1. PŘ.

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

- materiály – d15u
- zápočet – nejvýše 2 neomluvené neúčasti
  - 2 zápočtové písemky
- lze získat body i tvorbou testů z LA v 15u
- zkouška – 2 zápočtové písemky, zkoušková písemka, ústní
  - 10+10 bodů — 50 bodů — 30 bodů
  - ~~5.10~~ 6.11.

$0 \in \mathbb{N}$

na písemce: Frobeniova věta

$V\ \mathbb{Z}$

1. CV.

- V $\mathbb{Z}_p$ řešte rovnici $2x+1=2$ pro $p \in \{3, 5, 7\}$
- V $\mathbb{Z}_7$ řešte a) $x^3=1$
  b) $x^3=6$
- V $\mathbb{Z}_{11}$ řešte a) $x^2+x=9$
  b) $x^2+2x=8$

ad a) $x^2+x+2=0$ (použít ~~DA~~ vzorec ~~pro~~ kvad. rovnici v $\mathbb{Z}_{11}$)

ad b) stejně

- Zjistěte zda jsou následující množiny vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Pokud ne, určete, které axiomy vektorového prostoru nejsou splněny

a) $V=\{(x,y,z)\}$ s operacemi $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$

$$k\cdot(x,y,z)=(kx,y,z)$$

~~Ověřením axiomů se jedná o vektorový prostor~~

Jediný axiom 7 neplatí $\quad (a+b)(x,y,z)=(ax+bx,y,z)$

Ostatní platí $\quad a(x,y,z)+b(x,y,z)=(ax+bx,y+z,y+z)$ $\quad \neq$

f) $V=\{(1,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ s operacemi $\quad (1,x)+(1,x')=(1,x+x')$

$$k(1,x)=(1,kx)$$

Je to vektorový prostor (jednička tam nic nedělá)

- 20 Uvažte, zda může vek. prostor obsahovat dva různé nulové prvky? Ne.

$\cancel{0_1 = 0_1+0_2 = 0}$

$0_1 = 0_1+0_2 = 0_2$

- Může k vektoru existovat dva různé opačné vektory? Ne ℓ) Množina všech matic typu 2x2 tvaru $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ se standardními operacemi sčítání a násobení skalárem

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 1 \\ 1 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & 2 \\ 2 & b+b' \end{pmatrix}$$ + není operace

$\boxed{2.PŘ}$

$\boxed{2.CV}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{(4B)\cdot C}_{2\times 3} + 2B$ — $2\times 2 \cdot 2\times 3 \quad 2\times 2$ — nelze sečíst

b) $\underset{2\times 3}{2A^T} + \underset{2\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

c) $D^T - E^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 7 \\ 6 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $(D-E)^T = D^T - E^T$

e) $D^T E^T - (ED)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $(AB)C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\underbrace{3\times 2 \quad 2\times 2}_{3\times 2} \quad 2\times 3}_{3\times 3}$

g) $A(BC)$ ... viz f)

m) $\underbrace{\underset{3\times 2}{C^T} \underset{2\times 3}{A^T}}_{3\times 3} + \underset{3\times 3}{2E^T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2E^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 12 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 15 & 3 & 12 \\ 14 & 0 & 7 \\ 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

- ukažte, že má-li A nulový řádek a B je matice taková, že AB je definován, pak AB má nulový řádek. Ukažte také, že má-li B nulový ~~řádek~~ sloupec -//- pak AB má nulový sloupec

- najděte matici A typu 2×2 takovou, že zobrazení $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, je stejnolehlost se středem v $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a koeficientem 3.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×1

$ax + by = 3x$

$cx + dy = 3y$

$a = 3$

$b = 0$

$c = 0$

$d = 3$

- Kolik existuje matic A typu 3×3 takových, že platí $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ax + by + cz = x + y$

$dx + ey + fz = x - y$

$gx + hy + iz = 0$

$g = h = i = 0$

$x(a-1) + y(b-1) + cz = 0$

$x(d-1) + y(e+1) + fz = 0$

$a = b = d = 1 \qquad e = -1$

$c = f = 0$

- stejné zadání: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$ax + by + cz = xy$ $\quad$ pro $x = z = 0 \Rightarrow b = 0$

$dx + ey + fz = 0$ $\quad$ analogicky $a = c = 0$

$gx + hy + iz = 0$

$d = e = f = g = h = i = 0$ $\quad$ Tedy hledaná matice neexistuje

- $BB = A$, B je odmocnina matice A

a) Najděte odmocninu $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{aligned} b(a+d) &= 2 \\ c(a+d) &= 2 \end{aligned}\right\} b = c$

$\left.\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 2 \\ b^2 + d^2 &= 2 \end{aligned}\right\} a^2 = d^2 \qquad a = d$

$2ac = 2$

$ac = 1$

$\frac{1}{c^2} + c^2 = 2 \qquad \cancel{c = \pm 1} \quad \cancel{a = d = \pm 1} \qquad c = \pm 1 \quad a = b = c = d = \pm 1$

$$B \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

1

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{cases} a+d=0 \quad a=-d \ \dots \text{nelze} \\ b=c=0 \end{cases}$$

$a^2 = 5 \qquad a \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

$d^2 = 9 \qquad d \in \{-3, 3\} \qquad$ 4 řešení

- např. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nemá odmocninu
- Ukažte, že násobení sloupcového vektoru v $\mathbb{R}^2$ maticí $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje otočení v rovině o úhel α. Spočtěte obecné A^n

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \sqrt{x^2+y^2} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

- Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dokažte $A^n = \begin{pmatrix} a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{2n} & a_{2n+1} \end{pmatrix}$, kde a_n je Fibonacciho posloupnost $a_1 = a_2 = 1$ indukce

