedge a \leq R$

Takže R je horní závora $\{a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a\}$

Tedy $L \leq R$.

kombinatorika

7^5, 4^2, 3
BBMČBČBB
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

1) ~~$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$~~ ~~sudých je 300~~ ~~$\frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 300$~~

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$
sudých je ~~150~~ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 156$

04 12 20 24
32 40 54

menších než 4000 čísel je $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
dělitelných 4 čísel je ~~[illegible]~~ $2 \cdot 36 = 72$

2) $\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 12\,600$

3) nevracíme $\binom{7}{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = 378$
vracíme $\binom{11}{5} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} =$

4) 1. xx | 2. x | 3. x | 4. x $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$

5) $\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{13}{13}$

6) ti 3 si mezi sebou ~~[illegible]~~ netřesou $3\cdot 7 = 21$

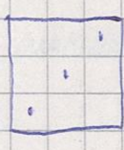
ti 3 si mezi sebou třesou $21 + \binom{3}{2} = 24.$

7) $\binom{12}{4}$ ....|..|..|..|| $\frac{12!}{8!4!}$ možnost: $\binom{7}{4}$.|..|..|.|..|..

~~8)~~ $\boxed{11. \text{CV.}}$

8) $\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5}\cdot\underline{5} = 5^8$

9) $12\cdot 9\cdot 10 = 1080$

10)  $n!$

11) $\binom{30}{5} - \binom{27}{2}$

0 koní + 1 kůň + 2 koně

$\binom{27}{5} + \binom{3}{1}\cdot\binom{27}{4} + \binom{3}{2}\cdot\binom{27}{3}$

12) $\underbrace{.|..|...|.}_{n}$ ... $k-1$

$n \in \mathbb{N}_0$ $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n}$

$n \in \mathbb{N}$ $\binom{n-1}{k-1}$

13) $\binom{10}{3} - \binom{6}{3} + 1 = 101 = \binom{9}{2} + \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + 1$

14) 1, 2, 5, 6 0 1 E

$i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$6(1+2+5+6)\cdot 10^i = 84\cdot 10^i$

$\sum_{i=0}^{3} 84\cdot 10^i = 93324$

_ _ _ 1 3!
_ _ _ 2 3!
_ _ _ 5 3!
_ _ _ 6 3!
$3!(1+2+5+6)$

úlohy na PIE (druhá úloha je tam omylem):

2) $\frac{8!}{2!2!3!} - \underbrace{\frac{7!}{2!2!2!}}_{\text{obsahuje WZ}}$

1) $4! - (3! + 3!) + 2! = \boxed{14}$

A je první D je poslední A i D jsou první a poslední

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$|A_1| = 3!$, $|A_2| = 3!$, $|A_1 \cap A_2| = 2!$

3) bez omezení: $9!$

$A_1 \ldots$ 3A vedle sebe

$A_2 \ldots$ 3F vedle sebe

$A_3 \ldots$ 3N vedle sebe

$A_1A_2A_3, F_1, F_2, F_3, N_1, N_2, N_3$

$A_1 \ldots 7! \cdot 3!$

$A_2 \ldots 7!\,3!$

$A_3 \ldots 7!\,3!$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$= 3 \cdot 7! \cdot 3! - 3 \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3! + 3!\,3!\,3!\,3!$

$\boxed{9! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|}$

* úloha 15 ze sbírky

6 osob angličtiny

6 N

7 F

4 A+N

3 N+F

2 A+F

1 A+F+N

Kolik osob celkem?

Kolik pouze angličtiny?

$A_1 \ldots A$

$A_2 \ldots N$

$A_3 \ldots F$

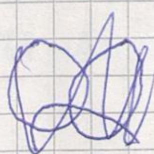
$|A_1| = 6$

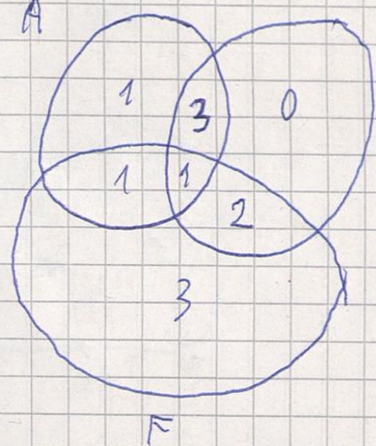
$|A_2| = 6$

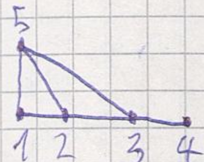
$|A_3| = 7$

$\underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|}_{\text{osob celkem}} = 6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$

