MASARYKOVA UNIVERZITA

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Sbírka příkladů do cvičení

M2100

Matematická analýza II

verze 14. dubna 2025

Mgr. Jakub Juránek, Ph.D.

Obsah

1 Separovatelné diferenciální rovnice **1**

2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu **2**

3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů **3**

4 Metriky **4**

5 Množiny a posloupnosti v metrických prostorech **5**

6 Zobrazení v metrických prostorech **6**

7 Funkce více proměnných – definiční obor, vrstevnice, graf **7**

8 Limita **8**

9 Parciální derivace **9**

10 Tečná rovina, diferenciál a Taylorův polynom **10**

Výsledky **i**

1 Separovatelné diferenciální rovnice i
2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu ii
3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů iii
4 Metriky iv
5 Množiny a posloupnosti v metrických prostorech vi
6 Zobrazení v metrických prostorech viii
7 Funkce více proměnných – definiční obor, vrstevnice, graf x
8 Limita xix
9 Parciální derivace xxii
10 Tečná rovina, diferenciál a Taylorův polynom xxiv

1. Separovatelné diferenciální rovnice

Příklad 1.1. Řešte rovnice typu $y' = f(x)g(y)$.

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$
2. $y' = xy$
3. $xyy' = 1 - x^2$
4. $x + xy + y'(y + xy) = 0$
5. $2(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$, $y(0) = 0$
6. $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}$
7. $y' - xy^2 = 2xy$
8. $x^2 y' - \cos 2y = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{4}$

Příklad 1.2. Řešte rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$.

1. $y' = (x + y + 2)^2$
2. $y' + y = 2x + 3$

Příklad 1.3. Řešte rovnice typu $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1. $x + 2y - xy' = 0$
2. $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$
3. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

Příklad 1.4. Řešte rovnice typu $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$.

1. $y' = \dfrac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}$
2. $y' = \dfrac{2x - y + 3}{x - 2y - 3}$

2. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Příklad 2.1. Řešte rovnice typu $y' = a(x)y + b(x)$.

1. $y' + 2y = 4x$
2. $y' - 2xy = \mathrm{e}^{x^2}$
3. $y' + y = \cos x$
4. $y' + y\cos x = \sin 2x$
5. $y' = 2x(x^2 + y)$
6. $y' - x^3 y = x^3$
7. $x^2 y' + xy + 1 = 0$
8. $y' + \dfrac{2}{x} y = \sin x$

Příklad 2.2. Nalezněte řešení rovnice ve tvaru $x = x(y)$.

1. $y' = \left(\mathrm{e}^{-y} - x\right)^{-1}$
2. $(\mathrm{e}^{y} - x)\, y' = y$
3. $y' = \left(x - y^2\right)^{-1}$

Příklad 2.3. Řešte rovnice typu $y' = a(x)y + b(x)y^r$, kde $r \neq 0, 1$.

1. $y' = xy - \mathrm{e}^{-x^2} y^3$
2. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

3. Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Příklad 3.1. Řešte lineární diferenciální rovnice druhého řádu metodou variace konstant.

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$
2. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

Příklad 3.2. Řešte lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou metodou neurčitých koeficientů.

1. $2y'' + y' - y = 2e^x$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^x(3-4x)$
3. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
4. $y'' - 2y' + 5y = 3x + 5\sin 2x$

Příklad 3.3. Napište partikulární řešení následujících diferenciálních rovnic pomocí neurčitých koeficientů. Tyto koeficienty již neurčujte!

1. $y'' - 10y' + 24y = 3x^4$
2. $y'' - y' = -2x^5$
3. $y'' - 3y' - 4y = xe^{-4x}$
4. $y'' + 4y' - 21y = \left(7x^3 - 1\right)e^{3x}$
5. $y'' - 2y' + y = (2-x)e^x$
6. $y'' + y = x\cos x$
7. $y'' - 4y' + 4y = \left(x^2 - x\right)e^{2x}\sin x$
8. $y'' - 8y' + 41y = 5x^3e^{4x}\cos 5x$

Příklad 3.4. Řešte lineární diferenciální rovnice třetího řádu se speciální pravou stranou metodou neurčitých koeficientů.

1. $y''' + 12y'' + 48y' + 64y = 4913\cos x$
2. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = 1$

Příklad 3.5. Řešte soustavy lineárních diferenciálních rovnic dosazovací metodou.

1. $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 1 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2 - 5x \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_3 \\ y_3' &= 6y_1 - 6y_2 + 5y_3 \end{aligned}$$

Příklad 3.6. Řešte Eulerovy rovnice.

1. $x^2y'' - xy' + 2y = 2\ln^2 x$
2. $x^3y''' + 15x^2y'' + 60xy' + 60y = \ln x$

4. Metriky

Příklad 4.1. Určete vzdálenost bodů $x = [1, -2, 3]$ a $y = [4, 5, -1] \in \mathbb{R}^3$ v následujících metrikách.

1. ρ_1 2. ρ_2 3. ρ_∞ 4. ρ_3 5. ρ_D

Příklad 4.2. Rozhodněte, zda dané funkce ρ a σ jsou metrikami na $\mathbb{R}$.

1. $\rho(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$
2. $\sigma(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$

Příklad 4.3. Určete vzdálenost bodu $A = [5, 6]$ od přímky $p\colon y = -x - 1$ v následujících metrikách.

1. ρ_1
2. ρ_2

Příklad 4.4. V $\mathbb{R}^2$ je dán čtverec $C = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\} = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Určete jeho průměr v následujících metrikách.

1. ρ_1 2. ρ_2 3. ρ_∞ 4. ρ_D

Příklad 4.5. Určete průměr paraboly $p\colon y = x^2 - 2x + 1$ v následujících metrikách.

1. ρ_1 2. ρ_2 3. ρ_∞ 4. ρ_D

Příklad 4.6. Rozhodněte, zda funkce $\rho(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ je metrikou na $\mathbb{R}$ a stanovte průměr množiny $\mathbb{R}$ v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \rho)$.

Příklad 4.7. Stanovte vzdálenost spojitých funkcí f, g v metrikách ρ_c, ρ_I.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$ na $[0,1]$, tj. $f, g \in C[0,1]$
2. $f(x) = x$, $g(x) = \ln x$ na $[1, \mathrm{e}]$, tj. $f, g \in C[1, \mathrm{e}]$

Příklad 4.8. Určete průměr množiny $A = \{f(x) = x^n; x \in \langle 0,1\rangle, n \in \mathbb{N}\} \subset C[0,1]$ v integrální metrice ρ_I (v metrice stejnoměrné konvergence ρ_c viz skripta).

Příklad 4.9. Rozhodněte, zda pro libovolné dvě ohraničené množiny A, B v metrickém prostoru (P, ρ) platí, že i jejich sjednoceni $A \cup B$ je ohraničená množina. Pokud ano, tvrzení dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad.

5. Množiny a posloupnosti v metrických prostorech

Příklad 5.1. Určete limitu posloupnosti $x_n = \left(\frac{n-2}{2n^2}, \sqrt[n]{n}, 2\right)$ v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^3, \rho_1)$. Jaká by byla limita, kdybyste místo součtové metriky ρ_1 uvážili euklidovskou metriku ρ_2 nebo maximovou metriku ρ_∞?

Příklad 5.2. Určete limitu postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ definovanou $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ v metrikách ρ_I, ρ_c. Co z tohoto příkladu plyne pro vzájemný vztah těchto metrik?

Příklad 5.3. Popište, jak vypadají konvergentní posloupnosti v diskrétním metrickém prostoru.

Příklad 5.4. V $\mathbb{E}_1$ je dána množina $A = (0,1) \cap \mathbb{I}$, tj. množina všech iracionálních čísel z intervalu $(0,1)$. Určete vnitřek A°, uzávěr $\bar{A}$, hranici $h(A)$, derivaci A' a adherenci $\operatorname{ad} A$. Je množina A hustá v metrickém prostoru $(\langle 0,1 \rangle, \rho_1)$?

Příklad 5.5. V $\mathbb{E}_1$ je dána množina $A = \langle 0,1 \rangle \cup (2,3) \cup \{4\}$. Určete vnitřek A°, uzávěr $\bar{A}$, hranici $h(A)$, derivaci A' a adherenci $\operatorname{ad} A$. Je množina A hustá v nějakém metrickém prostoru?

Příklad 5.6. V závislosti na $\varepsilon > 0$ určete ε-okolí bodu 1 v metrickém prostoru (P, ρ_1), kde $P = \langle -1;1 \rangle \cup \langle 2;4 \rangle$.

Příklad 5.7. V metrickém prostoru (P, ρ_1), kde $P = \langle -1;1 \rangle \cup \langle 2;4 \rangle$, je dána množina $A = \langle 0;1 \rangle$. Určete její vnitřek a hranici.

Příklad 5.8. Existují v metrickém prostoru (P, ρ_1), kde $P = \langle -1;1 \rangle \cup \langle 2;4 \rangle$ nějaké obojaké množiny různé od P a $\emptyset$?

Příklad 5.9. V $\mathbb{E}_1$ je dána množina $A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\} \cup \langle 2;3)$. Určete vnitřek A°, uzávěr $\bar{A}$, hranici $h(A)$, derivaci A' a adherenci $\operatorname{ad} A$.

Příklad 5.10. Udejte příklad podprostoru $\mathbb{E}_2$, tj. podmnožiny $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou, a posloupnosti v něm, která je cauchyovská, ale ne konvergentní.