$\boxed{3. \text{PŘ}}$

- lineární podprostor $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, $a \in K$, $x, y \in S$ platí $ax \in S$, $x+y \in S$ (uzavřenost)
- kouknout na slidy
- lineární obal $[X]$ — lin. podprostor generovaný množinou X — množina všech lin. komb. z podmnožiny $X \subseteq V$

z lenosti $[x_1, \dots, x_n] = [\{x_1, \dots, x_n\}]$

- pokud $[X] = V$, mluvíme o generující / vytvořující množině
- $X+Y = \{x+y \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ součet množin

  např. $[\{(1,0)\}] + [\{(0,1)\}] = \mathbb{R}^2$

- S, T lin. podprostory $\Longrightarrow$ $S \cap T$, $S+T$ jsou lin. podprostory a pokud $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$, pak $S \cup T$ je lin. podprostor

  navíc $S+T = [S \cup T]$

- přímý (direktní součet) $S \oplus T$ pokud $S \cap T = \{0\}$

$\boxed{3.\ \text{CV}}$

* Řešte soustavu rovnic v $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ užitím Gaussovy eliminace

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_4 = 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right)$$

$\mathbb{R}: (0, 2, 1, -\frac{7}{3})$

$\mathbb{Z}_5: (0, 2, 1, 1)$

* -||- v $\mathbb{R}$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} /3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 0$

$x_2 = s$

$x_5 = t$

$x_3 + x_5 = 0$

$x_3 = -t$

$x_1 + s + 2t - t = 0$

$x_1 = -s - t$

* v $\mathbb{R}$

$$x_1+x_2+x_3=a$$
$$2x_1+2x_3=b$$
$$3x_2+3x_3=c$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-2a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{c}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2}-a+\frac{c}{3} \end{array}\right)$$

$$x_3=\frac{b}{2}-a+\frac{c}{3}$$
$$x_2=\frac{c}{3}-x_3=a-\frac{b}{2}$$
$$x_1=a-x_2-x_3=a-\frac{c}{3}$$

* v $\mathbb{R}$

$$2x_1-x_2+3x_3+4x_4=9$$
$$x_1-2x_3+7x_4=11$$
$$3x_1-3x_2+x_3+5x_4=8$$
$$2x_1+x_2+4x_3+4x_4=10$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & -3 & 7 & -16 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 31 & -46 & -61 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x_4=2$$
$$x_3=-11+12=1$$
$$x_2=-12+20-8=0$$
$$x_1=11-14+2=-1$$

* Zjistěte pro které hodnoty parametrů a, b má soustava reálných rovnic

i) právě 1 řešení

ii) více než 1 řešení

iii) žádné řešení

a)
$$ax+y-2z=1$$
$$x-y+z=0$$
$$(1+a)y-z=b$$

b)
$$x-ay-2z=b$$
$$x+(1-a)y=b-3$$
$$x+(1-a)y+az=2b-1$$

ad a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1+a & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & -2-a & 1 \\ 0 & 1+a & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & -2-a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{array}\right)$

I) $a \neq -1$

1 řešení

II) $a = -1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{array}\right)$

a) $b = 1$ nekonečně mnoho řešení

b) $b \neq 1$ žádné řešení

ad b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 1 & 1-a & 0 & b-3 \\ 1 & 1-a & a & 2b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & \cancel{b}-3 \\ 0 & 0 & a & b+2 \end{array}\right)$

I) $a \neq 0$

1 řešení

II) $a = 0$

a) $b = -2$ nekonečně mnoho

b) $b \neq -2$ žádné řešení

- hodnost ~ počet nenulových řádku po úpravě na schodovitý tvar

$h(A|b) = h(A) \Rightarrow$ řešení

$h(A|b) > h(A) \Rightarrow$ nemá řešení

* v $\mathbb{Z}_5$

$2x + 3y = 1$

$3x + 4y + az = 2$

$3x + 4az = b$

$2+3=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & a & 2 \\ 3 & 0 & 4a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a & 3 \\ 0 & 3 & 4a & b+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & b+4 \end{array}\right)$

I) $b = 1$ ~~nekonečně má konečně 5 mnoho řešení~~ má 5 řešení

II) $b \neq 1$ nemá řešení

* v $\mathbb{C}$

a) $x + 2iy = 5+4i$

$(3-i)y + (6-2i)z = 10$

$2x - z = 5+3i$

$x + y + z = 5+2i$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & 5+4i \\ 0 & 3-i & 6-2i & 10 \\ 2 & 0 & -1 & 5+3i \\ 1 & 1 & 1 & 5+2i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2i & 0 & 5+4i \\ 0 & 3-i & 6-2i & 10 \\ 0 & -4i & -1 & -5-5i \\ 0 & -2i+1 & 1 & -2i \end{array}\right) \cdot \frac{i}{4} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 0 & 5+4i \\ 0 & 1 & -\frac{i}{4} & -\frac{5i}{4} + \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{25-5i}{4} & 5i + \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6+i}{4} & \frac{7i+5}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 0 & 5+4i \\ 0 & 1 & -i & -5i+5 \\ 0 & 0 & 5-i & 4i+6 \\ 0 & 0 & 6+i & 7i+5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 0 & 5+4i \\ 0 & 1 & -i & -5i+5 \\ 0 & 0 & 6+i & 7i+5 \\ 0 & 0 & 1 & i+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2i & 0 & 5+4i \\ 0 & 4 & -i & -5i+5 \\ 0 & 0 & 1 & i+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z = i+1$

$y = -i+1$

$x = 3+2i$

4. PŘ.

- $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ je lineárně závislá, pokud existují skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n$ takové, že všechny nejs nulové a $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$

n jde to i pro nekonečné posloupnosti – každá konečná podposloupnost je lineárně nezávislá.
nezávislost

jde to i pro množiny

4. CV.

* Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé následující vektory v $\mathbb{R}^n$. Určete jejich lineární obal

a) $u_1 = (1,0,2)$

$u_2 = (2,0,1)$

$u_3 = (1,2,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2, u_3 jsou lin. nezávislé
lineární obal je $\mathbb{R}^3$

$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0$

c_1

$u_1 = (1,0,-2,3)$

$u_2 = (-1,3,0,0)$

$u_3 = (2,0,1,1)$

$u_4 = (1,6,-1,4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lin. obal je $\{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$

u_1, u_2, u_3, u_4 jsou lineárně závislé

* Zjistěte zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé polynomy v $\mathbb{R}_2[x]$.