$6 - 4 - 2 + 1 = 1$ pouze angličtiny





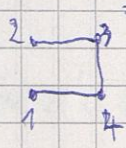
* 

~~Matice~~ Najděte matici sousednosti

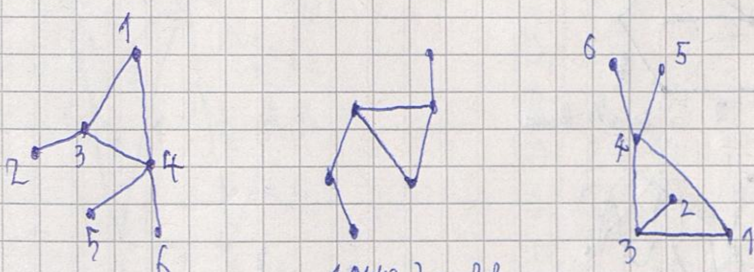
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nakreslete graf s maticí sousednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

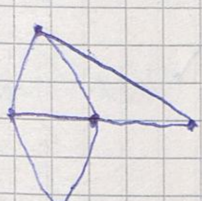


* Z následující trojice grafů vyberte 2 izomorfní



pouze 2 vrcholy stupně 1

*



Kolik obsahuje kružnic

~~d~~ $3+2+1=6$

* Nakreslete graf takový, aby měl
a) 1 komponentu, 3 vrcholy a byl nesouvislý
b) 2 komponenty, 3 vrcholy
c) 5 vrcholů, 3 kružnice
d) 4 vrcholy se stupni 2, 2, 2, 4

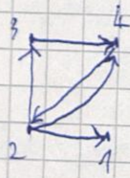
ad a) nelze

ad b)

ad c)

ad d) nelze

* Najděte matici sousednosti

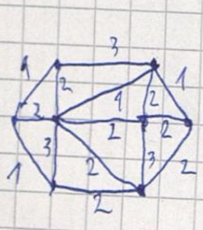


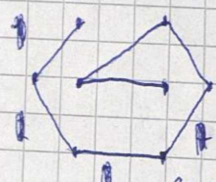
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

~~* najděte min kostru~~

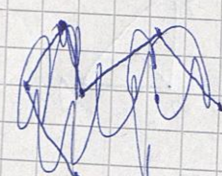
- Jarník-Prim, Borůvka (každá hrana musí mít unikátní ohodnocení), Kruskal, Dijkstra

* najděte min kostru

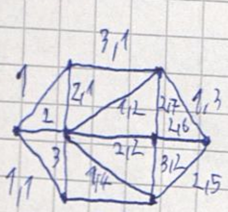


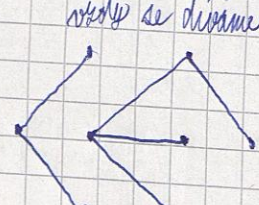


Jarník-Prim

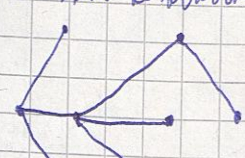


vždy se díváme na 1 vrchol a toho se zbavíme





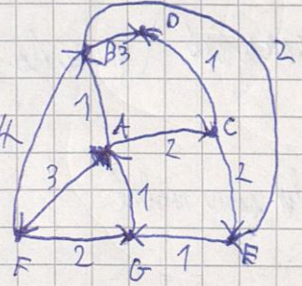
1. krok



Borůvka

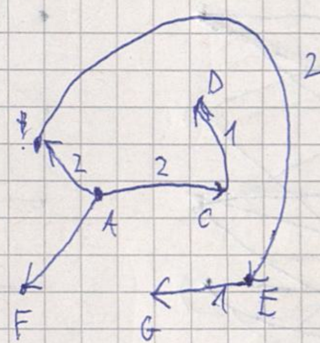
Kruskal

* najděte nejkratší cesty z ~~bodu~~ vrcholu A



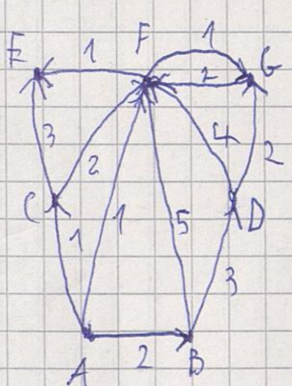
A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	1	2	∞	∞	3	∞
0	1	2	4	3	3	∞
0	1	2	3	3	3	∞
0	1	2	3	3	3	∞
0	1	2	3	3	3	4
0	1	2	3	3	3	4
0	1	2	3	3	3	4

