

Globální extrémy (na kompaktní množině)

Budeme hledat globální extrémy funkce f na uzavřené a ohraničené (tedy kompaktní) množině M . Funkce f může svého globálního extrému na M nabývat buď v nějaké bodě z M , kde nabývá svého lokálního extrému, nebo v nějakém bodě na hranici této množiny. Hranici množiny M si budeme představovat jako spojení několika grafů funkcí jedné proměnné, ať už $y = y(x)$, či $x = x(y)$, na kterých budeme hledat extrémy dle diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné.

Hledání globálních extrémů na kompaktní množině M se tedy rozpadá do dvou podúloh – nalezení lokálních extrémů ležících v M a extrémů na hranici. Pouhým porovnáním funkčních hodnot těchto extrémů odhalíme, ve kterých bodech je globální maximum či minimum a jakou mají hodnotu.

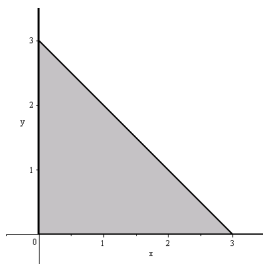
Z posledního kroku vidíme, že nepotřebujeme v průběhu vědět, jaký (a zda vůbec) třeba lokální extrém v daném bodě máme, stačí nám, že daný bod je kandidát na extrém, a určit si v něm funkční hodnotu. Nemusíme se tedy pouštět do druhých derivací.

Celý postup můžeme shrnout následovně:

- 1) *Lokální extrémy* – najdeme stacionární body a body, ve kterých není definována nějaká z parciálních derivací, ale je definována původní funkce, uvážíme z nich ty, které patří do M , a v nich vypočteme funkční hodnoty.
- 2) *Hranice* – hranici množiny M si rozdělíme na několik funkcí jedné proměnné x či y , body, ve kterých se protínají, označme krajní body.
 - U každé z hraničních funkcí z derivací podle x či y najdeme body, ve kterých může mít lokální extrém, uvážíme z nich ty, které patří do hranice M , a vypočteme v nich funkční hodnoty.
 - Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech.
- 3) *Závěr* – Porovnáním funkčních hodnot ve všech možných bodech, kde může být globální extrém, zjistíme, kde má funkce f globální maximum či minimum a jakou mají hodnotu.

Příklad 1. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množině M dané nerovnicemi $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x + y \leq 3$.

Řešení. Množinu M tvoří trojúhelník:



1) Lokální extrémy

Stacionární body:

$$f_x = 2x + 4y - 6 = 0$$

$$f_y = -4y + 4x = 0 \Rightarrow y = x$$

Dosazením $y = x$ do první rovnice: $6x - 6 = 0$, tedy $x = y = 1$.

Máme jeden stacionární bod $A = [1, 1] \in M$, $f(A) = -4$.

2) Hranice

a) $y = 0$:

$$z = x^2 - 6x - 1, z' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3, \text{ kandidát } B = [3, 0] \in M, f(B) = -10$$

b) $x = 0$:

$$z = -2y^2 - 1, z' = 4y = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ kandidát } C = [0, 0] \in M, f(C) = -1$$

c) $y = 3 - x$:

$$z = x^2 - 2(3-x)^2 + 4x(3-x) - 6x - 1 = -5x^2 + 18x - 19, z' = -10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{5}, \text{ kandidát } D = \left[\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right] \in M,$$

$$f(D) = -\frac{14}{5}$$

d) Krajní body:

$$[0, 0] \text{ a } [3, 0] \text{ jsme již uvážili, zbývá } E = [0, 3], f(E) = -19$$

3) Závěr

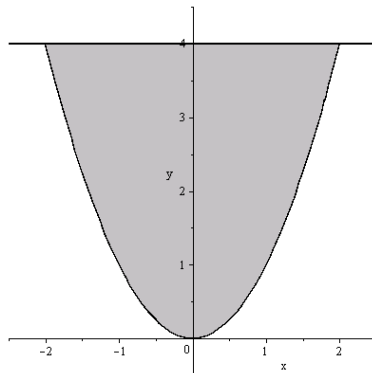
Porovnáním funkčních hodnot ve všech možných bodech, kde může být globální extrém, dostáváme:

Funkce f má na M globální maximum v bodě $[0, 0]$ o hodnotě -1 .