$2-x+4x^2$
$3+6x+2x^2$
$2+10x-4x^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ lin. nezávislé

* Zjistěte, zda vektor $x = (7,2,-2)$ leží v lin. obalu množiny vektorů

$\{(1,0,-1), (2,1,0), (0,1,2), (1,1,1), (5,2,1)\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

* Nechť u, v, w jsou lin. ~~závislé~~ nezávislé vektory z V. Zjistěte zda jsou lin. závislé vektory

a) $u+v,\ u-v,\ u+v+w$

$a(u+v) + b(u-v) + c(u+v+w) = 0$

$(a+b+c)u + (a-b+c)v + cw = 0$

$c = 0$

$a+b = 0$

$a-b = 0$

$a = 0,\ b = 0$

tedy jsou lin. nezávislé

b) $u+v+w,\ v+w+z,\ w+z+u,\ z+u+v$

$\sum_{a,c,e} a(u+v+w) = \sum_{c,d,e} u(a+c+d) = 0$

$a+c+d = a+b+d = a+b+c = b+c+d = 0$

$a = b = c = d$ lin. nezávislé

* Je dána množina $M=\{1+2x-x^2, 2-x+x^2, 5+x^2\}$ polynomů v $R_2[x]$. Zjistěte, zda polynom patří do lin. obalu množiny M

$-6-2x$

$1+x+x^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) *$$

$-6-2x$ leží

$1+x+x^2$ neleží

* Z následujících vektorů vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vekt

$v_1=(1,0,2,4)$ $v_4=(1,1,1,1)$

$v_2=(2,3,-1,0)$ $v_5=(2,2,0,3)$

$v_3=(3,3,1,4)$ $v_6=(1,0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$$

* Určete, které z následujících množin tvoří vektorové ~~prost~~ podprostory $\mathbb{R}^3$

a) $M=\{(a,1,1)\in\mathbb{R}^3 \mid a\in\mathbb{R}\}$ není

b) $M=\{(a,a+c,c)\in\mathbb{R}^3 \mid a,c\in\mathbb{R}\}$ je součet, násobení uzavřeno, neutrální

je

c) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \quad \middle| \; a+b+c+d=0\right\}$ je

$\boxed{\text{5. PŘ}}$

- báze vektorového prostoru, souřadnice, dimenze
- Steinitzova věta
- konečný/nekonečný ~~gen~~ vek. prostor
- báze – LN posloupnost, která generuje celý prostor V
- dimenze – počet prvků libovolné báze vek. prostoru

$\dim V = n$, n-rozměrný prostor

$\dim_K V$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$ $\quad$ $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ $\quad$ $\boxed{\dim K^{m\times n} = m\cdot n}$ $\quad$ $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$

– kanonická báze

– $S, T \subseteq V$ lin. podprostory:

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

– $V \times W$ konečně rozměrné vek. prostory

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$$

$\boxed{\text{5. CV.}}$

* $M = \{(1,-2,0,0),(2,1,1,3),(0,1,0,1)\}$ doplňte na bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

všechny 4 lze doplnit, tedy např.

báze $= ((1,-2,0,0),(2,1,1,3),(0,1,0,1)\cancel{\}}, (1,0,0,0)$

* $\alpha = ((1,3,0,-1),(1,0,0,-1),(0,2,1,0))$ $\quad$ $w_1 = (-1,1,-1,1)$, $w_2 = (3,-1,0,-3)$, $w_3 = (2,1,0,-2)$, $w_4 = (1,-2,0,-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & & & \vdots \\ 0 & -3 & 2 & 4 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ nelze doplnit

* najděte nějakou bázi vektorového prostoru $M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & -1 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$M \neq \mathbb{R}^n$

$\dim M < \dim \mathbb{R}^n = n$

* určete dimenzi podprostoru P vek. prostoru $\mathbb{R}_n[x]$

a) $P = \{f \in \mathbb{R}_n[x],\ f(0)=0\}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = f(x) \qquad f(0) = a_0 = 0$$

$$\underbrace{x, x^2, x^3, \dots, x^n}_{n \text{ vektorů}} \qquad \dim P = n$$

b) $P = \{f \in \mathbb{R}_n[x],\ f(0)=f(1)=0\}$

$$a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \qquad \dim P = n-1$$

$$\left.\begin{matrix} x - x^n \\ x^2 - x^n \\ \vdots \\ x^{n-1} - x^n \end{matrix}\right\} \text{báze}$$

*

$P_1 = \{f \in \mathbb{R}_5[x],\ f(x) = f(-x)\}$

$P_2 = \{f \in \mathbb{R}_5[x],\ f(x) = -f(-x)\}$

$P_3 = \{f \in \mathbb{R}_5[x],\ f(1) = f(2) = 0\}$

a) najděte báze P_1, P_2, P_3

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i = \sum_{i=0}^{5} a_i (-x)^i$$

$$f_1(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 \qquad \text{báze} = (1, x^2, x^4)$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i x_i = -\sum_{i=0}^{5} a_i (-x_i)^i$$

$$f_2(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 \qquad \text{báze} = (x, x^3, x^5)$$

$f_3(1) = a_0 + \dots + a_5 = 0$

$f_3(2) = a_0 + 2a_1 + \dots + 32 a_5 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 \end{pmatrix}$$

$a_0 = -2$

$a_1 = 3 \qquad a_3 = a_4 = a_5 = 0$

$a_2 = -1$

$$\underbrace{-2+3x-x^2,\ -6+7x-x^3,\ -\cancel{14}+15x-x^4,\ -30+31x-x^5}_{\text{báze}}$$

b) $f(x) \in P_1 \cap P_2 \iff f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$

tedy $a_1 = a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

c) $P_2 + P_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -14 & -30 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 15 & 31 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15 & 31 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim(P_2+P_3)=6$$