6. Zobrazení v metrických prostorech

Příklad 6.1. Na množině $C[-1,1]$ uvažujme metriku ρ_I a metriku σ definovanou takto:

$$\forall f,g \in C[-1,1]\colon \sigma(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2 \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x.$$

Dále pro pevné $k \in \mathbb{R}$ uvažujme zobrazení $F\colon (C[-1,1],\rho_I) \to (C[-1,1],\sigma)$ definované předpisem $F(f)(x) = kf\left(x^3\right)$, $f \in C[-1,1]$. Pro jaké k je F izometrické zobrazení metrických prostorů?

Příklad 6.2. Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je spojitým zobrazením mezi metrickými prostory $(\mathbb{R},\sigma)$ a $(\mathbb{R},\rho_1)$, kde metrika σ je definována následovně:

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} |x|+|y|, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Příklad 6.3. Dokažte, že zobrazení $F\colon C[a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, definované předpisem

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in C[a,b],$$

je lipschitzovské zobrazení mezi metrickými prostory $(C[a,b],\rho_c)$ a $\mathbb{E}_1$. Určete i jeho Lipschitzovu konstantu.

Příklad 6.4. Uvažme funkci $f\colon \langle c,\infty) \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = \ln x$ a $c > 0$. Určete, pro které hodnoty c je f lipschitzovská, resp. kontrakcí na celém svém definičním oboru.

Příklad 6.5. Uvažme funkci $f(x) = \sqrt{x}$. Rozhodněte, zda f je lipschitzovská na intervalu $\langle 0,1\rangle$, resp. $\left\langle \frac{1}{2},1 \right\rangle$.

Příklad 6.6. Rozhodněte, zda dané funkce $f\colon \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_1$ jsou lipschitzovské, či dokonce kontrakcí, popřípadě kdy.

1. $f(x) = ax+b$
2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Příklad 6.7. Určete interval typu $\langle -a,a\rangle$, kde $a > 0$, na kterém jsou pro funkci $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ splněny předpoklady Banachovy věty o pevném bodu a využitím metody postupných aproximací, s počáteční aproximací $x_0 = 0$, nalezněte přibližnou hodnotu x_3 (tj. hodnotu po třetí iteraci) jejího pevného bodu. Dále určete přesnou hodnotu pevného bodu, ke kterému tyto postupné aproximace konvergují.

Příklad 6.8. Pomocí Banachovy věty o pevném bodu a metodou postupných aproximací najděte řešení počáteční úlohy

$$y' = \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1.$$

Příklad 6.9. Pomocí Banachovy věty o pevném bodu a metodou postupných aproximací vyřešte následující slovní úlohu: „Vánočka váží kilo a půl své váhy. Kolik váží vánočka?“

7. Funkce více proměnných – definiční obor, vrstevnice, graf

Příklad 7.1. Určete a do roviny načrtněte definiční obor následujících funkcí.

1. $f_1(x,y) = \ln(x+y)$
2. $f_2(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$
3. $f_3(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Příklad 7.2. Určete, jak vypadají vrstevnice grafu následujících funkcí a načrtněte jich vždy několik do roviny. Dále načrtněte jejich řezy rovinami $x = 0$ a $y = 0$.

1. $f_4(x,y) = |x| + |y|$
2. $f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $f_6(x,y) = x^2 + y^2$
4. $f_7(x,y) = x^2 - y^2$
5. $f_8(x,y) = \mathrm{e}^x$
6. $f_9(x,y) = 1 - x - y$

Příklad 7.3. Určete definiční obor funkce $f(x,y,z) = \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z} + \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$.

8. Limita

Příklad 8.1. Pomocí maximové metriky zapište, co znamená $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-3)} f(x,y) = \infty$.

Příklad 8.2. Pomocí maximové metriky zapište, co znamená $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,2)} f(x,y) = 3$.

Příklad 8.3. Pomocí maximové, součtové a Euklidovské metriky zapište, co znamená $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} f(x,y) = -2$.

Příklad 8.4. Vypočtěte následující limity.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{x^2+y}{x^2-y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2-3y+3y-xy}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2-3y+4}-2}{x^2-3y}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2-3y^2}{x^2+2y^2}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{(x-2)^2x+2y^2}{(x-2)^2+y^2}$
15. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x}{x+y+z}$

Příklad 8.5. Rozhodněte o spojitosti následujících funkcí.

1. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

9. Parciální derivace

Příklad 9.1. Určete parciální derivace prvního řádu následujících funkcí.

1. $z(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$
2. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

Příklad 9.2. Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z(x,y) = (1+\log_y x)^3$ v bodě $A[\mathrm{e},\mathrm{e}]$.

Příklad 9.3. Určete parciální derivace do druhého řádu funkce $z(x,y) = \dfrac{xy-x}{y}$.

Příklad 9.4. Určete parciální derivace do druhého řádu funkce $z(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ v bodě $A[1,0]$.

Příklad 9.5. Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = x^2\cos y + y\ln x$ v bodě $M = \left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,3)$. Dále určete směrnici tečny v bodě M ke grafu funkce jedné proměnné, který dostaneme řezem grafu funkce f rovinou kolmou na rovinu xy v bodě M ve směru $\vec{u}$.

Příklad 9.6. Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = 3x^4 + xy + y^3$ v bodě $M = [1,2]$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{u}$, který svírá s kladnou poloosou x úhel $135\,^\circ$.

Příklad 9.7. Určete parciální derivace prvního řádu složené funkce $z(u,v) = \dfrac{u}{v}$, $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 + y^2$.

Vzorce pro derivace složené funkce se hodí, máme-li derivovat „funkci na funkci“.

Příklad 9.8. Určete parciální derivace prvního řádu složené funkce $z(u,v) = u^v$, $u = xy$, $v = \sin x$.

10. Tečná rovina, diferenciál a Taylorův polynom

Příklad 10.1. Určete rovnici tečné roviny τ a normálu n ke grafu funkce f v bodě T.

1. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $T\,[0,0,?]$
2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $T\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, ?\right]$

Příklad 10.2. Určete diferenciál funkce f v bodě A.

1. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $A\,[-1,2]$
2. $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$, $A\,[0,-1,2]$

Příklad 10.3. Pomocí diferenciálu vhodné funkce určete přibližnou hodnotu $\ln \dfrac{0{,}97}{1{,}05}$.

Příklad 10.4. Řešte exaktní diferenciální rovnice přes nalezení kmenové funkce (případně je na exaktní nejprve převeďte pomocí integračního faktoru).

1. $(2x+y)\,\mathrm{d}x + (1+x)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $y^2x\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y = 0$
3. $2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$
4. $(3x^2y+y^3)\,\mathrm{d}x - (2x^3+5y)\,\mathrm{d}y = 0$

Výsledky

1 Separovatelné diferenciální rovnice

Výsledky 1.1.

1. $y = \pm\sqrt{c - x^2}$
2. $y = c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$
3. $y = \pm\sqrt{\ln x^2 - x^2 + c}$
4. $y - \ln|y+1| = -x + \ln|x+1| + c$
5. $y = \sqrt{\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}}$
6. $y = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$
7. $\dfrac{y}{y-2} = c\mathrm{e}^{x^2}$, resp. $y = \dfrac{2c\mathrm{e}^{x^2}}{1 - c\mathrm{e}^{x^2}}$
8. $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$

Výsledky 1.2.

1. $y = -x - 2 + \operatorname{tg}(x+c)$
2. $y = 2x + 1 + c\mathrm{e}^{-x}$

Výsledky 1.3.

1. $y = cx^2 - x$
2. $y = x\arcsin(cx)$
3. $(x-c)^2 - y^2 = c^2$

Výsledky 1.4.

1. $\ln|x+y| = 2y - x + c$
2. $x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y = c$

2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Výsledky 2.1.

1. $y = 2x - 1 + c\mathrm{e}^{-2x}$
2. $y = x\mathrm{e}^{x^2} + c\mathrm{e}^{x^2}$
3. $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + c\mathrm{e}^{-x}$
4. $y = 2\sin x - 2 + c\mathrm{e}^{-\sin x}$
5. $y = -x^2 - 1 + c\mathrm{e}^{x^2}$
6. $y = -\frac{x^4}{4} - 1 + c\mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}}$
7. $y = \frac{c - \ln x}{x}$
8. $y = -\cos x + \frac{2}{x}\sin x + \frac{2}{x^2}\cos x + \frac{c}{x^2}$

Výsledky 2.2.

1. $x = (y + c)\mathrm{e}^{-y}$
2. $x = \frac{\mathrm{e}^y + c}{y}$
3. $x = y^2 + 2y + 2 + c\mathrm{e}^y$

Výsledky 2.3.

1. $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2x + c}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ a $y = 0$
2. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 \ln|x| + cx^2\right)^2$ a $y = 0$

3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Výsledky 3.1.

1. $y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x \mathrm{e}^x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{e}^x + x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{e}^x$
2. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{\cos 2x}{2 \cos x}$

Výsledky 3.2.

1. $y = c_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + c_2 \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$
2. $y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} + (2x^2 + x)\mathrm{e}^x$
3. $y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x} + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x$
4. $y = c_1 \mathrm{e}^x \sin(2x) + c_2 \mathrm{e}^x \cos(2x) + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x$

Výsledky 3.3.

1. $y_p = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
2. $y_p = x(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)$
3. $y_p = (ax+b)\mathrm{e}^{-4x}$
4. $y_p = x(ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{3x}$
5. $y_p = x^2(ax+b)\mathrm{e}^x$
6. $y_p = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$
7. $y_p = \left[\left(ax^2+bx+c\right)\cos x + \left(dx^2+fx+g\right)\sin x\right]\mathrm{e}^{2x}$
8. $y_p = x\left[\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)\cos 5x + \left(ex^3+fx^2+gx+h\right)\sin 5x\right]\mathrm{e}^{4x}$

Výsledky 3.4.