Funkce f má na M globální minimum v bodě $[0, 3]$ o hodnotě -19 . ■

Příklad 2. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 2x^2 + y^2 - 2$ na množině M , která je ohraničena křivkami $y = 4$ a $y = x^2$.

Řešení. Množinu M tvoří část „vnitřku“ paraboly:



1) *Lokální extrémy*

Stacionární body:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 4x = x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3} \\ f_y &= 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Máme dva stacionární body, ale $\left[-\frac{4}{3}, 0\right] \notin M$, takže stačí uvážit $A = [0, 0] \in M$, $f(A) = -2$.

2) *Hranice*

a) $y = 4$:

$$\begin{aligned} z &= x^3 + 2x^2 + 14, z' = 3x^2 + 4x = x(3x + 4) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3}, \text{ máme tak odtud dva kandidáty, bod } B = [0, 4] \in M, \\ f(B) &= 14, \text{ a bod } C = \left[-\frac{4}{3}, 4\right] \in M, f(C) = \frac{410}{27} = 15 + \frac{5}{27} \end{aligned}$$

b) $y = x^2$:

$$z = x^3 + 2x^2 + x^4 - 2 = 0, z' = 3x^2 + 4x + 4x^3 = x(4x^2 + 3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ ale bod } [0, 0] \text{ jsme již uvážili}$$

c) *Krajní body*:

$$\begin{aligned} D &= [-2, 4], f(D) = 14 \\ E &= [2, 4], f(E) = 30 \end{aligned}$$

3) *Závěr*

Porovnáním funkčních hodnot ve všech možných bodech, kde může být globální extrém, dostáváme:

Funkce f má na M globální maximum v bodě $[2, 4]$ o hodnotě 30.

Funkce f má na M globální minimum v bodě $[0, 0]$ o hodnotě -2 . ■

Vázané extrémy – Lagrangeovy multiplikátory

Budeme hledat extrémy funkce f , přičemž nás ale nebude zajímat chování této funkce na celém svém definičním oboru, ale pouze v těch bodech definičního oboru, které leží v jisté množině M , určené jednou či více rovnicemi. Mluvíme pak o vázaných lokálních extrémech, nebo též o lokálních extrémech vzhledem k M .

Obecně je tento postup popsán ve skriptech Došlý-Došlá, proto se zde omezíme na případ funkcí dvou nebo tří proměnných a vazebné podmínky dané jednou rovnicí.

Vázané extrémy funkce dvou proměnných s jednou vazebnou podmínkou

Mějme funkci $f(x, y)$ a množinu M dané rovnicí $g(x, y) = 0$. Pak postupujeme následovně:

1. Vytvoříme *Lagrangeovu funkci* $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. (λ – *Lagrangeův multiplikátor*).
2. Určíme stacionární body f vzhledem k M , tj. najdeme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} L_x(x, y, \lambda) &= 0, \\ L_y(x, y, \lambda) &= 0, \\ g(x) &= -L_\lambda(x, y, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

přičemž kromě konkrétních bodů (x_i, y_i) nás zajímá i příslušný multiplikátor λ_i .

Tato soustava je tvořena jednak parciálními derivacemi funkce Lagrangeovy funkce L podle jednotlivých proměnných funkce f , jednak vazebnými podmínkami.

Vidíme, že vlastně hledáme stacionární body Lagrangeovy funkce $L(x, y, \lambda)$, neboť rovnice vazebných podmínek nejsou nic jiného, než že vezmeme parciální derivace Lagrangeovy funkce L podle příslušných multiplikátorů (a vynásobíme -1).

3. Spočítáme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $L(x, y, \lambda)$ vzhledem k proměnných x, y ,

$$d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2,$$

a dosadíme do něj konkrétní stacionární bod A .

Dále zdiferencujeme vazebnou podmínku, $dg = g_xdx + g_ydy = 0$, dosadíme opět bod A a vyjádříme třeba dy , za která dosadíme do $d^2L(A)$. Dostaneme pak $d^2L(A) = \alpha dx^2$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) jako kvadratickou formu proměnné dx . Podobně jako u funkcí jedné proměnné, je-li tato kvadratická forma pozitivně definitní, tj. $\alpha > 0$, je v A ostré vázané lokální minimum, je-li naopak negativně definitní, tj. $\alpha < 0$, je v A ostré vázané lokální maximum.

