Kapitola 3

SHODNÁ A PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

V této kapitole budeme studovat zobrazení na euklidovských bodových prostorech. Připomeňme, že euklidovský bodový prostor je afinní prostor, na jehož zaměření je dán skalární součin.

3.1 Shodná zobrazení

V této části skript definujeme shodné zobrazení mezi euklidovskými prostory a ukážeme, že je to afinních zobrazení. Základním pojmem, který je nutný pro definici shodného zobrazení, je vzdálenost bodů, která je dána

$$|XY| = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY})}\,.$$

Definice 3.1.1. Zobrazení f euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathcal{E}'_m$ se nazývá *shodné zobrazení* (*izometrické zobrazení*), jestliže zachovává vzdálenosti bodů, t.j. pro každé dva body body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ platí

$$|f(X)f(Y)| = |XY|\,.$$

Poznámka 3.1.1. Je třeba si uvědomit, že vzdálenosti v $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}'_m$ jsou obecně definovány různým způsobem. $\diamondsuit$

Příklad 3.1.1. Ze střední školy známe celou řadu shodných zobrazení v euklidovské rovině či prostoru, např. posunutí, otáčení (kolem středu či přímky), středovou symetrii, osovou symetrii a symetrii podle roviny (zrcadlení). $\heartsuit$

Věta 3.1.1. *Každé shodné zobrazení je prosté.*

Důkaz. Pro libovolné dva body $B, C \in \mathcal{E}_n$ takové, že $B \neq C$ je $|BC| \neq 0$, potom ale $|BC| = |f(B)f(C)| \neq 0$, a tedy $f(B) \neq f(C)$. $\square$

Poznámka 3.1.2. Z definice je zřejmé, že zúžení shodného zobrazení na podprostor euklidovsakého prostoru je opět shodné zobrazení. Dále, jsou-li $f : \mathcal{E}_n to \mathcal{E}'_m$ a $g : \mathcal{E}'_m \to \mathcal{E}''_k$ shodná zobrazení, je i jejich složení $g \circ f$ shodné zobrazení. $\diamondsuit$

Věta 3.1.2. *Každé shodné zobrazení je afinní zobrazení, t.j. tři různé kolineární body zobrazí na tři různé kolineární body a zachová jejich dělící poměr.*

Důkaz. Nechť jsou dány libovolné tři různé kolineární body body $B, C, D \in \mathcal{E}_n$ takové, že $0 > \lambda = (D; B, C)$, t.j. D leží mezi body B, C. Potom $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{CD}$ a tedy $|BD| = |\lambda|\,|CD|$. Protože D leží mezi body B, C je $|BD| + |DC| = |BC|$ a pro shodné zobrazení f dostaneme $|f(B)f(D)| + |f(D)f(C)| = |f(B)f(C)|$, to ale znamená, že body $f(B), f(C), f(D)$ jsou kolineární a $f(D)$ leží mezi body $f(B), f(C)$, tedy také dělící poměr $\lambda' = (f(D); f(B), f(C))$ je záporné číslo. Potom $\overrightarrow{f(B)f(D)} = \lambda' \overrightarrow{f(C)f(D)}$, a tedy $|f(B)f(D)| = |\lambda'|\,|f(C)f(D)|$. Z rovností $|f(B)f(D)| = |BD|$ a $|f(C)f(D)| = |CD|$ tak dostaneme $|\lambda| = |\lambda'|$ a protože jsou obě hodnoty záporné je $\lambda = \lambda'$. $\square$

Shodná zobrazení tedy mají všechny vlastnosti afinních zobrazení. Např. zobrazují podprostory na podprostory a přitom zachovávají rovnoběžnost podprostorů. Protože je shodné zobrazení prosté, je $n \leq m$. Dále ke shodnému zobrazení můžeme definovat asociované lineární zobrazení předpisem $\varphi_f(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Pomocná věta 3.1.3. *Asociované lineární zobrazení shodného zobrazení zachovává velikost vektorů, t.j. pro každý vektor* $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$ *platí*

$$\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|\,.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{BC}$, potom máme

$$\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = \|\overrightarrow{f(B)f(C)}\| = |f(B)f(C)| = |BC| = \|\mathbf{u}\|\,. \qquad \square$$

Věta 3.1.4. *Asociované lineární zobrazení shodného zobrazení zachovává skalární součin vektorů, t.j. pro všechny vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$ *platí*

$$(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})\,,$$

t.j. φ_f *je ortogonální lineární zobrazení z* $Z(\mathcal{E}_n)$ *do* $Z(\mathcal{E}'_m)$.

Důkaz. Z vlastností skalárního součinu dostáváme

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{v},\mathbf{v})\,,$$

t.j.

$$2\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\,.$$

Aplikací této rovnosti na vektory $\varphi_f(\mathbf{u})$ a $\varphi_f(\mathbf{v})$ a z Pomocné věty 3.1.3 dostaneme

$$\begin{aligned} 2\,(\varphi_f(\mathbf{u}),\varphi_f(\mathbf{v})) &= \|\varphi_f(\mathbf{u})+\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\varphi_f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

□

Asociované ortogonální lineární zobrazení je jednoznačně určeno shodným zobrazením. Naopak platí

Věta 3.1.5. *Nechť je dáno ortogonální lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ a body $B \in \mathcal{E}_n, B' \in \mathcal{E}'_m$. Pak existuje jediné shodné zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f(B) = B'$ a $\varphi_f = \varphi$.*

Důkaz. Podle Věty 2.1.3 existuje jediné afinní zobrazení daných vlastností určené

$$f(X) = B' + \varphi(\overrightarrow{BX})\,. \tag{3.1.1}$$

Ukážeme, že (3.1.1) je shodné zobrazení. Máme

$$|f(X)f(Y)| = \|\overrightarrow{f(X)f(Y)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{XY})\| = \|\overrightarrow{XY}\| = |XY|\,.$$

□

Věta 3.1.6. *Nechť je dáno $(n+1)$ bodů v obecné poloze $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{E}_n$ a body $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ takové, že*

$$|P_iP_j| = |P'_iP'_j|\,, \qquad i,j = 0,\ldots,n\,. \tag{3.1.2}$$

Pak existuje jediné shodné zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f(P_i) = P'_i$ pro všechna $i = 0,\ldots,n$.