$P_2 + P_3 = \mathbb{R}_5[x]$

* Uvažujme vek. prostor $Mat_2(\mathbb{R})$ reálných matic typu 2×2 a jeho podmnožinu P všech matic $A = (a_{ij})$ takových, že $a_{11} + a_{22} = 0$.

a) dokažte, že ~~je jedná o vekt.~~ P je vekt. prostor $\quad$ At $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$ + uzavřenost

b) najděte bázi P

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

* Nechť $P_1 = [M_1]$, $P_2 = [M_2]$ ve vek. prostoru $\mathbb{R}^3$, resp. $\mathbb{R}^4$, najděte nějakou bázi a určete dimenzi podprostorů $P_1 + P_2$, $P_1 \cap P_2$.

a) $M_1 = \{(1,2,-1), (-1,0,2), (2,-1,0), (1,1,1)\}$

$M_2 = \{(0,2,1), (1,4,0)\}$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

$\dim(P_1 + P_2) = 3$

báze $((1,4,0), (0,2,1), (-2,1,0))$

~~$\dim(P_1 \cap P_2)$~~ $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$x = d_1 v_1 + \dots + d_4 v_4$

$d_1 = 0$

$d_2 = d_4 = 0 \ \dots$

$\boxed{6.\text{PŘ.}}$

- U, V vek. prostory nad tělesem K
- $\varphi: V \to U$ lin. zobrazení

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$c \cdot \varphi(x) = \varphi(c \cdot x)$$

$$f: X \to Y$$
$$f^{\to}: P(X) \to P(Y)$$
$$S \mapsto \{ y \in Y \mid y = f(s), s \in S \} = f^{\to}(S)$$ forward powerset operator
$$f^{\leftarrow}: P(Y) \to P(X)$$
$$T \mapsto \{ s \in X \mid f(s) \in T \} = f^{-1}(T)$$ backward powerset operator

- jádro ~~zobraz.~~: $\operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(0) = \{ x \in V \mid \varphi(x) = 0 \}$
- obraz $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(V) = \{ \varphi(x) \mid x \in V \}$

$\dim V$ konečná $\Rightarrow$ $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$

$\dim \operatorname{Im} \varphi = H(\varphi)$ ... hodnost lin. zobrazení

lineární izomorfismus ... bijekce

$V \cong U$ izomorfní

$\boxed{6.\text{CV}}$

* Ve vek. prostoru $\mathbb{R}^4$ najděte průnik podprostorů V_1 a V_2, kde

$V_1 = [(1,1,1,1),(1,0,1,0)]$, $V_2 = [(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0)]$

Spočtěte průnik součtu $V_1 + V_2$ s podprostorem generovaným vektorem $v = (1,-2,3,-4)$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} & \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -4 \\ 7 \\ -2 \\ -4 \end{matrix} \end{array}$$

$e = 1$ $\quad d = -2,\ c = -1,\ b = 1,\ a = -2$

$$x = \overset{a}{-2} \cdot (1,1,1,1) + \overset{b}{1}(1,0,1,0) = (-1,-2,-1,-2)$$
$$V_1 \cap V_2 = [(1,2,1,2)]$$

tedy $V_1+V_2 = \cancel{[v_1] = [(1,-2,3,-4)]} = \mathbb{R}^4$

$\cancel{V_1+V_2}$ $(V_1+V_2)\cap[v] = [v]$

* V prostoru polynomů $\mathbb{R}_6[x]$ uvažte podprostory $V_1 = [x^2+2x^3, -x^3+x^6]$

$V_2 = [2+x^2, -1+x^6, x^2+x^3+2x^4]$

$V_3 = [x^2+x^6, 1+3x^3+x^5, x^3]$

Spočtěte jejich součet a průnik

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & & & \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

báze $V_1+V_2+V_3 \ldots (x^2+2x^3, -x^3+x^6, 2+x^2, x^2+x^3+2x^4, x^2+x^6, 1+3x^3+x^5)$

$e = 0$ $c = \frac{d}{2}$

$d = 2$ $b = -d$ $-\frac{d}{2}(x^2+2x^3) - d(-x^3+x^6)$

$c = 1$ $a = -\frac{d}{2}$ $-\frac{d}{2}x^2 - dx^6 = -\frac{d}{2}(x^2+2x^6)$

$b = -2$

$a = -1$

$-1(x^2+2x^3) - 2(-x^3+x^6) = -x^2-2x^6$

báze $V_1\cap V_2 \ldots (x^2+2x^6)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tedy $V_1\cap V_2\cap V_3 = \{0\}$

* Nechť V je reálný vek. prostor $v_1, \dots, v_n \in V$.
Označme $S = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \mid c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \}$

dokažte: a) S je lineární podprostor vek. prostoru $\mathbb{R}^n$.

b) Vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé právě, když $\dim S = 0$.

ad a) $(0, \dots, 0) \in S$ $\quad (c_1, \dots, c_n), (d_1, \dots, d_n) \in S$

~~$a(c_1, \dots, c_n) + b(d_1, \dots, d_n) \in S$~~ ~~, to lze lekce do protože~~

~~$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \wedge d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$~~

$(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n) \overset{?}{\in} S$

$$(c_1 + d_1) v_1 + \dots + (c_n + d_n) v_n = \sum c_i v_i + \sum d_i v_i = 0 + 0 = 0$$

$(a c_1, \dots, a c_n) \overset{?}{\in} S$

$$(a c_1) v_1 + \dots + (a c_n) v_n = a(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = a \cdot 0 = 0$$

ad b) ~~Zřejmé z def.~~ zřejmé z def.

* Nechť V je vek. prostor, $v \in V$ je pevně zvolený vektor. Zjistěte, zda zobrazení $f: V \to V$ je lineární jestliže

a) $f(x) = x + v$

$0 = f(0) = 0 + v = v$

Pro volbu $v = 0$ je lin., jinak není

b) $f(x) = v$

$0 = f(0) = v$

je lin. pro $v = 0$, jinak ne.