Takto postupně vyšetříme všechny získané stacionární body.

Příklad 3. Metodou Lagrangeových multiplikátorů určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x + y)$ na množině M dané rovnicí $xy = 1$.

Řešení. Definiční obor $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > 0\}$

$M: g(x, y) = xy - 1 = 0$

Lagrangeova funkce $L(x, y, \lambda) = \ln(x + y) - \lambda(xy - 1)$

$$L_x = \frac{1}{x+y} - \lambda y = 0$$

$$L_y = \frac{1}{x+y} - \lambda x = 0$$

$$g(x, y) = -L_\lambda = xy - 1 = 0$$

Z prvních dvou rovnic:

$$\frac{1}{x+y} = \lambda y \quad \text{a} \quad \frac{1}{x+y} = \lambda x \Rightarrow \lambda y = \lambda x$$

Při $\lambda = 0$ je $\frac{1}{x+y} = 0$, což nelze, tedy $\lambda \neq 0$ a $x = y$.

Dosazením do poslední rovnice: $x^2 = 1$, tedy $x_1 = 1 = y_1$, $x_2 = -1 = y_2$.

Protože $[-1, -1] \notin D(f)$, máme jediného kandidáta na vázaný extrém, bod $A = [1, 1]$.

Dosazením do první rovnice $\frac{1}{2} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

Druhý diferenciál $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2$.

$$L_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$L_{xx}(A) = -\frac{1}{4}$$

$$L_{xy} = -\frac{1}{(x+y)^2} - \lambda$$

$$L_{xy}(A) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$L_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$L_{yy}(A) = -\frac{1}{4}$$

$$d^2L = -\frac{1}{(x+y)^2}dx^2 + 2\left(-\frac{1}{(x+y)^2} - \lambda\right)dxdy - \frac{1}{(x+y)^2}dy^2$$

$$d^2L(A) = -\frac{1}{4}dx^2 - \frac{3}{2}dxdy - \frac{1}{4}dy^2$$

Diferencováním vazebné podmínky:

$$dg = g_xdx + g_ydy = ydx + xdy = 0,$$

v bodě A :

$$dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx.$$

Dosadíme do $d^2L(A)$:

$$d^2L(A) = -\frac{1}{4}dx^2 - \frac{3}{2}dx(-dx) - \frac{1}{4}(-dx)^2 = 1dx^2$$

$1 > 0$, tedy $d^2L(A)$ je pozitivně definitní kvadratická forma $\Rightarrow$ v $A = [1, 1]$ je ostré vázané lokální minimum, $f(A) = \ln 2$. ■

Vázané extrémů funkce tří proměnných s jednou vazebnou podmínkou

Mějme funkci $f(x, y, z)$ a množině M dané rovnicí $g(x, y, z) = 0$. Postupujeme analogicky jako u funkce dvou proměnných, proto bez zbytečných opakovaných komentářů to shrňme následovně:

1. Vytvoříme *Lagrangeovu funkci* $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.
2. Určíme stacionární body f vzhledem k M , tj. najdeme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} L_x(x, y, z, \lambda) &= 0, \\ L_y(x, y, z, \lambda) &= 0, \\ L_z(x, y, z, \lambda) &= 0, \\ g(x, y, z) = -L_\lambda(x, y, z, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

přičemž kromě konkrétních bodů (x_i, y_i, z_i) nás zajímá i příslušný multiplikátor λ_i .

3. Spočítáme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $L(x, y, z, \lambda)$ vzhledem k proměnných x, y, z ,

$$d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + 2L_{xz}dxdz + L_{yy}dy^2 + 2L_{yz}dydz + L_{zz}dz^2,$$

a dosadíme do něj konkrétní stacionární bod A .

Dále zdiferencujeme vazebnou podmínku, $dg = g_xdx + g_ydy + g_zdz = 0$, dosadíme opět bod A a vyjádříme třeba dz , za která dosadíme do $d^2L(A)$. Dostaneme pak $d^2L(A) = \alpha dx^2 + \beta dxdy + \gamma dy^2$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) jako

kvadratickou formu proměnných dx, dy , s maticí $\begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix}$. Podobně jako u funkcí dvou proměnných, je-li

tato kvadratická forma pozitivně definitní, tj. $\alpha > 0$ a $\begin{vmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{vmatrix} > 0$, je v A ostré vázané lokální minimum, je-li

naopak negativně definitní, tj. $\alpha < 0$ a $\begin{vmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{vmatrix} > 0$, je v A ostré vázané lokální maximum.