Důkaz. Protože jsou body $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{E}_n$ v obecné poloze, jsou vektory $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n} \in Z(\mathcal{E}_n)$ lineárně nezávislé. Podmínka (3.1.2) znamená, že i body $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ jsou v obecné poloze, a tedy i vektory $\overrightarrow{P'_0P'_1}, \ldots, \overrightarrow{P'_0P'_n} \in Z(\mathcal{E}'_m)$ jsou lineárně nezávislé. Podle Věty 1.1.2 existuje jediné lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ takové, že $\varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{P'_0P'_i}$.

Navíc platí $\|\varphi(\overrightarrow{P_0P_i})\| = \|\overrightarrow{P_0P_i}\|$, a tedy φ je ortogonální zobrazení. Podle Věty 3.1.5 je zobrazení

$$f(X) = P_0' + \varphi(\overrightarrow{P_0X})$$

shodné zobrazení a snadno se vidí, že $f(P_i) = P_i'$. □

Důsledek 3.1.1. Shodné zobrazení z euklidovské roviny je určeno obrazy vrcholů libovolného trojúhelníka na vrcholy s ním shodného trojúhelníka. ◇

Vyjádření shodného zobrazení v souřadnicích je stejné, jako u afinních zobrazení. Musíme si jen uvědomit, že v euklidovských bodových prostorech používáme kartézské repéry a souřadnice. Mějme tedy kartézský repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{E}_n$ a kartézský repér $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{E}_m'$ a nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m'$ je shodné zobrazení. Zvolíme-li $Q = f(P)$, $\mathbf{d}_i = \varphi_f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$, potom stejně jako ve Větě 2.2.3 dostaneme souřadnicové vyjádření f ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\,, & x_{n+1}' &= 0\,, \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n' &= x_n\,, & x_m' &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

V souřadnicích je to tedy kanonické vložení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, kde $\mathbb{R}^k$ chápeme jako euklidovský bodový prostor.

Pokud je repér $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{E}_m'$ obecný, nezávislý na repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{E}_n$, dostaneme vyjádření f ve tvaru

$$x_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j\,,\; j = 1, \dots, m\,, \tag{3.1.4}$$

který budeme častěji psát maticově

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.1.5}$$

nebo symbolicky

$$(f(X)) = A(X) + B\,. \tag{3.1.6}$$

Matice A je ovšem matice asociovaného ortogonálního lineárního zobrazení a tedy podle Části 1.4 splňuje podmínku $A^T A = E_n$.

Nechť je naopak dána matice A typu m/n taková, že $A^T A = E_n$, t.j. $\sum_{j=1}^m a_{ji}\, a_{jk} = \delta_{ik}$, $\delta_{ik} = 1, i = k, \delta_{ik} = 0, i \neq k$, a nechť B je libovolná matice typu $m/1$. Ukážeme, že zobrazení

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \, , \, j = 1, \ldots, m \tag{3.1.7}$$

je shodné. Máme

$$\begin{aligned}
|X'Y'|^2 &= \sum_{j=1}^{m} (y'_j - x'_j)^2 = \sum_{j=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\,(y_i - x_i)\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ji}\,(y_i - x_i)\, a_{jk}\,(y_k - x_k) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} (y_i - x_i)\,(y_k - x_k) \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, a_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 = |XY|^2 \, .
\end{aligned}$$

Je tedy zobrazení (3.1.7) shodné.

Můžeme tedy předchozí úvahy shrnout do následující věty.

Věta 3.1.7. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je afinní zobrazení, které má v kartézských souřadnicích na $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}'_m$ vyjádření $(f(X)) = A(X) + B$. Potom f je shodné zobrazení právě tehdy, když matice A splňuje podmínku $A^T A = E_n$.*

Úloha 3.1.1. Zobrazení $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$ je dáno obrazy bodů P, A, B. Určete rovnice zobrazení a zjistěte, zda se jedná o shodné zobrazení. Co je $Im(f)$?

$$P = [0,0], A = [1,0], B = [0,1]$$

$$P' = [1,3,-2],$$

$$A' = \left[1, \tfrac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right], B' = \left[\tfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \tfrac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right].$$

Řešení: Označme

$$X = [x,y] \in \mathcal{E}_2, \; f(X) = X' = [x', y', z'] \in \mathcal{E}_3 \, ,$$

$$A' - P' = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), B' - P' = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Rovnice zobrazení je $(X') = A(X) + P'$, tedy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení je shodné pro $A^T A = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnice obrazu $\mathcal{E}_2$ má v $\mathcal{E}_3$ parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= 1 & & +\tfrac{1}{\sqrt{3}}s\,, \\ y &= 3 & +\tfrac{1}{\sqrt{2}}t & +\tfrac{1}{\sqrt{3}}s\,, \\ z &= -2 & +\tfrac{1}{\sqrt{2}}t & -\tfrac{1}{\sqrt{3}}s\,. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme s a dosadíme do zbývajících dvou rovnic, dostaneme $s = \sqrt{3}(x-1)$ a

$$y = 3 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t + (x-1)\,, \quad z = -2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t - (x-1)\,.$$