1. $y = c_1 \mathrm{e}^{-4x} + c_2 x \mathrm{e}^{-4x} + c_3 x^2 \mathrm{e}^{-4x} + 47 \sin x + 52 \cos x$
2. $y = 4 - 3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}$

Výsledky 3.5.

1. $y_1 = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{5x} - x - 2$
   $y_2 = -c_1 \mathrm{e}^x + 3c_2 \mathrm{e}^{5x} + 2x + 2$
2. $y_1 = c_1 \mathrm{e}^x + c_3 \mathrm{e}^{-x}$
   $y_2 = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x}$
   $y_3 = 2c_2 \mathrm{e}^{2x} - c_3 \mathrm{e}^{-x}$

Výsledky 3.6.

1. $y = c_1 x \cos(\ln x) + c_2 x \sin(\ln x) + \ln^2 x + 2 \ln x + 1$
2. $y = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4} + \frac{c_3}{x^5} + \frac{1}{60} \ln x - \frac{47}{3600}$

4 Metriky

Výsledky 4.1.

1. $\rho_1(x,y) = |1-4| + |-2-5| + |3-(-1)| = 3+7+4 = 14$
2. $\rho_2(x,y) = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-5)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{9+49+16} = \sqrt{74}$
3. $\rho_\infty(x,y) = \max\{|1-4|, |-2-5|, |3-(-1)|\} = \max 3,7,4 = 7$
4. $\rho_3(x,y) = \sqrt[3]{(1-4)^3 + (-2-5)^3 + (3-(-1))^3} = \sqrt[3]{27+343+64} = \sqrt[3]{434}$
5. $x \neq y \Rightarrow \rho_D(x,y) = 1$

Výsledky 4.2.

1. Ano.
2. Ne, není splněn axiom totožnosti, např. $1 \neq -1$ ale $\sigma(1,-1) = \left|1^2 - (-1)^2\right| = 0$.

Výsledky 4.3.

1. $\rho_1(A,p) = 12$
2. $\rho_2(A,p) = 6\sqrt{2}$

Výsledky 4.4.

1. $d_{\rho_1}(C) = 2$
2. $d_{\rho_2}(C) = \sqrt{2}$
3. $d_{\rho_\infty}(C) = 1$
4. $|C| > 1 \Rightarrow d_{\rho_D}(C) = 1$

Výsledky 4.5.

1. $d_{\rho_1}(p) = \infty$
2. $d_{\rho_2}(p) = \infty$
3. $d_{\rho_\infty}(p) = \infty$
4. $|p| > 1 \Rightarrow d_{\rho_D}(p) = 1$

Výsledky 4.6. Je to metrika a $d(\mathbb{R}) = 1$.

Nejprve ověřme, že se opravdu jedná o metriku. Nezápornost, stejně jako axiomy M1 totožnosti a M2 symetrie jsou zřejmé, plynou z těchto vlastností pro klasickou metriku číselné osy. Pro ověření axiomu M3 trojúhelníkové nerovnosti se podívejme na funkci $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$, jejíž souvislost s ρ je snad zřejmá. Tato funkce je rostoucí pro $t \in [0,\infty)$. Známá věc: $|a+b| \leq |a| + |b|$. Kombinací tohoto dostaneme:

$$\varphi(|a+b|) \leq \varphi(|a|+|b|)$$
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

Rozepsáním pravé strany úvahou, že menší kladný jmenovatel znamená větší celý zlomek, máme

$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

dohromady pak

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Nakonec volbou $a = x - y$, $b = y - z$,

$$\rho(x,z) = \frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} = \rho(x,y) + \rho(y,z),$$

čímž jsme dokázali trojúhelníkovou nerovnost a ρ je tak metrikou.
Pro určení průměru $d(\mathbb{R})$ postupujme ve dvou krocích. Nejprve stanovme horní odhad pro vzdálenost dvou prvků, a pak ukažme, že se k němu můžeme dostat libovolně blízko (či ho přímo nabýt). Poté tento horní odhad bude hledaným průměrem.
Ze tvaru funkce φ je vidět, že $\varphi(t) < 1$ pro $t \in [0,\infty)$, tedy horní odhad je 1. Na druhou stranu $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$, tedy se vzdáleností dvou bodů se můžeme dostat libovolně blízko 1, stačí vždy zvolit dva body dostatečně daleko od sebe v klasické metrice číselné osy. Proto $d(\mathbb{R}) = 1$.

Výsledky 4.7.

1. $\rho_c(f,g) = \frac{1}{4}$, $\rho_I(f,g) = \frac{1}{6}$
2. $\rho_c(f,g) = \mathrm{e} - 1$, $\rho_I(f,g) = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{2}$

Výsledky 4.8. $d_{\rho_I}(A) = \frac{1}{2}$

Pro ρ_I uvážíme význam určitého integrálu jako plochy pod grafem, z čehož je vidět, že vzdálenost dvou funkcí tu nemůže být větší než $\frac{1}{2}$ (polovina obsahu jednotkového čtverce). To je náš horní odhad. Na druhou stranu

$$\rho_I(x,x^n) = \int_0^1 (x - x^n)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},$$

lze se proto našemu hornímu odhadu libovolně přiblížit a tedy v ρ_I je průměr A roven $\frac{1}{2}$.

Výsledky 4.9. Abychom dokázali, že $A \cup B$ je ohraničená množina, je třeba určit, že existuje horní ohraničení vzdáleností libovolné dvojice bodů x, y, a tím tedy i $d(A \cup B)$.
Jsou-li $x, y \in A$, resp. $x, y \in B$, pak platí $\rho(x,y) \leq d(A) \in \mathbb{R}_0^+$, resp. $\rho(x,y) \leq d(B) \in \mathbb{R}_0^+$.
Co ale když $x \in A$, $y \in B$? Zvolme pevně $a \in A$, $b \in B$. Pak $\rho(a,b) \in \mathbb{R}_0^+$ je konstanta a z trojúhelníkové nerovnosti (dvakrát použité), a z předchozího, dostaneme

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y) \leq d(A) + \rho(a,b) + d(B),$$

kde číslo na pravé straně je opět konstantou, která zřejmě není menší než $d(A)$ nebo $d(B)$.
Celkem tak $d(A \cup B) \leq d(A) + \rho(a,b) + d(B) \in \mathbb{R}_0^+$, tedy množina $A \cup B$ je ohraničená.

5 Množiny a posloupnosti v metrických prostorech

Výsledky 5.1. Ve všech třech metrikách je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0,1,2)$.

Výsledky 5.2. $f_n \xrightarrow{\rho_I} f \equiv 0$ a $f_n \xrightarrow{\rho_c}$ neexistuje.
Tímto příkladem jsme dokázali, že metrika stejnoměrné konvergence a integrální metriky nejsou ekvivalentní.

Výsledky 5.3. Všechny konvergentní posloupnosti jsou skorostacionární, tj. od jistého indexu dále má všechny členy stejné.

Výsledky 5.4. $A^\circ = \emptyset$, $\bar{A} = \langle 0,1\rangle$, $h(A) = \langle 0,1\rangle$, $A' = \langle 0,1\rangle$, $\mathrm{ad}A = \emptyset$.
Ano je hustá v metrickém prostoru $(\langle 0,1\rangle, \rho_1)$, neboť $\bar{A} = \langle 0,1\rangle$.

Výsledky 5.5. $A^\circ = (0,1)\cup(2,3)$, $\bar{A} = \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle \cup \{4\}$, $h(A) = \{0,1,2,3,4\}$, $A' = \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle$, $\mathrm{ad}A = \{4\}$.
Ano je hustá v metrickém prostoru $(\bar{A}, \rho_1) = (\langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle \cup \{4\}, \rho_1)$.

Výsledky 5.6. Protože daný metrický prostor lze vnořit do klasické číselné osy, můžeme použít úvahu, že zatímco na číselné ose je ε-okolí nějaké bodu otevřený interval se středem v tomto bodě a poloměrem ε, tj. $\mathscr{O}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, zde to dopadne podobně, jen se z tohoto intervalu vezme pouze ta část, která je P.

Doporučuji proto si celou situaci na číselné ose nakreslit, postupně si zvětšovat ε a dívat se, ve kterých hodnotách dojde k zásadní změně.

Dostaneme

$$\mathscr{O}_\varepsilon(1) = \begin{cases} (1-\varepsilon;1\rangle & 0<\varepsilon\le 1 \\ (1-\varepsilon;1\rangle \cup \langle 2;1+\varepsilon) & 1\le\varepsilon\le 2 \\ \langle -1;1\rangle \cup \langle 2;1+\varepsilon) & 2\le\varepsilon\le 3 \\ \langle -1;1\rangle \cup \langle 2;4\rangle & 3<\varepsilon \end{cases}$$

Výsledky 5.7. Nabízelo by se, že vnitřkem uzavřeného intervalu bude stejný interval otevřený a hranici budou tvořit jeho krajní body. Bližším pohledem a nakreslením ale zjistíte, že zatím co u bodu 0 je v libovolném jeho ε-okolí (buď $\varepsilon < 1$, stejně vždy uvažujeme ta extrémně malá) jak bod z A, např. $\frac{\varepsilon}{2}$, tak z $P\setminus A$, např. $-\frac{\varepsilon}{2}$, a je tedy hraničním bodem, tak u bodu 1 například (viz předchozí příklad) $\mathscr{O}_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon;1\rangle \subseteq A$ pro libovolné $0<\varepsilon\le 1$, což ale znamená, že v těchto okolích není žádný bod z $P\setminus A$ a bod 1 není hraničním bodem. Celkem:
$h(A) = \{0\}$
$A^\circ = A\setminus h(A) = (0;1\rangle$
Všimněte si, že v závislosti na metrickém prostoru nás mohou zradit naše zažité představy z běžné číselné osy, že vnitřek jako otevřená množina musí být otevřený interval.