Takto postupně vyšetříme všechny získané stacionární body.

Příklad 4. Metodou Lagrangeových multiplikátorů určete vázané extrémů funkce $f(x, y, z) = xy^2z^3$ s definičním oborem $D(f) = (\mathbb{R}^+)^3$ na množině M dané rovnicí $x + 2y + 3z = 6$.

Řešení. M : $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - 6 = 0$

Lagrangeova funkce $L(x, y, z, \lambda) = xy^2z^3 - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$

$$L_x = y^2z^3 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = y^2z^3$$

$$L_y = 2xyz^3 - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = xyz^3$$

$$L_z = 3xy^2z^2 - 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = xy^2z^2$$

$$g(x) = -L_\lambda = x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Porovnáním λ :

$$y^2z^3 = xyz^3 \quad \Rightarrow \quad (y - x)y^2z^3 = 0$$

$$y^2z^3 = xy^2z^2 \quad \Rightarrow \quad (z - x)y^2z^2 = 0$$

Protože $x, y, z \neq 0$, dostáváme $x = y = z$

Dosazením do čtvrté rovnice $6x - 6 = 0$, tedy $x = y = z = 1$.

Máme jediného kandidáta na vázaný extrém, bod $A = [1, 1, 1]$.

Dosazením do první rovnice $1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Druhý diferenciál $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + 2L_{xz}dxdz + L_{yy}dy^2 + 2L_{yz}dydz + L_{zz}dz^2$.

$$L_{xx} = 0 \quad L_{xx}(A) = 0$$

$$L_{xy} = 2yz^3 \quad L_{xy}(A) = 2$$

$$L_{xz} = 3y^2z^2 \quad L_{xz}(A) = 3$$

$$L_{yy} = 2xz^3 \quad L_{yy}(A) = 2$$

$$L_{yz} = 6xyz^2 \quad L_{yz}(A) = 6$$

$$L_{zz} = 6xy^2z \quad L_{zz}(A) = 6$$

$$d^2L = 0dx^2 + 4yz^3dxdy + 6y^2z^2dxdz + 2xz^3dy^2 + 12xyz^2dydz + 6xy^2zdz^2$$

$$d^2L(A) = 0dx^2 + 4dxdy + 6dxdz + 2dy^2 + 12dydz + 6dz^2$$

Diferencováním vazebné podmínky:

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = dx + 2dy + 3dz = 0,$$

vyjádříme třeba dx :

$$dx = -2dy - 3dz.$$

Dosadíme do $d^2L(A)$:

$$d^2L(A) = 4(-2dy - 3dz)dy + 6(-2dy - 3dz)dz + 2dy^2 + 12dydz + 6dz^2 = -6dy^2 - 12dydz - 12dz^2$$

Matice kvadratické formy $d^2L(A)$ je $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$.

Protože $-6 < 0$ a $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 36 > 0$, je tato kvadratická forma negativně definitní $\Rightarrow$ v $A = [1, 1, 1]$ je ostré vázané lokální maximum, $f(A) = 1$. ■

Příklad 5. Metodou Lagrangeových multiplikátorů určete vázané extrémy funkce $f(x, y, z) = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$ na množině M dané rovnicí $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 12$.

Řešení. Definiční obor $D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xyz \neq 0\}$

$$M: g(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 12 = 0$$

$$\text{Lagrangeova funkce } L(x, y, z, \lambda) = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 12 \right)$$

$$L_x = -\frac{2}{x^2} + \lambda \frac{2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = x$$

$$L_y = -\frac{2}{y^2} + \lambda \frac{2}{y^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = y$$

$$L_z = -\frac{2}{z^2} + \lambda \frac{2}{z^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = z$$

$$g(x) = -L_\lambda = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 12 = 0$$