Vyloučením parametru t dostaneme $y - 3 - x + 1 = z + 2 + x - 1$. Obecné vyjádření $Im(f)$ je tedy

$$\rho \equiv 2x - y + z + 3 = 0\,.$$

3.2 Shodnosti, grupa shodností

V této části budeme uvažovat shodná zobrazení na euklidovském prostoru. Protože je shodné zobrazení prosté, je shodné zobrazení euklidovského prostoru na sebe bijekcí. Protože je každé shodné zobrazení afinní, je shodnost afinita na euklidovském prostoru. Na euklidovském prostoru můžeme uvažovat libovonou afinitu. Objasněme nejdříve, jaký je geometrický význam ekviafinních zobrazení. Připomeňme, že ekviafinní zobrazení jsou afinity s modulem ± 1.

Věta 3.2.1. *Ekviafinní zobrazení euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ zachovává objemy.*

Důkaz. Uvažujme v $\mathcal{E}_n$ n-rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{R}(A; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Jeho objem je dán absolutní hodnotou vnějšího součinu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$. Afinita f zobrazí rovnoběžnostěn na rovnoběžnostěn $\mathcal{R}'(f(A); \varphi_f(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi_f(\mathbf{u}_n))$. Jeho objem je potom absolutní hodnota vnějšího součinu $[\varphi_f(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi_f(\mathbf{u}_n)]$. V kartézských souřadnicích je vnější součin určen determinantem matice, v jejichž sloupcích jsou souřadnice daných vektorů. Je-li potom f určeno v souřadnicích $(X') = A(X)+B$, je $[\varphi_f(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi_f(\mathbf{u}_n)] = [A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)] = |A| \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$, a tedy rovnoběžnostěny $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ mají stejný objem právě tehdy, je-li absolutní hodnota determinantu $|A|$ rovna jedné, t.j. $m(f) = \pm 1$ a f je ekviafinní zobrazení. □

Definice 3.2.1. Shodné zobrazení f euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ na sebe se nazývá *shodnost* (*izometrie*) $\mathcal{E}_n$.

Věta 3.2.2. *Shodná zobrazení euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ tvoří grupu, tzv. grupu shodností $\mathfrak{S}_n$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Složením dvou shodností je shodnost. Z definice shodného zobrazení se snadno vidí, že inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost. □

Poznámka 3.2.1. Grupa shodností na $\mathcal{E}_n$ je podgrupou grupy ekviafinních zobrazení na $\mathcal{E}_n$. T.j. $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{E}_n \subset \mathfrak{A}_n$. ♢

Poznámka 3.2.2. Lineární zobrazení asociované ke shodnosti je ortogonální transformace na zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$. V libovolných kartézských souřadnicích je tedy matice shodnosti ortonormální matice, t.j. modul shodnosti je ± 1. Je-li $m(f) = 1$ hovoříme o přímé shodnosti, je-li $m(f) = -1$ hovoříme o nepřímé shodnosti. Z Části 1.4 vyplývá, že vlastní hodnoty shodnosti jsou pouze čísla ± 1, prostor vlastních směrů, který odpovídá vícenásobné vlastní hodnotě má dimenzi rovnu násobnosti vlastní hodnoty a vlastní směry, které odpovídají různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé. ♢

Poznámka 3.2.3. Ortogonální transformace na $Z(\mathcal{E}_n)$ asociovaná se shodností zobrazuje ortonormální bázi $Z(\mathcal{E}_n)$ na jinou ortonormální bázi. Rovnice

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad A^T A = E_n \,,$$

tedy můžeme chápat dvojím způsobem. Buď jako vyjádření souřadnic obrazu X bodu X (obojí souřadnice vzhledem k témuž kartézskému repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{E}_n$) nebo jako vyjádření transformace souřadnic téhož bodu X při přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\mathcal{R}' = \langle f(P); \varphi_f(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n) \rangle$.
$\diamondsuit$

Úloha 3.2.1. Určete rovnice shodnosti $h : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, která zobrazuje bod $A = [0,1]$ do bodu $A' = [\frac{1}{5}, \frac{13}{5}]$ a bod B=[3,1] do bodu $B' = [2,5]$.
Řešení: Jde skutečně o shodnost v E_2, neboť

$$\overrightarrow{AB} = (3,0), \ |AB| = \|\overrightarrow{AB}\| = 3\,.$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (\tfrac{9}{5}, \tfrac{12}{5}), \ |A'B'| = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{\tfrac{81}{25} + \tfrac{144}{25}} = \sqrt{\tfrac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Uvažujme rovnice h ve tvaru

$$x' = ax + by + p\,, \qquad y' = cx + dy + q\,.$$

Aby h bylo shodností pro všechny body $\mathcal{E}_2$, musí být matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonální. To znamená, že musí platit $A^T A = E$. Tedy

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To je ekvivalentní soustavě rovnic

$$a^2 + c^2 = 1\,, \quad b^2 + d^2 = 1\,, \quad ab + cd = 0\,.$$

Současně $\varphi_h(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, t.j. $3a = \frac{9}{5}, 3c = \frac{12}{5}$, takže $a = \frac{3}{5}$, $c = \frac{4}{5}$. Dosazením do předchozích rovnic dostaneme dvě možnosti

$$b_1 = -\frac{4}{5}, \ \ d_1 = \frac{3}{5}; \qquad b_2 = \frac{4}{5}, \ \ d_2 = -\frac{3}{5}.$$