strom nejkratších cest



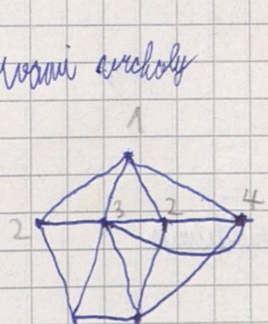
* najděte nejkratší cesty z ~~bodu~~ vrcholu A

Algoritmy. věta



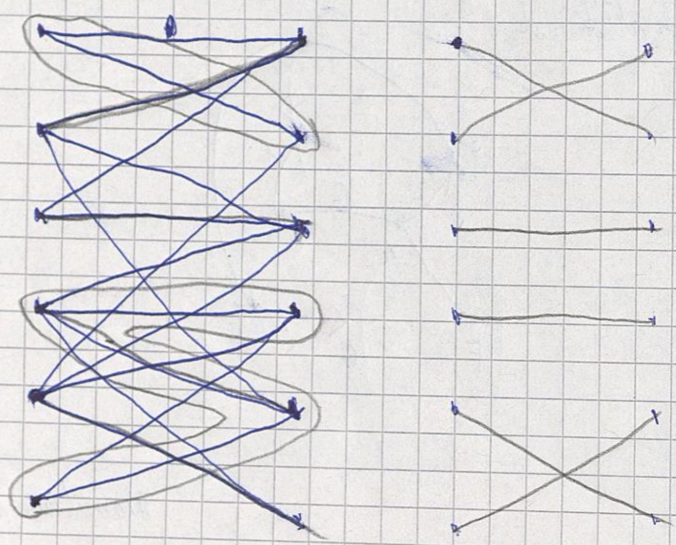
A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	2	1	∞	∞	1	∞
0	2	1	∞	4	1	∞
0	2	1	∞	2	1	2
0	2	1	5	2	1	2
0	2	1	5	2	1	2
0	2	1	5	2	1	2
0	2	1	5	2	1	2

* Obarvěte řádně 4 barvami vrcholy

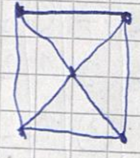


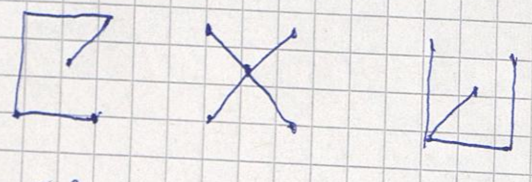
* ~~maximální párování~~
- maximální párování v bipartitním grafu
- alternující cesta = hrany v ní střídavě patří a nepatří do párování (může to být i 1 hrana)
- volný vrchol – není obsažen v žádné hraně z párování
- zlepšující cesta – alternující cesta, jejíž oba krajní vrcholy jsou volné

* Najděte max. párování

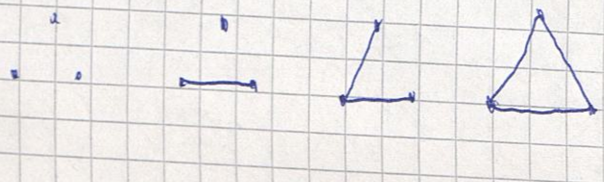


* najděte všechny kostry grafu (až na izomorfismus)





* najděte všechny grafy o 3 vrcholech až na izomorfismus

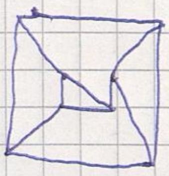


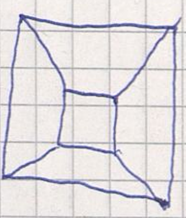
* Jsou izomorfní?

a)

ne

b)





ne