Dosazením $x = y = z$ do poslední rovnice: $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$, odkud $x^2 = \frac{1}{4}$, tedy $x_1 = y_1 = z_1 = \lambda_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = y_2 = z_2 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Máme dva kandidáty na vázaný extrém, body $A = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a $B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Druhý diferenciál $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + 2L_{xz}dxdz + L_{yy}dy^2 + 2L_{yz}dydz + L_{zz}dz^2$.

$$L_{xx} = \frac{4}{x^3} - \lambda \frac{6}{x^4}$$

$$L_{xx}(A) = 32 - 48 = -16$$

$$L_{xx}(B) = -32 + 48 = 16$$

$$L_{xy} = 0$$

$$L_{xy}(A) = 0$$

$$L_{xy}(B) = 0$$

$$L_{xz} = 0$$

$$L_{xz}(A) = 0$$

$$L_{xz}(B) = 0$$

$$L_{yy} = \frac{4}{y^3} - \lambda \frac{6}{y^4}$$

$$L_{yy}(A) = 32 - 48 = -16$$

$$L_{yy}(B) = -32 + 48 = 16$$

$$L_{yz} = 0$$

$$L_{yz}(A) = 0$$

$$L_{yz}(B) = 0$$

$$L_{zz} = \frac{4}{z^3} - \lambda \frac{6}{z^4}$$

$$L_{zz}(A) = 32 - 48 = -16$$

$$L_{zz}(B) = -32 + 48 = 16$$

$$d^2L = \left(\frac{4}{x^3} - \lambda \frac{6}{x^4} \right) dx^2 + 0dxdy + 0dxdz + \left(\frac{4}{y^3} - \lambda \frac{6}{y^4} \right) dy^2 + 0dydz + \left(\frac{4}{z^3} - \lambda \frac{6}{z^4} \right) dz^2$$

$$d^2L(A) = -16dx^2 - 16dy^2 - 16dz^2$$

$$d^2L(B) = 16dx^2 + 16dy^2 + 16dz^2$$

Diferencováním vazebné podmínky:

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = -\frac{2}{x^3} dx - \frac{2}{y^3} dy - \frac{2}{z^3} dz = 0,$$

v bodě A:

$$-16dx - 16dy - 16dz = 0 \Rightarrow dz = -dx - dy,$$

a v bodě B:

$$16dx + 16dy + 16dz = 0 \Rightarrow dz = -dx - dy.$$

Rozhodněme o jednotlivých bodech.

$$d^2L(A) = -16dx^2 - 16dy^2 - 16(-dx - dy)^2 = -32dx^2 - 32dxdy - 32dy^2$$

Matice kvadratické formy $d^2L(A)$ je $\begin{pmatrix} -32 & -16 \\ -16 & -32 \end{pmatrix}$.

Protože $-32 < 0$ a $\begin{vmatrix} -32 & -16 \\ -16 & -32 \end{vmatrix} = 768 > 0$, je tato kvadratická forma negativně definitní $\Rightarrow$ v $A = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ je ostré vázané lokální maximum, $f(A) = 12$.

$$d^2L(B) = 16dx^2 + 16dy^2 + 16(-dx - dy)^2 = 32dx^2 + 32dxdy + 32dy^2$$

Protože $32 > 0$ a $\begin{vmatrix} 32 & 16 \\ 16 & 32 \end{vmatrix} = 768 > 0$, je tato kvadratická forma pozitivně definitní $\Rightarrow$ v $B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ je ostré vázané lokální minimum, $f(B) = -12$. ■

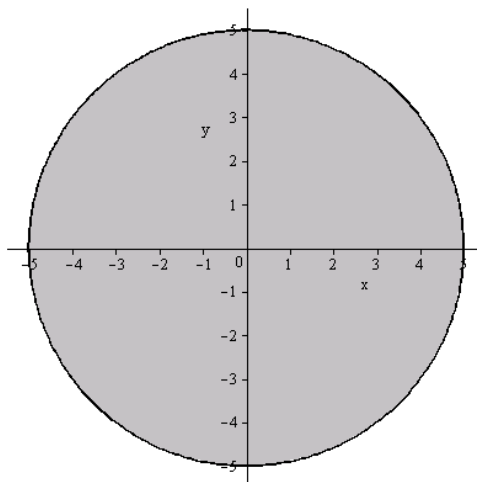
Globální extrémy a Lagrangeovy multiplikátory

Metodu Lagrangeových multiplikátorů můžeme použít i při vyšetřování globálních extrémů na množině ohraničené nějakou křivkou danou rovnicí (typicky kružnice, elipsa). V takovém případě k vyšetření hranice nemusíme tuto hranici vyjadřovat jako spojení několika funkcí jedné proměnné, ale můžeme najít kandidáty na extrémy na této hranici jako stacionární body Lagrangeovy funkce. Protože ale nás zajímají pouze globální extrémy, opět nemusíme vyšetřovat, jaký konkrétní, tentokrát vázaný extrém to je (či není), stačí nám určit funkční hodnoty v takto získaných bodech.