Ověříme, zda v obou případech je matice ortogonální. Opravdu

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad A_1^T A_1 = E_2\,, \quad \|A_1| = 1\,,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad A_2^T A_2 = E_2\,, \quad \|A_2| = -1.$$

Pro matici A_1 dostaneme

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y + p\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + q\,.$$

Po dosazení bodu B a jeho obrazu B' dostaneme $p = 1$ a $q = 2$. Rovnice shodnosti pro matici A_1 tedy jsou

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y + 1\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + 2\,.$$

Pro matici A_2 dostaneme

$$x' = \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y + p\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y + q\,.$$

Po dosazení bodu B a jeho obrazu B' dostaneme $p = -\frac{3}{5}$ a $q = \frac{16}{5}$. Rovnice shodnosti pro matici A_1 tedy jsou

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y - \tfrac{3}{5}\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + \tfrac{16}{5}\,.$$

3.3 Souměrnosti podle podprostorů

Uvažujme nyní v $\mathcal{E}_n$ podprostor ϱ, $0 \leq \dim \varrho = k < n$. Podle skript [JaHo] lze z libovolného bodu X prostoru spustit na ϱ právě jednu kolmici, která protne ϱ v bodě X_0 (pata kolmice). Uvažujme zobrazení, které zobrazí bod X na bod X' takový, že X_0 je středem úsečky XX'. Je zřejmé, že toto zobrazení je bijekce na $\mathcal{E}_n$ a body v ϱ jsou samodružné. Ukážeme, že toto zobrazení je shodnost. Stačí tedy ověřit $|XY| = |X'Y'|$ pro libovolné body X, Y. Rovnost stačí ověřit v libovolně vhodně zvolených kartézských souřadnicích. Zvolme kartézský repér tak, aby měl podprostor ϱ obecné vyjádření

$$\varrho : x_{k+1} = 0\,, \ldots, x_n = 0\,.$$

Potom pro libovolný bod $X = [x_1; \ldots; x_n]$ je pata komice spuštěná z X na ϱ bod $X_0 = [x_1; \ldots; x_k; 0; \ldots; 0]$ a bod $X' = [x_1; \ldots; x_k; -x_{k+1}; \ldots; -x_n]$. Je tedy dané zobrazení dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\,, & x'_{k+1} &= -x_{k+1}\,,\\ &\ \vdots & &\ \vdots\\ x'_k &= x_k\,, & x'_n &= -x_n\,, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

t.j. je to afinní zobrazení. Snadno se vidí, že pro body $X = [x_1; \ldots; x_n]$ a $Y = [y_1; \ldots; y_n]$ a jejich obrazy $X' = [x_1; \ldots; x_k; -x_{k+1}; \ldots; -x_n]$ a $Y' =$

$[y_1; \ldots; y_k; -y_{k+1}; \ldots; -y_n]$ platí $|X'Y'| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = |XY|$ a jde o shodnost.

Definice 3.3.1. Nechť ϱ, $0 \leq \dim \varrho = k < n$ je podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$. Shodnost, která zobrazí každý bod X z $\mathcal{E}_n$ na bod X' z $\mathcal{E}_n$ takový, že střed úsečky XX' je pata kolmice spuštěné z X na ϱ, se nazývá *symetrie (souměrnost)* $\mathcal{E}_n$ podle podprostoru ϱ.

Je-li $\dim \varrho = 0$ (jde o bod R) hovoříme o *středové symetrii (souměrnosti)*. Bod R se nazývá *střed symetrie (souměrnosti)*.

Je-li $\dim \varrho = 1$, respektive $\dim \varrho = 2$, respektive $\dim \varrho = n - 1$, hovoříme o *symetrii (souměrnosti) podle přímky* (také *osová symetrie (souměrnost)*), respektive roviny, respektive nadroviny. V případě osové symetrie se přímka nazývá *osa symetrie (souměrnosti)*.

Poznámka 3.3.1. Souměrnosti podle nadrovin mají jako množinu samodružných bodů nadrovinu. Jedná se tedy o základní afinity, které hrají významnou roli, protože podle Věty 2.6.6 je každá afinita složením nejvýše $(n + 1)$ základních afinit. Podobnou roli budou hrát i souměrnosti podle nadrovin. ♢

Věta 3.3.1. *Nechť v nějakém kartézském repéru $\mathcal{R}$ na euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ je dána nadrovina $\varrho : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, $(a_1; \ldots; a_n) \neq (0; \ldots; 0)$. Potom rovnice souměrnosti podle nadroviny ϱ jsou tvaru*

$$x_i' = x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,. \tag{3.3.2}$$

Důkaz. Souměrnost podle nadroviny ϱ je základní afinita, a tedy podle Věty 2.6.8 má rovnice tvaru

$$x_i' = x_i + \lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,.$$

Podmínka, že střed usečky XX' leží v ϱ je tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i' + x_i}{2} + a = 0\,, \tag{3.3.3}$$

t.j.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) + 2\,(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = 0\,. \tag{3.3.4}$$

Podobně podmínka, že $\overrightarrow{XX'} \perp \varrho$ je tvaru

$$x_i' - x_i = k\,a_i\,, \tag{3.3.5}$$

t.j.

$$\lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = k\,a_i\,, \tag{3.3.6}$$

Dosazením (3.3.6) do (3.3.4) dostaneme

$$k\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\,(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = 0\,, \tag{3.3.7}$$

t.j.

$$k = -\frac{2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,. \tag{3.3.8}$$

Z (3.3.8) a (3.3.5) potom plyne (3.3.2). □

Souměrnost podle nadroviny je dána nadrovinou souměrnosti. Pro její určení již nepotřebujeme obraz žádného bodu (koeficienty λ_i jsou dány jen koeficienty z rovnice nadroviny symetrie). Naopak, zadáme-li dva různé body B a B', potom existuje jediná souměrnost podle nadroviny (t.j. jediná nadrovina), která zobrazí B na B'. Opravdu, nadrovina souměrnosti bodů B a B' je jediná nadrovina, která je kolmá na vektor $\overrightarrow{BB'}$ a prochází středem úsečky BB'.