Výsledky 5.8. Ano, existují další dvě, a to $\langle -1;1\rangle$ a $\langle 2;4\rangle$.

Výsledky 5.9. Nyní se pohybujeme na klasické číselné ose, pokud tedy máme dobře vybudované představy o chování číselné osy, můžeme je použít.

Začněme třeba hromadnými body. U intervalů jako „spojitých“ množin platí, že každý bod daného intervalu je jeho bodem hromadným, stejně tak jeho krajní body, bez ohledu na to, zda v něm jsou nebo ne. U posloupnosti pojem hromadného bodu z teorie posloupností a z teorie metrických splývají.

Máme-li navíc konvergentní posloupnost, jako zde (s limitou 0), víme, že jiných hromadných bodů nemá. Celkově tedy derivace:
$A' = \{0\} \cup \langle 2;3 \rangle$

Co se týče izolovaných bodů, můžeme využít faktu, že každý bod množiny je buď hromadný nebo izolovaný. Tedy adherence:
$\mathrm{ad}A = A \setminus A' = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$

Pokud jde o vnitřní a hraniční body, pro interval (je ohraničený) platí to obvyklé, tedy že jeho krajní body jsou hraniční, všechny ostatní vnitřní. Posloupnost je „diskrétní“ množina, a když si ji představíte na číselné ose, pro každý její bod platí, že v libovolném jeho okolí jsou body mimo A, tedy jsou hraniční. Mimochodem, pokud bychom do této úvahy nad posloupností přidali ještě to, že daná okolí vždy mohou být tak malá, že jediný bod z ní v ní je ten, jehož okolí uvažujeme, dostali bychom druhou cestou fakt, že body této posloupnosti jsou izolované. U posloupnosti je potřeba navíc uvážit ještě její hromadné body (zle limita 0), které jsou libovolně blízko dokonce nekonečně mnoho bodům této posloupnosti, proto jsou též body hraničními. A protože žádný bod nemůže být současně hraniční a vnitřní, máme vnitřek:
$A^\circ = (2;3)$
Máme hranici:
$h(A) = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\} \cup \{0\} \cup \{2;3\}$
A vlastně máme i uzávěr:
$\bar{A} = A \cup h(A) = A^\circ \cup h(A) = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\} \cup \{0\} \cup \langle 2;3 \rangle$

Výsledky 5.10. Jakékoliv kreativní řešení je možné, nejsnáze lze vytvořil libovolnou posloupnost a z metrického prostoru odebrat její „limitu“. Např. $P = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

6 Zobrazení v metrických prostorech

Výsledky 6.1. Pro $k = \pm 3$.

Výsledky 6.2. Není. Snadno nahlédneme, že není spojité v bodě $x = 0$. Neb posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$ platí, že $x_n \xrightarrow{\sigma} x = 0$, neboť $\sigma(x_n, x) = |x_n| + |x| = \left|\dfrac{1}{n}\right| + |0| = \dfrac{1}{n} \to 0$, ale posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ v metrice ρ_1 konverguje k 1 a ne k $f(x) = f(0) = 0$.

Výsledky 6.3. $|F(f) - F(g)| \leq (b-a) \cdot \rho_c(f,g)$, je tedy lipschitzovské s Lipschitzovou konstantou např. $L = b - a$.

Výsledky 6.4. Protože $\left|f'(x)\right| = \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{c}$ pro všechny $x \in \langle c, \infty)$, resp. přesněji $\sup\limits_{x \in \langle c, \infty)} \left|f'(x)\right| = \dfrac{1}{c}$, vidíme, že f je lipschitzovská pro libovolné $c > 0$, s Lipschitzovou konstantou např. $L = \dfrac{1}{c}$, přičemž je kontrakcí právě tehdy, když ono suprémum $\dfrac{1}{c} < 1$, tj. když $c > 1$.

Výsledky 6.5. Protože $\left|f'(x)\right| = \left|\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$, platí, že $\sup\limits_{x \in \langle 0,1 \rangle} \left|f'(x)\right| = \infty$ a f není lipschitzovská na $\langle 0, 1 \rangle$, ale $\sup\limits_{x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle} \left|f'(x)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \infty$ a proto f je lipschitzovská na $\left\langle \dfrac{1}{2}, 1 \right\rangle$.

Výsledky 6.6.

1. $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|f'(x)\right| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |a| = |a| < \infty$, tedy f je lipschitzovská pro libovolné dvojice koeficientů $a, b \in \mathbb{R}$ a kontrakcí pro libovolné dvojice koeficientů $a \in (-1, 1), b \in \mathbb{R}$.
2. $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|f'(x)\right| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\dfrac{1}{1+x^2}\right| = 1 < \infty$, tedy f je lipschitzovská, ale ne kontrakcí.

Výsledky 6.7. Z podmínky, že f musí zobrazovat množinu samu na sebe plyne, že $\left\langle -\dfrac{1}{3}, \dfrac{a^2-1}{3} \right\rangle \subseteq \langle -a, a \rangle$, a tedy $a \in \left\langle \dfrac{1}{3}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \right\rangle$. Dále z podmínky kontrakce plyne $\sup\limits_{x \in \langle -a, a \rangle} \left|f'(x)\right| = \sup\limits_{x \in \langle -a, a \rangle} \left|\dfrac{2x}{3}\right| < 1$, a tedy $a < \dfrac{3}{2}$. Celkem tak musí být $a \in \left\langle \dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$.

Metodou postupných aproximací dostaneme $x_1 = f(x_0) = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = f(x_1) = -\dfrac{8}{27}$ a $x_3 = f(x_2) = -\dfrac{665}{2\,187}$.

Vyřešením kvadratické rovnice pro pevný bod, $\dfrac{x^2-1}{3} = x$, dostane, že pevným bodem bude její kořen $x^\star = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. (Kořen s + není pevným bodem, neb okolo něj již nemáme kontrakci.)

Výsledky 6.8. Vhodným zobrazením na $C[-\delta, \delta]$ je

$$F(f)(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

které je něm kontrakcí pro $0 < \delta < 2$.

Pro počáteční aproximaci $y_0 \equiv 0$ dostaneme $y_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $y_2(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$, atd.,

$$y_n(x) = 1 + 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{6} + \cdots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!},$$

v čemž vidíme Maclaurinův polynom funkce $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, která je zřejmě řešením dané počáteční úlohy (vyřešte pomocí znalostí první třetiny semestru).

Výsledky 6.9. Funkce $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$ je zřejmě kontrakcí na $\mathbb{E}_1$ a její pevný bod splňující rovnici $x = 1 + \frac{x}{2}$ je zřejmě hledanou hmotností.

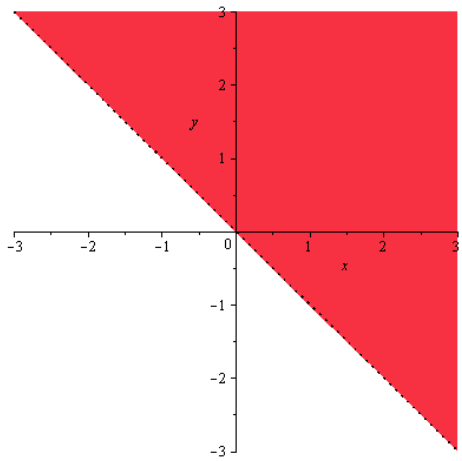
Metodou postupných aproximací pro $x_0 = 1$ dostaneme $x_1 = f(x_0) = \frac{3}{2}$, $x_2 = f(x_1) = \frac{7}{4}$, $x_3 = f(x_2) = \frac{15}{8}$, atd., až nahlédneme (a ideálně i ověříme indukcí), že $x_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} \to 2 = x^\star$, tedy pevný bod našeho zobrazení je $x^\star = 2$, což snadno ověříme vyřešením příslušné lineární rovnice.
Vánočka váží 2 kg.

7 Funkce více proměnných – definiční obor, vrstevnice, graf

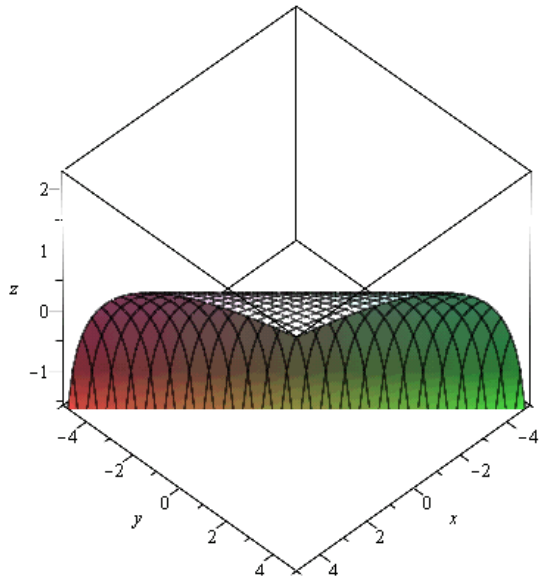
Obrázky tvořeny Maplem, dostupné komplet na webu.

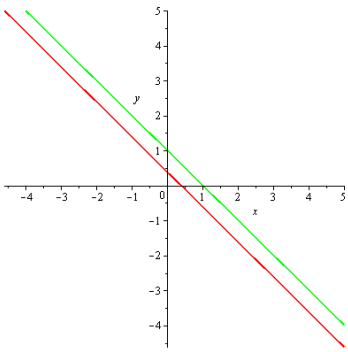
Výsledky 7.1. Kromě definičních oborů a ilustračního grafu zde i vrstevnice a řezy rovinami $x = 0$ a $y = 0$.