* Zjistěte, zda zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární. Pokud ano, najděte Ker f, Im f a zapište jej pomocí násobení matic. Zjistěte, zda je f izomorfismus.

a) $f(x, y) = (x, y^2)$

$\cancel{f(1,1) + f(1,1)}\ f((1,1) + (1,1)) = f(2,2) = (2,4)$

$f(1,1) + f(1,1) = (1,1) + (1,1) = (2,2)$ spor, není to lineární

b) $f(x, y) = (2x + 3y, x - y)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ker\, f = \{(0,0)\}$$
$$Im\, f = \mathbb{R}^2$$

* Zjistěte zda je zobrazení $A: \mathbb{R}_m[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ lineární. Pokud ano, určete $Ker\, f$, $Im\, f$

a) $m = n = 2$ $\quad (Af)(x) = x f'(x)$

$$f(x) = a + bx + cx^2$$
$$f'(x) = b + 2cx$$
$$x f'(x) = bx + 2cx^2 \quad \text{ověření lin.}$$

$$Ker\, A = \{a + bx + cx^2 \mid b = c = 0, a \in \mathbb{R}\} = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$Im\, A = [x, x^2]$$

$\boxed{7.\,PŘ.}$

$\boxed{7.\,CV}$

* Nechť $B = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (-1,4)$, je báze $\mathbb{R}^2$ a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v bázi B.

a) ~~Rozepište~~ Platí $((f(v_1))_B, (f(v_2))_B) = A$

b) Najděte $f(v_1)$ a $f(v_2)$

$$f(v_1) = 1 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 = (3, -5)$$

$$f(v_2) = 3v_1 + 5v_2 = (-2, 29)$$

c) určete předpis pro $f(x_1, x_2)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 29 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{18}{7} & -\frac{107}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{24}{7} \end{array}\right)$$

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 f(1,0) + x_2 (0,1)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(18x_1 + x_2, -107x_1 + 24x_2)$$

* Najděte dimenzi a bázi obrazu průniku podprostorů V_1 a $V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ přiřazení $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$

Přitom $f(x,y,z,w) = (x+2y+3z+w, 2x-3y-z-12, -x+y+5w, -y-z-2w, 2x-3y-\cancel{\ }z-12w)$

$$V_1 = [(2,-1,-1,1),(-2,3,1,-1)]$$

$$V_2 = [(0,2,0,0),(1,1,1,1)]$$

Dále zjistěme dimenzi vzoru podprostoru $W \subset \mathbb{R}^5$ generovaného vektorem

$$V_1 \cap V_2 = [(0,1,0,0)]$$

$$f(0,1,0,0) = (2,-3,1,-1,-3)$$

$$f(V_1 \cap V_2) = [(2,-3,1,-1,-3)]$$

$$\{(x,y,z,w) \mid f(x,y,z,w) = k(1,1,1,1), k \in \mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z+w = 1 \\ 2x-3y-z-12 = 1 \\ -x+y+5w = 1 \\ -y-z-2w = 1 \\ 2x-3y-z-12w = 1 \end{array}\right\} \text{neexistuje řešení}$$

$\boxed{8. \text{PŘ.}}$

chyběl jsem

$\boxed{8. \text{CV.}}$

chyběl jsem

$\boxed{9. \text{PŘ.}}$

$\boxed{9. \text{CV.}}$

* zjistěte, které z bodů $A=(1,2,1)$, $B=(2,1,-3)$, $C=(1,4,2)$, $D=(-4,2,0)$ leží v rovině

a) $(x,y,z) = (6,2,-2) + s(5,0,4) + s(1,1,0)$

$$(x,y,z) - (6,2,-2) = s(5,0,1) + s(1,1,0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & -5 & -4 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cancel{\ } \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & \cancel{5} & -5 & -3 & -7 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

* α, β báze v $\mathbb{R}^3$. Najdětete matici přechodu od α k β.

a) $\alpha = ((-3,0,3),(-3,2,-1),(1,6,-1))$

$\beta = ((-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7))$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -2 & -2 & -3 & -3 & 1 \\ -6 & -6 & -3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -2 & -2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

- pomocí této matice určete souřadnice vektoru $(w)_\alpha = (-5, 8, -5)$ v bázi β.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -1 & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/12 \\ 3/4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

* najděte parametrické vyjádření podprostoru v $\mathbb{R}^4$ zadaného obecnými rovnicemi

a) $x_1 - x_2 - x_4 = 6$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11$

$x_1 + x_2 - x_4 = 8$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$x_3 = 1$: $x_2 = -1$, $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ $\quad (1, -1, 1, 0)$

$x_3 = 0$: $x_4 = 2$, $x_2 = 3$, $x_1 = 7$ $\quad (7, 3, 0, 2)$

$(7, 3, 0, 2) + t(1, -1, 1, 0)$

* určete vzájemnou polohu přímek v prostoru $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$, v případě, že jsou různoběžné, najděte jejich průsečík

a) $p: 3x + 4y - 20 = 0$ $\quad q: x = 4 - 8t,\ y = 2 + 6t$

$3(4 - 8t) + 4(2 + 6t) - 20 = 0$

$0 = 0$

$p = q \quad p \parallel q$

c) $p: x = 3 - 6t,\ y = -1 + 4t,\ z = t$

$q: x = -2 + 3t,\ y = 4,\ z = 3 - t$

$p: (3, -1, 0) + s(-6, 4, 1)$

$q: (-2, 4, 3) + t(3, 0, -1)$

~~ro~~ nejsou rovnoběžné

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & -5 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ nemá řešení

$\boxed{8. \text{CV.}}$

* Matice lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\alpha = (\overset{v_1}{(1,0,1)}, \overset{v_2}{(0,1,1)}, \overset{v_3}{(1,1,0)})$ je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte předpis zobrazení f a zjistěte, zda f je izomorfismus

$$f(v_1) = -v_1 - v_3 = (-2,-1,-1)$$
$$f(v_2) = -v_2 + v_3 = (1,0,-1)$$
$$f(v_3) = -v_1 + v_2 = (-1,1,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ je izomorfismus