Věta 3.3.2. *Ke každé shodnosti f na euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ existuje nejvýše $(n+1)$ souměrností podle nadrovin takových, že f je jejich složením.*

Důkaz. Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ je shodnost. Zvolme v $(n+1)$ bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ v obecné poloze, potom i body $P_i' = f(P_i)$ jsou v obecné poloze.

Pokud $P_0 \neq P_0'$, určíme nadrovinu symetrie ρ_1 bodů P_0 a P_0'. Označme jako f_1 symetrii podle nadroviny ρ_1 a $f_1(P_i) = P_{1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokud $P_0 = P_0'$ tento krok vynecháme (jako f_1 bereme identitu).

Pokud $P_{1,1} \neq P_1'$, určíme nadrovinu symetrie ϱ_2 bodů $P_{1,1}$ a P_1'. Ukážeme, že bod $P_0' \in \varrho_2$, t.j. že platí $|P_0'P_{1,1}| = |P_0'P_1'|$. Ale $|P_0'P_{1,1}| = |P_0P_1|$ protože jsou to obrazy v symetrii f_1. Podobně $|P_0'P_1'| = |P_0P_1|$ protože jsou to obrazy ve shodnosti f. V symetrii f_2 podle ϱ_2 je tedy P_0' samodružný, $P_{1,1}$ se zobrazí na P_1' a $P_{1,i}$ se zobrazí na $P_{2,i}$, $i = 2, \ldots, n$. Pokud $P_{1,1} = P_1'$ tento krok vynecháme (jako f_2 bereme identitu).

Pokud $P_{2,2} \neq P_2'$, určíme nadrovinu symetrie ϱ_3 bodů $P_{2,2}$ a P_2'. Ukážeme, že body $P_0', P_1' \in \varrho_3$, t.j. že platí $|P_0'P_{2,2}| = |P_0'P_2'|$ a $|P_1'P_{2,2}| = |P_1'P_2'|$.

Ale $|P_0'P_{2,2}| = |P_0P_1|$ protože jsou to obrazy ve složení symetrií $f_2 \circ f_1$. Podobně $|P_0'P_2'| = |P_0P_1|$ protože jsou to obrazy ve shodnosti f. Totéž platí i pro bod P_1'. V symetrii f_3 podle ϱ_3 jsou tedy body P_0', P_1' samodružné, $P_{2,2}$ se zobrazí na P_2' a $P_{2,i}$ se zobrazí na $P_{3,i}$, $i = 3, \ldots, n$. Pokud $P_{2,2} = P_2'$ tento krok vynecháme (jako f_3 bereme identitu).

Dále pokračujeme analogicky až do $(n+1)$-ního kroku. Výsledek shrneme v tabulce

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & f_1 & & f_2 & & f_3 & & f_n & & f_{n+1} & \\
P_0 & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0'; \\
P_1 & \longrightarrow & P_{1,1} & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & P_1'; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-1,1} & \longrightarrow & P_{n-1,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n-1}' & \longrightarrow & P_{n-1}'; \\
P_n & \longrightarrow & P_{n,1} & \longrightarrow & P_{n,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n,n} & \longrightarrow & P_n'.
\end{array}
$$

Každé zobrazení f_i je symetrie podle nadroviny nebo identita. Složením $f_{n+1} \circ \cdots \circ f_1$ dostaneme původní shodnost f. □

Poznámka 3.3.2. Narozdíl od rozkladu afinity na základní afinity nemáme při výběru souměrnosti podle nadrovin volbu. Jediná volba je volba bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ v obecné poloze a jejich pořadí. Je výhodné mezi body P_i zařadit maximální počet samodružných bodů. ♢

Poznámka 3.3.3. Souměrnost podle nadroviny je nepřímá shodnost. Složení dvou souměrností podle různých nadrovin je tak přímá shodnost. Máme dvě možnosti.

Jsou-li obě nadroviny symetrie rovnoběžné, dostaneme shodnost, která nemá žádný samodružný bod. Je to posunutí ve směru kolmém na obě nadroviny o vektor velikosti dvojnásobku vzdáleností nadrovin. Jeho orientace závisí na pořadí, v jakém souměrnosti skládáme. Tato situace se snadno konstrukčně vidí v rovině. V prostoru obecné dimenze odvodíme toto tvrzení alalyticky. Opravdu, jsou-li ρ a σ dvě různé rovnoběžné roviny, máme $\rho : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ a $\sigma : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, kde $\sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0$, $a \neq b$. Potom rovnice souměrností podle ρ a σ, v tomto pořadí, jsou

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,, \\
x_i'' &= x_i' - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1x_1' + \cdots + a_nx_n' + b)\,.
\end{aligned}
$$