Ilustrujme si to na příkladě hledání globálních extrémů na kruhu, pro srovnání hranici vyšetřeme oběma způsoby.

Příklad 6. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na množině M , která je dána nerovností $x^2 + y^2 \leq 25$.

Řešení. Množinu M tvoří kruh se středem v počátku a poloměrem 5:



1) Lokální extrémy

Stacionární body:

$$f_x = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$f_y = 2y + 16 = 0 \Rightarrow y = -8$$

Jediný stacionární bod $[6, -8] \notin M$, tedy odtud nemáme žádného kandidáta.

2) *Hranice* – kandidáty budeme hledat jednak „klasicky“, jednak metodou Lagrangeových multiplikátorů

2i) „klasicky“

a) $y = \sqrt{25 - x^2}$:

$$z = x^2 + (25 - x^2) - 12x + 16\sqrt{25 - x^2} = 25 - 12x + 16\sqrt{25 - x^2}$$

$$z' = -12 - \frac{16x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{25 - x^2} = -4x, \text{ toto rovnost může platit pouze pro } x \leq 0, \text{ pro která ji umocníme:}$$

$$9(25 - x^2) = 16x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, \text{ kandidát } A = [-3, 4], f(A) = 125$$

$$z' \text{ není, narozdíl od } z, \text{ definována pro } x = \pm 5, \text{ dostáváme kandidáty } B = [-5, 0], f(B) = 85 \text{ a } C = [5, 0], f(C) = -35$$

b) $y = -\sqrt{25 - x^2}$:

$$z = x^2 + (25 - x^2) - 12x - 16\sqrt{25 - x^2} = 25 - 12x - 16\sqrt{25 - x^2}$$

$$z' = -12 + \frac{16x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{25 - x^2} = 4x, \text{ toto rovnost může platit pouze pro } x \geq 0, \text{ pro která ji umocníme:}$$

$$9(25 - x^2) = 16x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, \text{ kandidát } D = [3, -4], f(D) = -75$$

$$z' \text{ není, na rozdíl od } z, \text{ definována pro } x = \pm 5, \text{ ale body } [-5, 0] \text{ a } [5, 0] \text{ již uvažujeme}$$

c) *Krajní body*:

oba krajní body $[-5, 0]$ a $[5, 0]$ již uvažujeme

2ii) *metodou Lagrangeových multiplikátorů*

$$h(M): g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$\text{Lagrangeova funkce } L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$L_x = 2x - 12 - \lambda 2x = 0 \Rightarrow x(1 - \lambda) = 6$$

$$L_y = 2y + 16 - \lambda 2y = 0 \Rightarrow y(1 - \lambda) = -8$$

$$g(x) = -L_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

Z prvních dvou rovnic vidíme, že $x \neq 0 \neq y$, a porovnáním $1 - \lambda$: $\frac{6}{x} = -\frac{8}{y}$, odkud $y = -\frac{4}{3}x$.

Dosazením do poslední rovnice: $x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 25 = 0$, odkud $x^2 = 9$, tedy $x_1 = 3, y_1 = -4$ a $x_2 = -3, y_2 = 4$.

Máme tedy dva kandidáty, $D = [3, -4], f(D) = -75$ a $A = [-3, 4], f(A) = 125$.

Vidíme, že narozdíl od „klasické“ metody zde není třeba zkoumat krajní body $[-5, 0]$ a $[5, 0]$.

3) *Závěr*

Porovnáním funkčních hodnot ve všech možných bodech, kde může být globální extrém, dostáváme:

Funkce f má na M globální maximum v bodě $[-3, 4]$ o hodnotě 125.

Funkce f má na M globální minimum v bodě $[3, -4]$ o hodnotě -75 . ■