* Určete matici endomorfismu $A: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $A(f) = 3f'' + 4f' + f$ v bázi

a) $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

b) $\beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$

zjistěte, zda A je izomorfismus

ad a)
$$A(1) = 1$$
$$A(x) = x+4$$
$$A(x^2) = x^2+8x+6$$
$$A(x^3) = x^3+12x^2+18x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ je

ad b)
$$A(x+1) = 5+x$$
$$A(1-x) = -3-x$$
$$A(x^2+x^3) = 6+26x+13x^2+x^3$$
$$A(x^2-x^3) = -x^3+11x-10x+6$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 26 & -10 \\ 0 & 0 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 26 & -10 \\ 0 & 2 & -124 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ je

* Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ má v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ souřadnice $(x)_\alpha = (1,-3,2)^T$. Určete jeho souřadnice v bázi $\beta = (v_1, v_2, v_3)$, jestliže víte, že:

a) $u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3$, $u_2 = v_2 - v_3$, $u_3 = v_1 - v_3$

b) $v_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $v_2 = u_2 + u_3$, $v_3 = u_3$

$\cancel{(AB)^T = B^T A^T}$

ad a) $x = 1u_1 - 3u_2 + 2u_3 = 5v_1 - v_2 - 5v_3$

$(x)_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

ad b) doma

* Uvažujme zobrazení $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax^2+bx+c) = (a-b)x^2 + (a-c)x + b - c$

a) dokažte, že f je lineární

b) najděte všechny polynomy, které leží v jádře

c) napište na bázi zobrazení f ve standardní bázi $\varepsilon = (1, x, x^2)$

ad a) $f(k(ax^2+bx+c) + l(dx^2+ex+f)) = f((ka+ld)x^2 + (kb+le)x + kc+lf) =$

$= (ka+ld-kb-le)x^2 + (ka+ld-kc-lf)x + kb+le-kc+lf) =$

$= k((a-b)x^2 + (a-c)x + b-c) + l((d-e)x^2 + (d-f)x + e-f) =$

$= k f(ax^2+bx+c) + l(dx^2+ex+f)$

ad b) $a=b$
$a=c$
$b=c$ $\qquad cx^2+cx+c=0$

ad c) $f(1) = -x-1$
$f(x) = -x^2+1$
$f(x^2) = x^2+x$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots$$

10)
*

a) $\dots \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

14) * Matice lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ v bázích $\alpha = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$,

$\beta = ((-1,2),(1,1))$ je $(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

určete obrazy vektorů $x=(1,-2,3)$, $y=(-1,0,4)$ v endomorfismu f.

$f(1,0,1) = (-1,2) + 4(1,1) =$

$f(1,0,0) = 2\cdot(-1,2) + 5(1,1) =$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -12 & -29 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{10.cv.}}$

* napište parametrické rovnice roviny, jestliže známe

a) tři body $A=(-1,1,0)$, $B=(2,1,6)$, $C=(3,0,4)$

b) dva body $A=(1,2,-3)$, $B=(0,2,1)$ a směrový vektor $u=(2,1,-1)$

ad a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = -1 + 3s + 4t$

$y = 1 + 0s - t$

$z = 0 + 6s + 4t$

ad b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x = 1 - s + 2t$

$y = 2 + 0s + t$

$z = -3 + 4s - t$

* napište obecné vyjádření ~~pr~~ rovin z předchozí úlohy

ad a) $y = 1 - t$

$t = 1 - y$

$z = 6s - 4(y-1)$

$s = \dfrac{z + 4(y-1)}{6}$

$x = -1 + \dfrac{z}{2} - 2(y-1)$

$2x + 4y - z - 2 = 0$

ad b)

$y = 2 + t$

$t = y - 2$

$z = \cancel{-3} -3 + 4s - (y-2)$, tedy $s = \dfrac{z+y+1}{4}$

$4x - 7y + z + 13 = 0$

* Najděte obecnou rovnici roviny určené body $A=(1,-1,1)$, $B=(2,1,-3)$, $C=(1,4,2)$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b=1$
$c=-5$
$d=28$
$a=-22$ $\qquad -22x+y-5z+28=0$

* najděte parametrické vyjádření přímky p v $\mathbb{R}^3$

$$p: \left.\begin{aligned} 2x-y+z-9&=0 \\ x+y-z&=0 \end{aligned}\right\} \text{ sečteme a } x=3$$

$y=1 \Rightarrow z=4$
$y=0 \Rightarrow z=3$

$\vec{u}=(0,1,1)=(3-3,1-0,4-3)$

$x=3$
$y=1+s$
$z=4+s$

$p: A+s\cdot\vec{u}=[3,1,4]+s(0,1,1)$

* zjistěte, které z bodů $A=(1,2,-1)$, $B=(1,2,2)$, $C=(3,1,2)$, $D=(-4,2,0)$ leží v rovině

$$x=1+2t,\ y=3-2t+s,\ z=4-2t+2s$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

leží tam B, C, neleží tam A, D

* Najděte parametrické vyjádření podprostoru p: $x_1+x_2-2x_4=6$
$x_1+2x_2+x_3-x_4=11$
$x_1+x_2-x_4=8$ v $\mathbb{R}^4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$x_4=2$
$x_3=s$
$x_2=3-s$
$x_1=7+s$

* Určete vzájemnou polohu přímek v $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík

a) $p: 3x+4y-20=0$
$q: x=4-8t,\ y=-1+2t$

b) $p: x=2+t,\ y=-9t$
$q: x=1+t,\ y=-1+2t$

c) $p: x+z-1=0$
$3x+y-3=0$
$q: x-2y+3=0$
$y+2z-8=0$

ad a) $3(4-8t)+4(2+6t)-20=0$

$0=0$

$\rho=p$

ad b) $p: (2,-9)+s(1,-1)$

$q: (1,-1)+t(1,2)$

různoběžné

$2+s=1+t$

$-9-s=1+2t$

$-7=3t$

$t=-\frac{7}{3}$

$s=t-1=-\frac{10}{3}$

$x=2-\frac{10}{3}=-\frac{4}{3}$

$y=-9+\frac{10}{3}=-\frac{17}{3}$

ad c)