Dosazením dostaneme rovnice složeného zobrazení

$$\begin{aligned}
x_i'' &= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(\sum_{k=1}^n a_k x_k + a) \\
&\quad - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(\sum_{k=1}^n a_k\big(x_k - \frac{2\,a_k}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(\sum_{l=1}^n a_l x_l + a)\big) + b\Big) \\
&= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(2\sum_{k=1}^n a_k x_k + a - \frac{2\sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(\sum_{l=1}^n a_l x_l + a)\big) + b\Big) \\
&= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(2\sum_{k=1}^n a_k x_k + a - 2\sum_{l=1}^n a_l x_l - 2\,a + b\Big) \\
&= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(b - a\Big)\,,
\end{aligned}$$

které je posunutím o vektor $\mathbf{u} = -2\frac{b-a}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1; \dots ; a_n)$, který je násobkem společného normálového vektoru obou rovin. Navíc jeho velikost je $\|\mathbf{u}\| = 2\frac{|b-a|}{|\sum_{j=1}^n a_j^2|}\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2} = 2\frac{|b-a|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$. Určeme vzdálenost rovin ρ a σ. Uvažujme $B \in \sigma$, t.j. $\sum_{j=1}^n a_j b_j = -b$. Potom vydálenost rovin je dána vzdáleností $v(B,\rho) = \frac{|\sum_{j=1}^n a_j b_j + a|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} = \frac{|-b+a|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$, což je polovina velikosti vektoru $\mathbf{u}$.

Jsou-li obě nadroviny symetrie různoběžné, dostaneme shodnost, která má jako podprostor samodružných bodů průnik nadrovin symetrie, t.j. podprostor dimenze $(n-2)$. Toto zobrazení je *otočení prostoru kolem průniku nadrovin symetrie* o úhel, jehož velikost je dvojnásobná než je odchylka podprostorů. Speciálně složením dvou symetrií podle kolmých nadrovin dostáváme symetrii podle jejich průniku. Tato situace je možná v prostoru minimalní dimenze 2. V rovině tak dostáváme, že složením dvou osových symetrií s různoběžnými osami je známé otočení roviny kolem středu. Podobně v prostoru dimenze 3 je složením symetrií podle rovin s různoběžnými rovinami symetrie otočení prostoru kolem přímky. Jak si ale představit otočení prostoru dimenze n o úhel α kolem podprostoru dimenze $(n-2)$? Mějme pevně zadaný podprostor ρ dimenze $(n-2)$. Potom každým bodem prostoru, prochází právě jeden podprostor dimenze 2 (rovina) totálně kolmý k ρ, který má s daným podprostorem ρ společný právě jeden bod. Otočení prostoru kolem ρ o úhel α je potom zobrazení, které je v každé totálně kolmé rovině otočením kolem společného bodu o úhel α. Ukažme si situaci v souřadnicích. Předpokládejme, že je zadán kartézský repér tak, že ρ je podprostor určený počátkem a prvními $(n-2)$ směrovými vektory. Uvažujme libovolné dvě různé nadroviny, které obsahují ρ, t.j. $\varrho : ax_{n-1} + bx_n = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $\sigma : cx_{n-1} + dx_n = 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Jejich odchylka je dána $\cos\alpha = \frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$, a tedy $\sin\alpha = \frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$. Potom souměrnosti podle ϱ a σ, v tomto pořadí, jsou

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\,, \qquad \dots \qquad , x'_{n-2} = x_{n-2}\,, \\ x'_{n-1} &= x_{n-1} - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax_{n-1} + bx_n)\,, \\ x'_n &= x_n - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax_{n-1} + bx_n)\,, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} x''_1 &= x'_1\,, \qquad \dots \qquad , x''_{n-2} = x'_{n-2}\,, \\ x''_{n-1} &= x'_{n-1} - \frac{2c}{c^2+d^2}(cx'_{n-1} + dx'_n)\,, \\ x''_n &= x'_n - \frac{2d}{c^2+d^2}(cx'_{n-1} + dx'_n)\,. \end{aligned}$$

Složením dostaneme

$$\begin{aligned} x''_1 &= x_1\,, \qquad \dots \qquad , x''_{n-2} = x_{n-2}\,, \\ x''_{n-1} &= \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2) + 4abcd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} x_{n-1} + \frac{2ab(c^2-d^2) - 2cd(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} x_n\,, \\ x''_{n-1} &= -\frac{2ab(c^2-d^2) - 2cd(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} x_{n-1} + \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2) + 4abcd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} x_n\,. \end{aligned}$$

Pokud má být toto zobrazení otočením kolem $\varrho \cap \sigma$ u úhel 2α, musí být $\cos(2\alpha) = \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2)+4abcd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ a $\sin(2\alpha) = \frac{2ab(c^2-d^2)-2cd(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. To ale opravdu dostaneme ze vztahů $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ a $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

Uvědomme si ještě, že jak v případě posunutí, tak v případě otočení, vůbec nezáleží na konkrétní volbě nadrovin symetrie. Podstatná je jen jejich vzdálenost, v případě rovnoběžných nadrovin, nebo odchylka, v případě různoběžných nadrovin. ♢

Úloha 3.3.1. Ověřte konstrukčně, že složením dvou osových symetrií v rovině je buď posunutí (v případě rovnoběžných os symetrie), nebo otočení kolem bodu o úhel, který má dvojnásobnou velikost než je odchylka os.

3.4 Klasifikace shodností v rovině a prostoru

Podobně, jako jsme klasifikovali v afinní rovině afinity podle počtu samodružných bodů a vlastních směrů, budeme nyní klasifikovat i shodnosti v euklidovské rovině a třírozměrném euklidovském prostoru. Uvědomme si při tom, že vlastní hodnoty shodnosti mohou být pouze 1 a -1, že různým vlastním hodnotám odpovídají na sebe kolmé vlastní směry a vicenásobnému kořeni charakteristické rovnice odpovídá podprostor vlastních směrů, jehož dimenze je rovna násobnosti kořene.