1. $f_1(x,y) = \ln(x+y)$

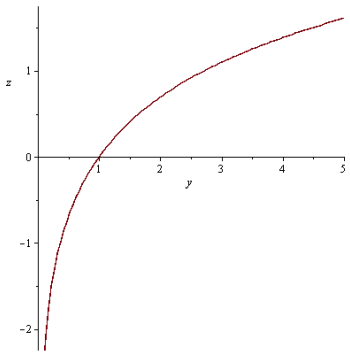


D – otevřená polorovina ($y > -x$)

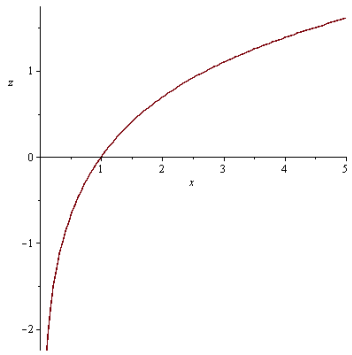




Vrstevnice – přímky
$x + y = \mathrm{e}^c$

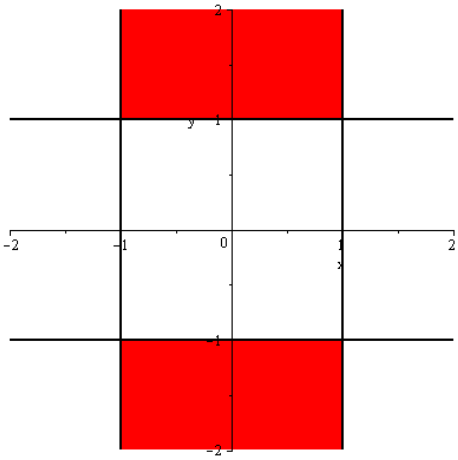


$f(0,y) = \ln y$

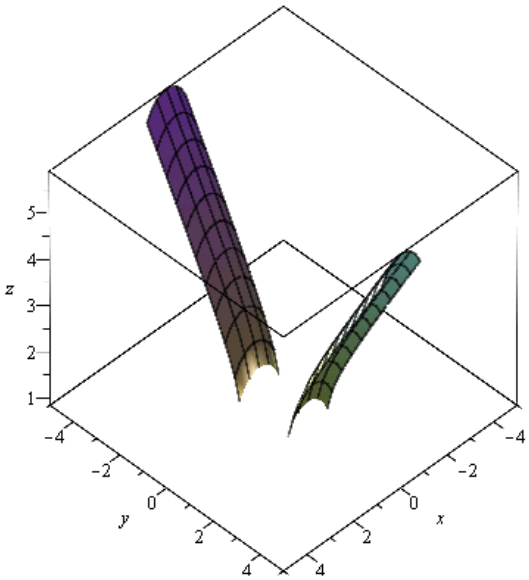


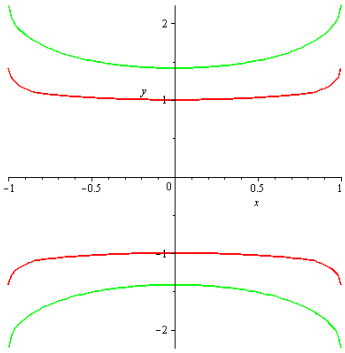
$f(x,0) = \ln x$

2. $f_2(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

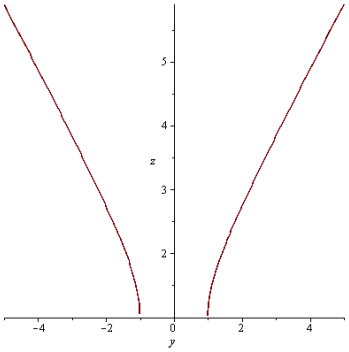


D – uzavřené nekonečné pásky
($|x| \leq 1$ a $|y| \geq 1$)

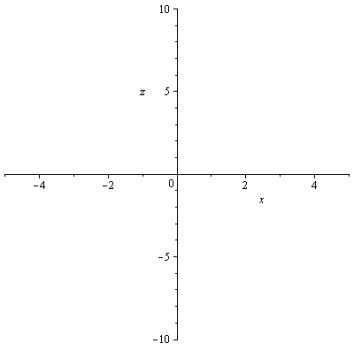




Vrstevnice

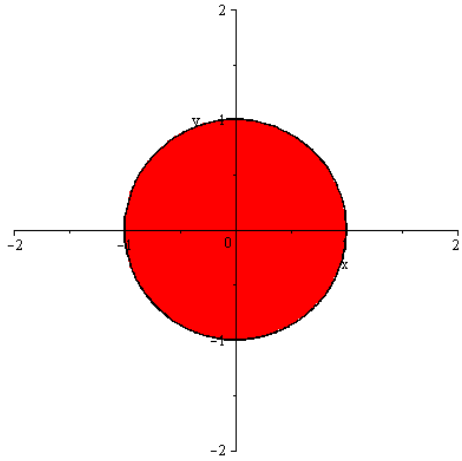


$f(0,y) = 1 + \sqrt{y^2-1}$

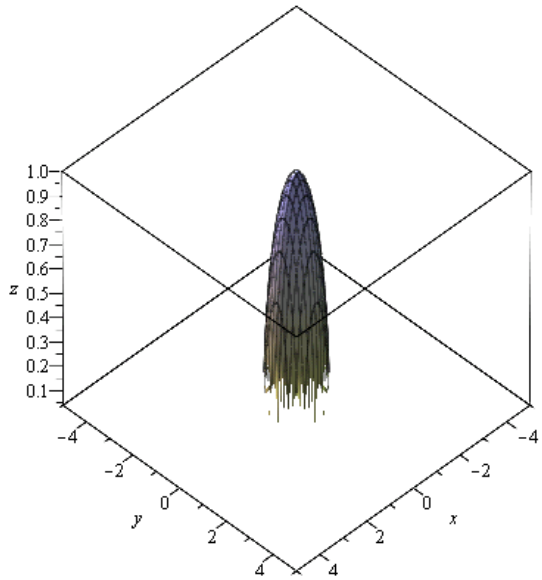


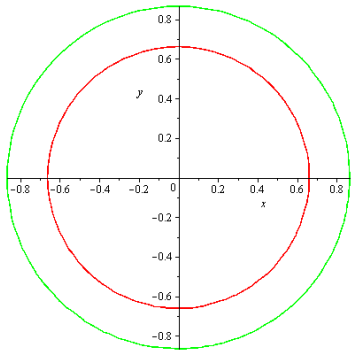
$f(x,0)$ neex.

3. $f_3(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

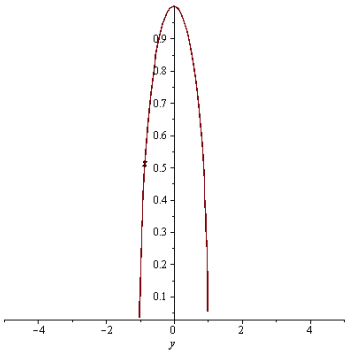


D – kruh $(x^2+y^2 \leq 1)$

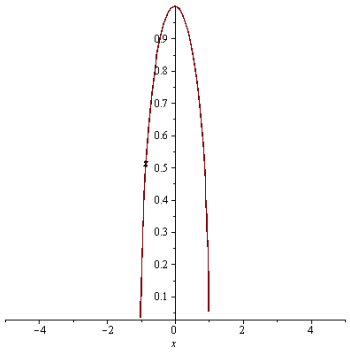




Vrstevnice – kružnice
$x^2+y^2 = 1-c^2,\ c \in \langle 0,1 \rangle$



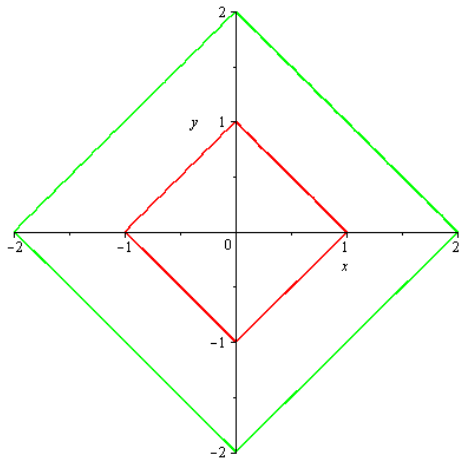
$f(0,y) = \sqrt{1-y^2}$



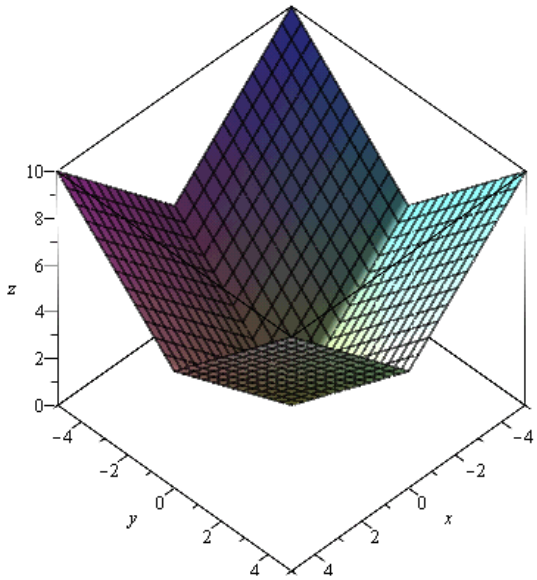
$f(x,0) = \sqrt{1-x^2}$

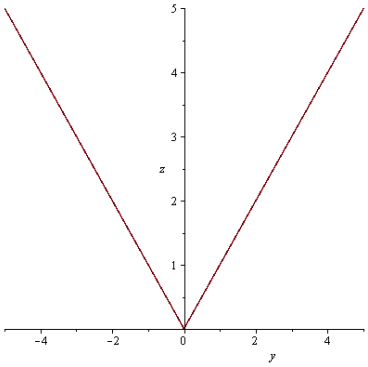
Výsledky 7.2.