$p: x=0 \Rightarrow z=1, y=-12$

$x=1 \Rightarrow z=0, y=-16$

$\vec{u}=(1,-1,-4$

$q: y=0 \Rightarrow x=-3, z=4$

$y=1 \Rightarrow x=-1, z=\frac{7}{2}$

$\vec{v}=(2,1,-\frac{1}{2})$

~~různoběžné~~ nejsou rovnoběžné

$p: x=0+t$

$y=-12-t$

$z=1-4t$

$t-2(-12-t)+3=0$

$-12-t+2-8t-8=0$

$t+24+2t+3=0$

$-18-9t=0$

$t=-9$

$t=-2$

jsou mimoběžné

* Určete vzájemnou polohu přímky a roviny v $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^4$

a) $p: x=2+4t$ $\quad \sigma: 4x+y-z+13=0$

$y=-1+t$

$z=2-t$

b) $2x-y+3z+4=0$ $\quad \sigma: 4x-5y-z+8=0$

$x-2y-2z+2=0$

c) r: $x_1+x_2=0$
$x_2+x_3=0$
$x_3+x_4=0$

ρ: $(0,3,0,1)+s(1,0,-1,0)+t(1,2,-2,0)$

d) p: $(4,-2,3,-1)+t(1,-1,1,-1)$

ρ: $x_1+x_3+x_4=4$
$x_1+x_2+x_3=3$

ad a) $4(2+4t)+(-1+t)-(2-t)+13=0$

$t=-1$

$x=2-4=-2$
$y=-1-1=-2$
$z=2+1=3$ $\quad P[-2,-2,3]$

ad b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & -5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy $r \subseteq \rho$

ad c)

$s+t-3+2s=0$ $\qquad s+3t+3=0$
$3+2s-s-2t=0$ $\qquad -s+3=0$
$-s-2s+1$ $\qquad -s-2s+1=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\cancel{t_4=1}$
$\cancel{t_3=-1}$
$\cancel{t_2=-1}$
$\cancel{t_1=-1}$

$$\cancel{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \end{array}\right)}$$

$\Rightarrow$ ~~rovnoběžné~~ mimoběžné

ad d)

$4+t+3+t-1-t=4 \Rightarrow t=-2$
$4t-2-t+3+t=3 \quad t=-2$
$(4,-2,3,-1)-2(1,-1,1,-1)=(2,0,1,1)$

* V $\mathbb{R}^4$ určete parametry a,b tak, aby přímka $(1,2,1,2)+r(1,a,0,2)$ ležela v rovině $(1,1,2,b)$
$(1,1,2,b)+s(1,2,1,2)+t(1,1,2,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a=3$$

...

$\boxed{11. \text{CV.}}$

* V $\mathbb{R}^3$ najděte příčku mimoběžek procházející bodem M

$p: [1,3,4] + t(1,0,2)$

$q: 2x - z + 2 = 0$

$y - 3 = 0$

$\vec{s_p} = (1,0,2)$

$p = (1,3,4)$

$\vec{PM} = (12,14,25)$

$$\rho: \begin{aligned} x &= 1 + t + 12s \\ y &= 3 + 14s \\ z &= 4 + 2t + 25s \end{aligned} \quad \Bigg| \begin{aligned} &= 3 \\ s &= 0 \end{aligned} \quad 0 = 0 \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 3 \\ z &= 4+2t \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2+2t-4-2t &= 0 \\ L &= P \end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení

* $p: \overset{P}{[1,-1,2]} + t(1,-1,3)$

$q: \overset{Q}{[3,-1,1]} + s(2,1,4)$

$M = [3,-2,13]$

$P = (1,-1,2)$

$\vec{s_p} = (1,-1,3)$

$\vec{MQ} = (0,1,-12)$

$[1,-1,2] + t(1,-1,3) = [3,-1,1] + s(2,1,4) + u(0,1,-12)$

$t(1,-1,3) - s(2,1,4) - u(0,1,-12) = [2,0,-1]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 12 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 17 & -\frac{17}{2} \end{array}\right)$$

$17u = -\frac{17}{2}$

$u = -\frac{1}{2}$ $\qquad s = -\frac{1}{6}$

$[3,-1,1] + (-1,-\frac{1}{2},-2) + (0,-\frac{1}{2},6) = [2,-2,5] = A$

$\vec{AM} = [3,-2,13] - [2,-2,5] = (1,0,8)$

$[2,-2,5] + a(1,0,8) = [3,-1,1] + b(2,1,4)$

$a(1,0,8) = [1,1,-4] + b(2,1,4)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 8 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$b = -1$

$[3,-1,1] - 1(2,1,4) = [1,-2,-3] = B$

příčka $= \{ A + a(1,0,8) \mid a \in [-1,0] \}$

* v $\mathbb{R}^3$ určete přímku q, která prochází bodem $M = [3,2,1]$, protíná přímku $p: x_1 - x_2 = 1, x_1 + x_3 = 6$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho: 2x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_3 = c$

$c = 9$

dodělat doma

$\boxed{10.\ \text{PŘ.}}$

- determinanty

$\det A^T = \det A$ ústní

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ Cauchyova věta (na test + ústní)

a další

$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$\boxed{12.\ \text{CV.}}$

* Najděte počet inverzí

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1 ... 1 inverze
2 ... 0 inverzí
3 ... 4 inverze
4 ... 5 inverzí
5 ... 4 inverze
6 ... 3 inverze
7 ... 2 inverze
8 ... 0 inverze
9 ... 0 inverzí