V rovině potom dostáváme tabulku, kde v řádcích jsou shodnosti, které nemají žádný samodružný bod, právě jeden samodružný bod, přímku samodružných bodů a konečně mohou být všechny body samodružné.

Charatteristická rovnice je polynomiální stupně dva. Ta nemusí mít žádná reálný kořen, t.j. zobrazení nemá žádný vlastní směr, nebo má dva reálné různé kořeny (1 a -1), t.j. zobrazení má dva na sebe kolmé vlastní směry, nebo konečně má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen 1 nebo -1, t.j. každý směr je vlastní.

Dostávame tak následující tabulku shodností v euklidovské rovině, kde počátek kartézského repéru volíme jako samodružný bod, pokud existuje, a směry souřadných os jsou vlastní směry, pokud existují.

	Žadný vlastní směr	Dva kolmé vlastní směry	Každý směr vlastní
Žádný samodružný bod	—	$x' = x \quad + b$ $y' = \quad -y$ $b \neq 0$ Posunutá o. s.	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y + b_2$ $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$ Posunutí
Jeden samodružný bod	$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha$ $y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ Otočení o úhel α	—	$x' = -x$ $y' = \quad -y$ Středová symetrie
Přímka samodružných bodů	—	$x' = x$ $y' = \quad -y$ Osová symetrie	—
Všechny body samodružné	—	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ Identita

Důsledek 3.4.1. Protože je každá shodnost v rovině složením nejvýše tří osových symetrií, je každé zobrazení ve výše uvedené tabulce složena s nejvýše tří osových symetrií. Ukážeme si to u všech zobrazení. Samotná osová symetrie je dána jedinou osovou symetrií.

Přímé shodnosti jsou posunutí a otočení kolem bodu, přitom středovou symetrii a identitu bereme jako zvláštní případ otočení o úhel π nebo 0. Tyto shodnosti musí být složeny ze dvou osových symetrií a podle Poznámky 3.3.3 je posunutí složením dvou osových symetriií s rovnoběžnými osami a otočení je složením dvou osových symetrií s různoběžnými osami.

Poslední zobrazení v tabulce je posunutá osová symetrie. Ta je složením osové symetrie a posunutí ve směru osy o nenulový vektor. Je tedy posunutá osová symetrie složením tří osových symetrii, přitom jsou dvě osy symetrie rovnoběžné, kolmé na třetí osu. $\diamond$

Důsledek 3.4.2. Protože je složením dvou přímých shodností opět přímá shodnost, dostáváme tak, že skládání posunutí a otočení je opět posunutí nebo otočení. To, že složením dvou posunutí je opět posunutí je zřejmé. Podobně se snadno nahlédne, že složením posunutí a otočení je opět otočení o stejný úhel kolem jiného středu. Nový střed otočení je ovšem závislý na tom, v jakém pořadí tato dvě zobrazení složíme.

Hůře se se vidí, že složením dvou otočení (obecně podle různých středů i úhlů) je buďto posunutí, nebo otočení. Snadno se to vidí analyticky. Mějme dvě otočení $o_1(S, \alpha)$ a $o_2(R, \beta)$ o rovnicích

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Pozor, souřadnice středů otočení dostaneme z výše uvedených rovnic jako souřadnice samodružných bodů. Potom z

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dostameme, že $o_1 \circ o_2$ i $o_2 \circ o_1$ jsou buďto otočení o úhel $\alpha+\beta$ pro $\alpha+\beta \neq 2\pi$ kolem bodů, které dostaneme jako samodružný bod složeného zobrazení a pro různé pořadí skládání jsou to různé body pro $S \neq R$. Specielně, pro $\alpha + \beta = \pi$ jde o středovou symetrii.

Pro $(\alpha + \beta) = 2\pi$ dostaneme jednotkovou matici a zobrazení je buďto identita (pro stejné středy otáčení) nebo posunutí (pro různé středy otáčení), pro různé pořadí skládání jsou to různá posunutí. $\diamond$

Úloha 3.4.1. Ověřte, že složením otočení a osové symetrie je buďto osová symetrie nebo posunutá osová symetrie. $\diamond$

Úloha 3.4.2. Jaké zobrazení vznikne složením tří osových symetrií podle tří os, které tvoří strany trojúhelníka? $\diamond$

Úloha 3.4.3. V rovině popište grupu shodností rovnostranného trojúhelníka a čtverce. $\diamond$

Podobně jako v rovině, můžeme klasifikovat shodnosti i v prostoru. Charakteristická rovnice shodnosti v prostoru je polynomiální stupně 3. Máme následující tři možnosti:

1. Jeden kořen charakteristické rovnice je reálný (1 nebo -1) a zbývající dva kořeny jsou komplexně sdružené. V tomto případě má shodnost právě jeden vlastní směr. Je-li reálným kořenem -1, má podle Věty 2.4.4 shodnost právě jeden samodružný bod a dostáváme tak zobrazení, které vzniká složením otočení kolem osy a rovinné symetrie podle roviny kolmé na osu otáčení. V tabulce jde o otočení kolem osy x a rovinné symetrie podle roviny yz. Je-li reálným kořenem 1, má shodnost buďto přímku samodružných bodů (otočení kolem osy) nebo nemá žádný samodružný bod (otočení kolem osy složené s posunutím ve směru osy).