1. $f_4(x,y) = |x| + |y|$

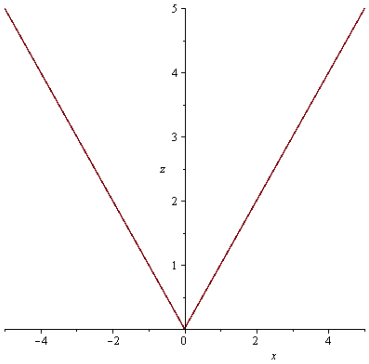


Vrstevnice – čtverce
$|x| + |y| = c$, $c \geq 0$
($c = 1$ a $c = 2$)



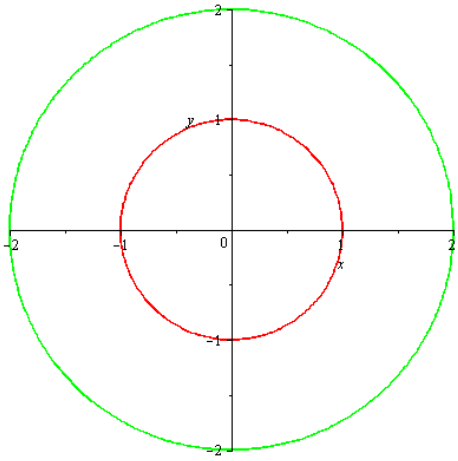


$f(0,y) = |y|$

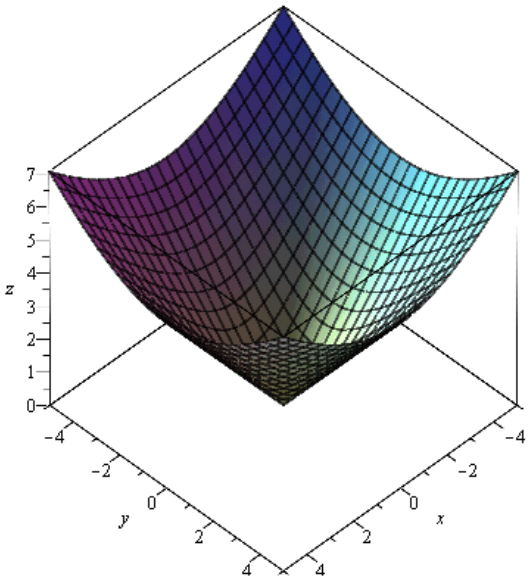


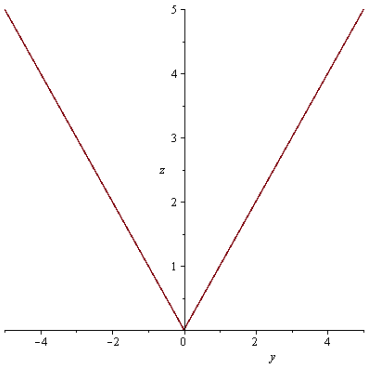
$f(x,0) = |x|$

2. $f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

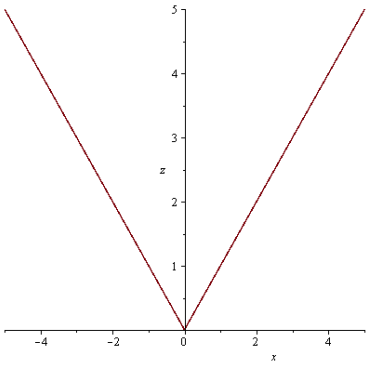


Vrstevnice – kružnice
$x^2+y^2=c^2$, $c \geq 0$
($c=1$ a $c=2$)



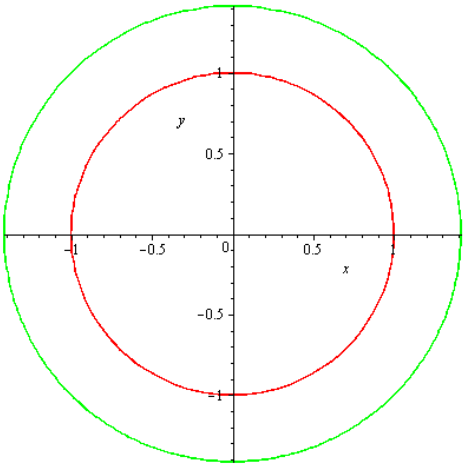


$f(0,y) = |y|$

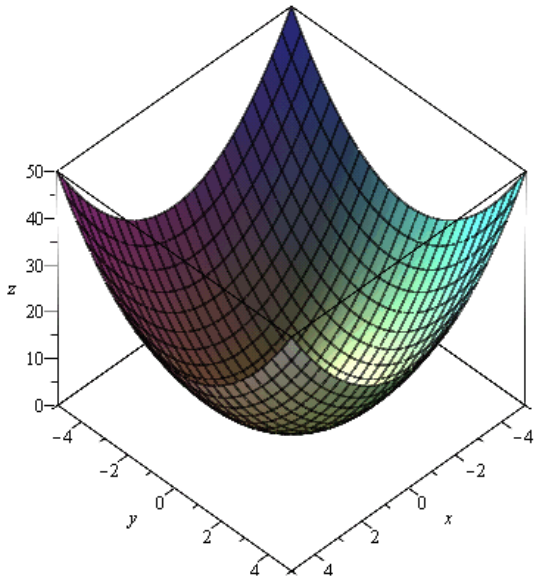


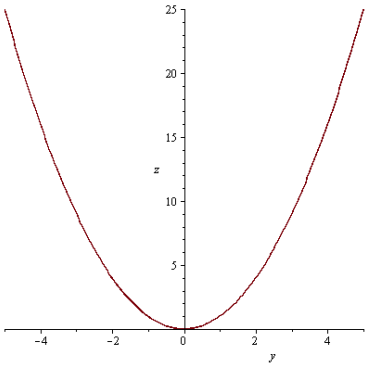
$f(x,0) = |x|$

3. $f_6(x,y) = x^2 + y^2$

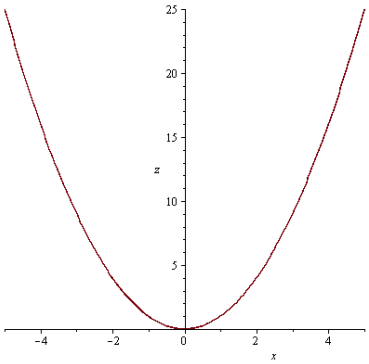


Vrstevnice – kružnice
$x^2 + y^2 = c$, $c \geq 0$
($c = 1$ a $c = 2$)



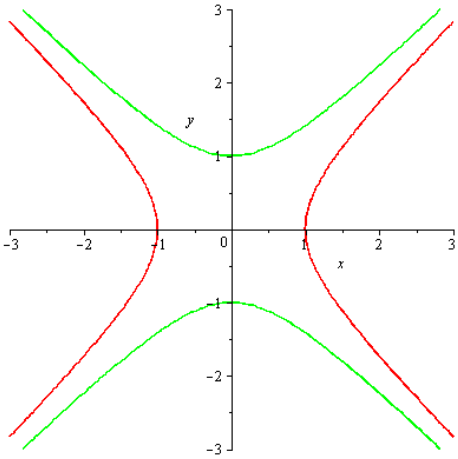


$f(0,y) = y^2$

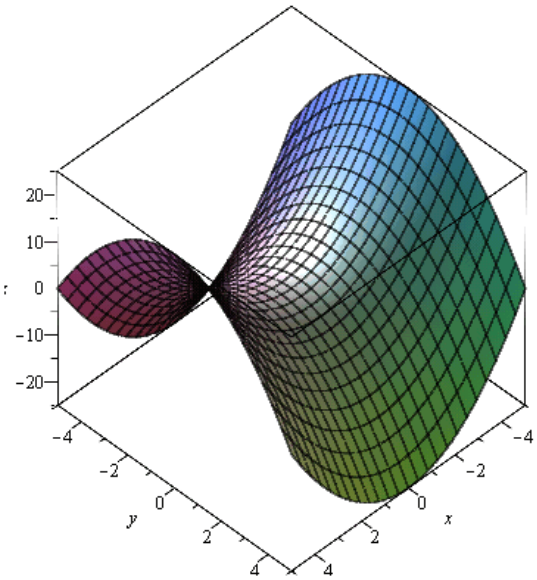


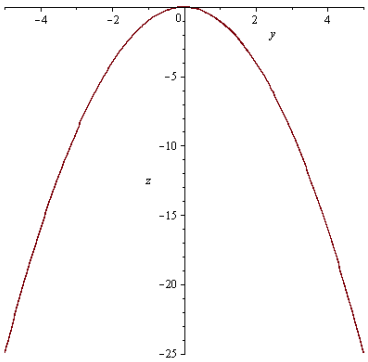
$f(x,0) = x^2$

4. $f_7(x,y) = x^2 - y^2$

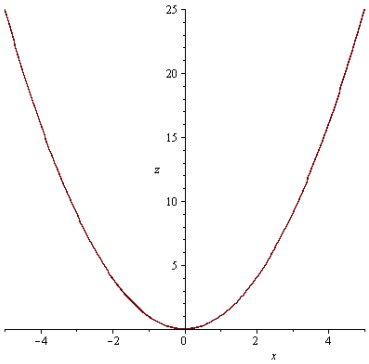


Vrstevnice – rovnoosé hyperboly
$x^2 - y^2 = c$
($c = 1$ a $c = -1$)