19 inverzí

tedy σ je lichá

znaménko cyklu je délka mínus 1.

určit znaménko lze i takto

$(12)(3758)(49)(6)$

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots & 2n & \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

* Určete počet inverzí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 1 & \dots & 3n-2 & 2 & \dots & 3n-1 \end{pmatrix}$$

1 … 2 inv
2 … 4 inv
3 … 6 inv
⋮
n … $2n$ inv
$n+1$ … 0 inv
$n+2$ … 1 inv
⋮
$2n$ … $n-1$ inv

$$\sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n+1) + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(2n+2+n-1)}{2} = \frac{n(3n+\dots)}{2}$$

* Užitím definice determinantu vypočtěte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$\sigma(3)=2$

$$\begin{array}{c|cccc|l} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \sigma_1 & 1 & 3 & 2 & 4 & a_{11}\cdot 0 \ \times \\ \sigma_2 & 1 & 4 & 2 & 3 & a_{11}\cdot 0 \ \times \\ \sigma_3 & 3 & 1 & 2 & 4 & a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}\cdot 0 \ \times \\ \sigma_4 & 3 & 4 & 2 & 1 & a_{31}\cdot 0 \ \times \\ \sigma_5 & 4 & 3 & 2 & 1 & a_{41}\cdot 0 \ \times \\ \sigma_6 & 4 & 1 & 2 & 3 & a_{41}\cdot a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{34} \ \checkmark \end{array}$$

$(4)(13)(2)$ $\qquad$ (1432)

$1\cdot(-1)\cdot 1 = -1$ $\qquad$ -1

$$|A| = -a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$$

* Vypočtěte

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 90 \quad \text{Sarrus}$$

* Vypočtěte

(měnit znaménko při prohození řádků)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & -13 \\ 0 & 0 & 18 & -3 \end{vmatrix} = 13\cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 13\cdot 6\cdot 2 = 156$$

správně to je -195

* ~~Nd~~ Vypočtěte

úpravy sloupců

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & & 0 & 0 & -1 \\ a_0+a_n x & x^n & \dots & & x^3 & x^2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & -1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & -1 \\ \sum_{i=0}^{n} a_i x_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \sum_{i=0}^{n} a_i x_i = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 30$$

dopočítat doma

* Dokažte pro $n \geq 2$ Vandermondův determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = V(x_1, \dots, x_n)$$

indukcí

1) $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

2)

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & \dots & x_1^{n-2} - x_1^{n-3} x_n & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \dots & x_2^{n-2} - x_2^{n-3} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-3}(x_2 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \dots & & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (

$\boxed{11.\ PŘ}$

~~Důkaz toho, že libovolnou permutaci~~

- Cramerovo pravidlo
- zápis podle matice algebraických doplňků } zkusí důkaz

$\boxed{13.\ cv.}$

*

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

dokažte $\det A^n = 2^{n+1} - 1$

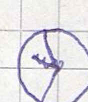
$$\det A_n = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det A_{n-1} + (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \det A_{n-1} - 2 \det A_{n-2}$$

$n=2$: $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 7 = 2^3 - 1$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 15 = 2^4 -$

indukční krok: $\det A_n = 3 \cdot (2^n - 1) - 2 \cdot (2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 1$

*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ z^2 & z \end{matrix}$$



$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = 1 + z^4 + z^2 - z^3 - z^3 - 1 = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2 + z - 2 = -3$$

$$z^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z^3 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$$

$$z^4 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

spočtěte $\tilde{a}_{2,3}$

$$\tilde{a}_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot |A_{2,3}| = 59$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -7 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 7 - 42 = -59$$

* Dokažte bez výpočtu

$$\det\begin{pmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a_1+b_1 & a_1+c_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+c_2 & b_2+c_2 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+b & b & c \\ a_1+b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+b & b & b+c \\ a_1+b_1 & b_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & b_2 & b_2+c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a+b & -2b & b+c \\ a_1+b_1 & -2b_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & -2b_2 & b_2+c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a_1+b_1 & a_1+c_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+c_2 & b_2+c_2 \end{pmatrix}$$

* Určete

$$\det\begin{pmatrix} x_1-y_1 & x_1-y_2 & \cdots & x_1-y_n \\ x_2-y_1 & x_2-y_2 & \cdots & x_2-y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-y_1 & x_n-y_2 & \cdots & x_n-y_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1-y_1 & x_1-y_2 & \cdots & x_1-y_n \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & \cdots & x_2-x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pro } n \geq 3$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1-y_1 & x_1-y_2 \\ x_2-y_1 & x_2-y_2 \end{pmatrix} = (x_1-x_2)(y_1-y_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ & & & & & & & \\ & E & & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \end{pmatrix}$$

* Určete

$$\det \begin{pmatrix} \sin(x_1+y_1) & \sin(x_1+y_2) & \cdots & \sin(x_1+y_n) \\ \sin(x_2+y_1) & \sin(x_2+y_2) & \cdots & \sin(x_2+y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(x_n+y_1) & \sin(x_n+y_2) & \cdots & \sin(x_n+y_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \sin x_1 \cos y_1 + \sin y_1 \cos x_1 & \sin x_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos x_1 & \cdots & \sin x_1 \cos y_n + \sin y_n \cos x_1 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \sin(x_1) & \cos x_1 & & \\ \sin x_2 & \cos x_2 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ \sin x_n & \cos x_n & & \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & \cdots & \cos x_n \\ \sin x_1 & \sin x_2 & \cdots & \sin x_n \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

$= 0$

* Nechť A je matice řádu $2k+1$ tak, že $a_{ij} + a_{ji} = 0$, pak $\det A = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \\ -a_{14} & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = (-1)^n \cdot \det A^T = (-1)^n \cdot \det A = -\det A$$

tedy $\det A = 0$

* Určete příklad podmínky, která je nutná, ale ne dostatečná, aby determinant čtvercové matice A byl nenul

$A \neq 0$

určete dostatečnou, ale ne nutnou

jednoduše $A = E$