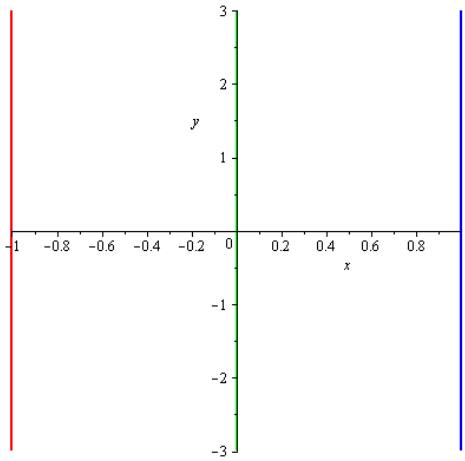


$f(0,y) = y^2$

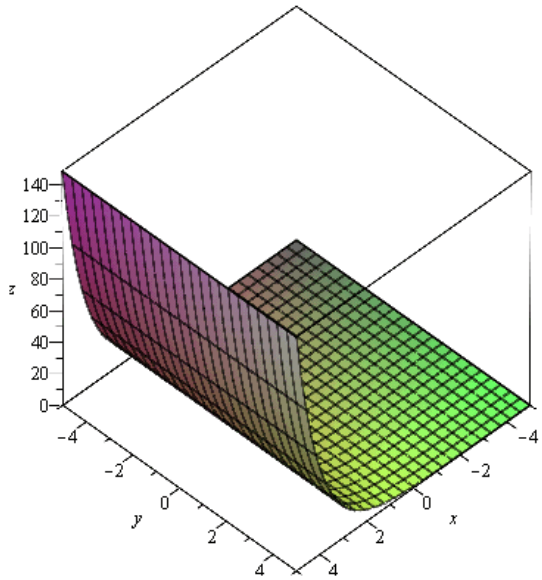


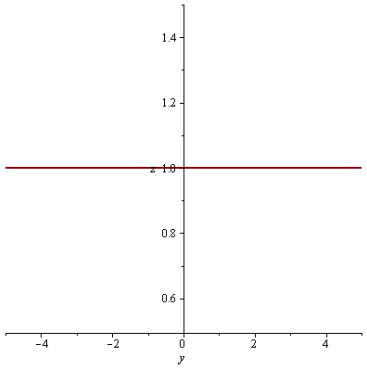
$f(x,0) = x^2$

5. $f_8(x,y) = \mathrm{e}^x$

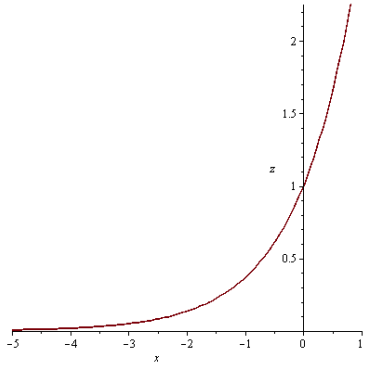


Vrstevnice – přímky
$x = \ln c$, $c > 0$
($c = \frac{1}{\mathrm{e}}$, $c = 1$ a $c = \mathrm{e}$)



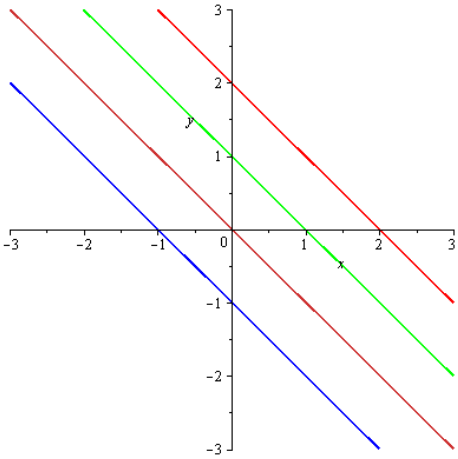


$f(0,y) = 1$

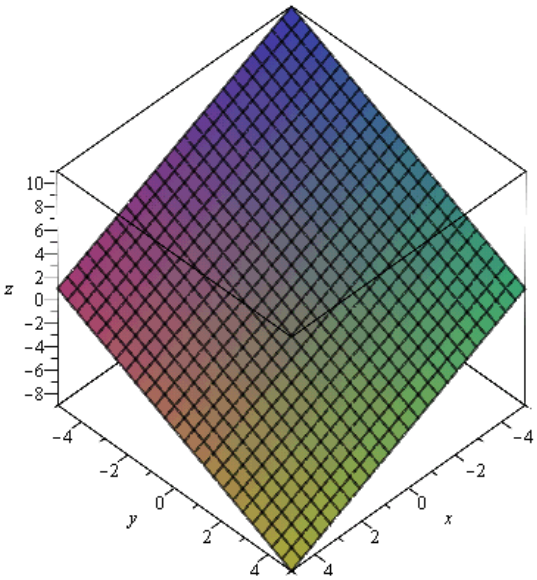


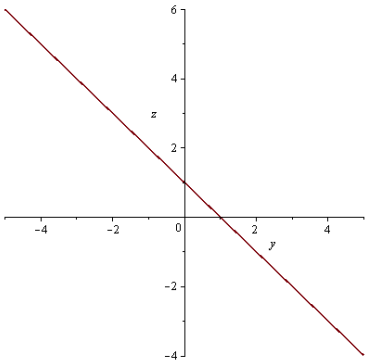
$f(x,0) = \mathrm{e}^x$

6. $f_9(x,y) = 1 - x - y$

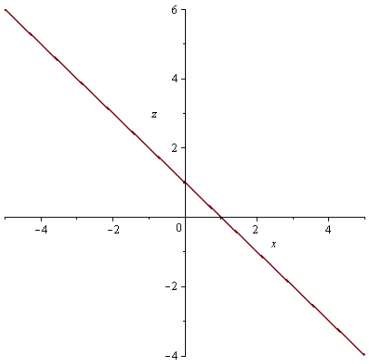


Vrstevnice – přímky
$y = -x + 1 - c$
($c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ a $c = 2$)





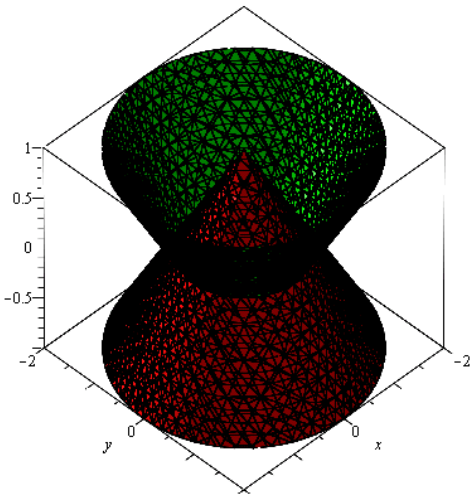
$f(0,y) = 1 - y$



$f(x,0) = 1 - x$

Výsledky 7.3. Definičním oborem je „káča“, prostor tvořený průnikem dvou kuželů

$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 \leq 0 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 - (z+1)^2 \leq 0.$$



8 Limita

Výsledky 8.1. $\forall K > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D(f), |x-1| < \delta \ \wedge\ |y+3| < \delta \ \wedge\ (x,y) \neq (1,-3)$ platí $f(x,y) > K$

Výsledky 8.2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall [x,y] \in D(f), x > \dfrac{1}{\delta} \ \wedge\ |y-3| < \delta$ platí $|f(x,y)-3| < \varepsilon$

Výsledky 8.3. maximová: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D(f), |x-2| < \delta \ \wedge\ |y-4| < \delta \ \wedge\ (x,y) \neq (2,4)$ platí $|f(x,y)+2| < \varepsilon$
součtová: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D(f), 0 < |x-2| + |y-4| < \delta$ platí $|f(x,y)+2| < \varepsilon$
Euklidovská: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D(f), 0 < \sqrt{\{x-2\}^2 + \{y-4\}^2} < \delta$ platí $|f(x,y)+2| < \varepsilon$

Uvědomme si, že u maximové metriky si nemůžeme jako u ostatních vypomoci ostrou nerovností s nulou, neboť $0 < |x-x_0| < \delta \ \wedge\ 0 < |y-y_0| < \delta$ by nevynechalo jenom bod $[x_0, y_0]$, ale celý osový kříž z tohohle bodu, což už samozřejmě význam definice mění.

Výsledky 8.4.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x^2+y}{x^2-y^2} = \frac{1+3}{1-9} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3y-xy} = \left|\left|\frac{0}{0}\right|\right| = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y)+3(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y}{x+3} = \frac{4}{5}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2-3y+4}-2}{x^2-3y} = \left|\left|\frac{0}{0}\right|\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2-3y+4}-2}{x^2-3y} \cdot \frac{\sqrt{x^2-3y+4}+2}{\sqrt{x^2-3y+4}+2} =$
   $\displaystyle= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-3y+4-4}{(x^2-3y)\left(\sqrt{x^2-3y+4}+2\right)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2-3y+4}+2} = \frac{1}{4}$
4. $\displaystyle L_{xy} = \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to0}\frac{-y}{y} = \lim_{y\to0} -1 = -1$
   $\displaystyle L_{yx} = \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to0} 1 = 1$
   Protože $L_{xy} = -1 \neq 1 = L_{yx} \Rightarrow$ limita neexistuje.
5. $\displaystyle L_{xy} = \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{5x^2-3y^2}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{y\to0}\frac{-3y^2}{2y^2} = \lim_{y\to0} -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$
   $\displaystyle L_{yx} = \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{5x^2-3y^2}{x^2+2y^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{5x^2}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$
   Protože $L_{xy} = -\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{5}{2} = L_{yx} \Rightarrow$ limita neexistuje.
6. $\displaystyle L_{xy} = \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to0} 0 = 0$
   $\displaystyle L_{yx} = \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to0} 0 = 0$
   Přesto, že $L_{xy} = L_{yx}$, můžeme zvolit třeba trajektorii $y = x$ (zjednoduší jmenovatel) a dostaneme
   $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \xrightarrow{y=x} \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to0} 1 = 1 \neq 0 = L_{xy} = L_{yx} \Rightarrow$ limita neexistuje

7. $L_{xy} = \lim\limits_{y\to 1}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

   $L_{yx} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

   Přesto, že $L_{xy} = L_{yx}$, můžeme zvolit třeba trajektorie $y = kx^2+1$ (jdou bodem $(0,1)$) a dostaneme

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2} \overset{y=kx^2+1}{\longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k^2} = L(k) \Rightarrow$ limita neexistuje

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\cdot\left[\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right] = ||0\cdot \text{ohr.}|| = 0$

9. Protože počítáme limitu pro $(x,y)\to(\infty,\infty)$, můžeme uvažovat x,y jen jako (velká) kladná. Tedy zřejmě $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \geq 0$. Dále z $(x-y)^2 \geq 0$ lze získat nerovnost $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

   Celkem tak $0 = 0^{x^2} \leq \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$.

   Protože $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} 0 = 0$ a $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$, z Věty o třech limitách dostáváme

   $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0.$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y = 1\cdot a = a$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \left|\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right|\right| \to \lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}} =$

    $= \lim\limits_{\rho\to 0^+}(\cos\varphi+\sin\varphi) = \cos\varphi+\sin\varphi = L(\varphi) \Rightarrow$ limita neexistuje

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \to \left|\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right|\right| \to \lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho\,(\cos\varphi+\sin\varphi) =$

    $= ||0\cdot \text{ohr.}|| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \to \left|\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=1+\rho\sin\varphi\end{matrix}\right|\right| \to \lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\rho^2\cos^2\varphi+(1+\rho\sin\varphi)\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} =$

    $= \lim\limits_{\rho\to 0^+}\left(1+\rho\sin^3\varphi\right) = 1$, neboť $\left|1+\rho\sin^3\varphi-1\right| = \left|\rho\sin^3\varphi\right| \leq \rho \overset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$

    $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = 1$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{(x-2)^2x+2y^2}{(x-2)^2+y^2} \to \left|\left|\begin{matrix} x=2+\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right|\right| \to \lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\rho^2\cos^2\varphi(+\rho\cos\varphi)+\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} =$

    $= \lim\limits_{\rho\to 0^+}\left(2+\rho\cos^3\varphi\right) = 2$, neboť $\left|2+\rho\cos^3\varphi-2\right| = \left|\rho\cos^3\varphi\right| \leq \rho \overset{\rho\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$

    $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{(x-2)^2x+2y^2}{(x-2)^2+y^2} = 2$

15. $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} \to \left\| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\theta \end{matrix} \right\| \to \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\rho\cos\varphi\sin\theta+\rho\sin\varphi\sin\theta+\rho\cos\theta} =$$
$$= \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta} = L(\varphi,\theta) \Rightarrow \text{limita neexistuje}$$

9 Parciální derivace

Výsledky 9.1.

1. $z_x = \sqrt{1-y^2} - \dfrac{xy}{1-x^2}$
   $z_y = \dfrac{xy}{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}$

2. $f_x = y^z x^{y^z-1}$
   $f_y = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}$
   $f_z = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y$

Výsledky 9.2. $z_x = 3(1+\log_y x)^2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln y}, \quad z_x(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \dfrac{12}{\mathrm{e}}$

$z_y = 3(1+\log_y x)^2 \cdot \ln x \cdot \dfrac{-1}{\ln^2 y} \cdot \dfrac{1}{y}, \quad z_y(\mathrm{e},\mathrm{e}) = -\dfrac{12}{\mathrm{e}}$

Výsledky 9.3. $z_x = 1 - \dfrac{1}{y}, \quad z_y = \dfrac{x}{y^2}, \quad z_{xx} = 0, \quad z_{xy} = \dfrac{1}{y^2} = z_{yx}, \quad z_{yy} = -\dfrac{2x}{y^3}$

Výsledky 9.4. $z_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_x(1,0) = 1, \qquad z_y = \dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y(1,0) = 0$

$z_{xx} = -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad z_{xx}(1,0) = -1, \qquad z_{xy} = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad z_{xy}(1,0) = 0$

$$z_{yy} = \frac{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2} - y\left(2y + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}, \quad z_{yy}(1,0) = \frac{1}{2}$$

Výsledky 9.5. Nejprve parciální derivace:

$f_x = 2x\cos y + \dfrac{y}{x}, \; f_y = -x^2 \sin y + \ln x$

Dosadíme do vzorce s gradientem:

$f_{\vec{u}} = 1 f_x + 3 f_y = 2x\cos y + \dfrac{y}{x} - 3x^2 \sin y + 3\ln x$

A vyčíslíme v daném bodě M:

$f_{\vec{u}}\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 + \dfrac{\pi}{2} - 3 + 0 = \dfrac{\pi}{2} - 3$

Pokud bychom šli parametrizací, pak:

$\varphi(t) = f\left(1+t, \dfrac{\pi}{2} + 3t\right) = (1+t)^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3t\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} + 3t\right)\ln(1+t)$

$\dot{\varphi}(t) = 2(1+t)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3t\right) - 3(1+t)^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3t\right) + 3\ln(1+t) + \dfrac{\frac{\pi}{2} + 3t}{1+t}$

$f_{\vec{u}}\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right) = \dot{\varphi}(0) = 0 - 3 + 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 3$

Směrnice tečny potřebuje velikost vektoru:

$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$k_{\vec{u}} = \dfrac{1}{||\vec{u}||} f_{\vec{u}}\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(\dfrac{\pi}{2} - 3\right)$

Výsledky 9.6. $\vec{u} = (\cos 135^\circ, \sin 135^\circ) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \; f_{\vec{u}}(1,2) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Výsledky 9.7.

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = \frac{1}{v} \cdot 2x - \frac{u}{v^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = \frac{1}{v} \cdot (-2y) - \frac{u}{v^2} \cdot 2y = -\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x^2y+2y^3+2x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$
$$= -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Výsledky 9.8.

$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = \left(v \cdot u^{v-1}\right) \cdot y + (u^v \cdot \ln u) \cdot \cos x = \sin x \cdot (xy)^{\sin x - 1} \cdot y + (xy)^{\sin x} \cdot \ln(xy) \cdot \cos x$

$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = \left(v \cdot u^{v-1}\right) \cdot x + (u^v \cdot \ln u) \cdot 0 = \sin x \cdot (xy)^{\sin x - 1} \cdot x$

10 Tečná rovina, diferenciál a Taylorův polynom

Výsledky 10.1.

1. Prvně dešifrujme, že $? = f(x_0, y_0) = f(0,0) = 1$.
   Spočítáme parciální derivace v daném bodě:
   $$f_x = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot 2x \to f_x(0,0) = 0$$
   $$f_y = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot 2y \to f_y(0,0) = 0$$
   Dostaneme rovnici tečné roviny:
   $$\tau\colon z = 1 + 0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0)$$
   $$\tau\colon z = 1$$
   $$\tau\colon z - 1 = 0$$
   Z čehož vidíme normálový vektor $\vec{n} = (0,0,1)$, a můžeme napsat rovnici normály:
   $$n\colon \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

2. $? = f(x_0, y_0) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   Parciální derivace:
   $$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \to f_x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -1$$
   $$f_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \to f_y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -1$$
   Rovnice tečné roviny:
   $$\tau\colon z = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
   $$\tau\colon z = -x - y + \frac{3}{\sqrt{3}}$$
   $$\tau\colon x + y + z - \sqrt{3} = 0$$
   Normálový vektor $\vec{n} = (1,1,1)$, rovnice normály, která se pak dá i upravit:
   $$n\colon \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}} + t \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}} + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}} + t \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} x &= t \\ y &= t \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= t \end{aligned}$$

Výsledky 10.2.

1. $\mathrm{d}f = \frac{1}{25}\mathrm{d}x - \frac{25}{\mathrm{d}y}$
2. $\mathrm{d}f = 4\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

Výsledky 10.3. Pomocí $f(x,y) = \ln\frac{x}{y}$ v bodě $[1,1]$.

$$\ln\frac{0{,}97}{1{,}05} \doteq 0 + 1 \cdot (-0{,}03) - 1 \cdot 0{,}05 = -0{,}08$$

Výsledky 10.4.

1. kmenová funkce $F(x,y) = x^2 + xy + y + c$, obecné řešení $x^2 + xy + y + c = 0$
2. kmenová funkce $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + c$, obecné řešení $\frac{1}{2}x^2y^2 + c = 0$, resp. $y = \frac{k}{x}$
3. integrační faktor $R(x) = x$, poté kmenová funkce $F(x,y) = x^2y + c$, obecné řešení $x^2y + c = 0$, resp. $y = \frac{k}{x^2}$
4. integrační faktor $R(y) = \frac{1}{y^3}$, poté kmenová funkce $F(x,y) = \frac{x^3}{y^3} + x + \frac{5}{y} + c$, obecné řešení $\frac{x^3}{y^3} + x + \frac{5}{y} + c = 0$