2. Pokud má charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny 1 a -1, musí být jeden z nich dvojnásobný. V tomto případě dostaneme jeden vlastní směr odpovídající jednonásobnému kořeni a dvojdimenzionální prostor vlastních směrů, které odpovídají dvojnásobnému kořeni. Přitom jsou tyto prostory na sebe kolmé. Takové zobrazení nemůže mít právě jeden samodružný bod. Má tedy buďto přímku samodružných bodů (symetrie podle přímky, v tabulce osy x), nebo rovinu samodružných bodů (symetrie podle roviny, v tabulce osy xy), nebo nemá žádný samodružný bod. Tato situace může nastat dvojím způsobem, buďto posunutím osové symetrie ve směru osy nebo posunutím rovinné symetrie ve směru roviny symetrie.

3. Konečně pro trojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice je každý směr vlastním směrem. Je-li trojnásobným kořenem -1, má shodnost právě jeden samodružný bod a dostáváme středovou symetrii. Je-li trojnásobným kořenem 1, dostáváme buďto posunutí nebo identitu.

	Jeden vlastní směr	Prostor v.s. dim. 2 a kolmý v.s.	Každý směr vlastní
Žádný samod-ružný bod	$x' = x \qquad\qquad + b_1$ $y' = \quad y\cos\alpha + z\sin\alpha$ $z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$, $b_1 \neq 0$ Otočení kolem př. x o úhel α plus posunutí ve směru př. x	$x' = x \qquad + b_1$ $y' = \quad -y$ $z' = \qquad -z$ $b_1 \neq 0$ Sym. podle př. x plus posunutí ve směru př. x $x' = x \qquad + b_1$ $y' = \quad y \quad + b_2$ $z' = \qquad -z$ $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$ Sym. podle rov. xy plus posunutí ve směru rov. xy	$x' = x \qquad + b_1$ $y' = \quad y \quad + b_2$ $z' = \qquad z + b_3$ $(b_1; b_2; b_3) \neq \mathbf{o}$ Posunutí
Jeden samod-ružný bod	$x' = -x$ $y' = \quad y\cos\alpha + z\sin\alpha$ $z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ Otočení kolem př. x o úhel α plus sym. podle roviny yz	—	$x' = -x$ $y' = \quad -y$ $z' = \qquad -z$ Středová sym.
Přímka samod-ružných bodů	$x' = x$ $y' = \quad y\cos\alpha + z\sin\alpha$ $z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ Otočení kolem př. x o úhel α	$x' = x$ $y' = \quad -y$ $z' = \qquad -z$ Sym. podle př. x	—
Rovina samod-ružných bodů bodů	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ $z' = \qquad -z$ Sym. podle rov. xy	—
Všechny body samod-ružné	—	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ $z' = \qquad z$ Identita

Úloha 3.4.4. Jaké zobrazení vznikne složením dvou otočení kolem os, které jsou

a) rovnoběžné,
b) různoběžné,
c) mimoběžné? $\diamond$

Úloha 3.4.5. Jaké zobrazení vznikne složením dvou osových symetrií kolem os, které jsou

a) rovnoběžné,
b) různoběžné,
c) mimoběžné? $\diamond$

Úloha 3.4.6. Jaké zobrazení vznikne složením čtyř rovinných symetrií podle čtyř rovin, které tvoří stěny 4-stěnu? $\diamond$

Úloha 3.4.7. Popište grupy symetrií pravidelných těles. Jaké jsou jejich netriviální podgrupy? $\diamond$

3.5 Podobná zobrazení, grupa podobností

Definice 3.5.1. Zobrazení f euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathcal{E}'_m$ se nazývá *podobné zobrazení*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé dva body body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ platí

$$|f(X)f(Y)| = k\,|XY|\,.$$

Číslo k se nazývá *koeficient podobného zobrazení.*

Poznámka 3.5.1. Pro $k = 1$ v Definici 3.5.1 podobného zobrazení dostáváme shodné zobrazení. Jsou tedy shodná zobrazení speciálním případem podobných zobrazení a podobná zobrazení mají celou řadu stejných vlastností, jako shodná zobrazení. $\diamondsuit$

Příklad 3.5.1. Příkladem podobného zobrazení na euklidovském prostoru je stejnolehlost, kterou jsme probírali v Části 2.5. Opravdu, je-li f stejnolehlost s koeficientem $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, a středem S, t.j. $f(X) = \kappa X + (1-\kappa)S$, potom $|f(X)f(Y)| = \|\kappa(Y - X)\| = |\kappa|\,|XY|$, a tedy stejnolehlost s koeficientem κ je podobné zobrazení s koeficientem $|\kappa|$. $\heartsuit$

Věta 3.5.1. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je podobné zobrazení s koeficientem k_1 a $g : \mathcal{E}'_m \to \mathcal{E}''_k$ je podobné zobrazení s koeficientem k_2. Potom složené zobrazení $g \circ f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}''_k$ je podobné zobrazení s koeficientem $k_1.k_2$.*

Důkaz. Důkaz plyne přímo z Definice 3.5.1 podobného zobrazení. Opravdu pro libovolné dva body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ máme

$$|(g \circ f)(X)(g \circ f)(Y)| = k_2 \, |f(X)f(Y)| = k_2.k_1|XY| \, . \qquad \square$$

Věta 3.5.2. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je podobné zobrazení s koeficientem k. Pak*

1) Existuje stejnolehlost $h_1 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ s koeficientem k a shodné zobrazení $g_1 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f = g_1 \circ h_1$.

2) Existuje shodné zobrazení $g_2 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ a stejnolehlost $h_2 : \mathcal{E}'_m \to \mathcal{E}'_m$ s koeficientem k takové, že $f = h_2 \circ g_2$.

Důkaz. 1) Na $\mathcal{E}_n$ uvažujme stejnolehlost h_1^{-1} s koeficientem $1/k$ a libovolným středem. Protože stejnolehlost je podobné zobrazení a podle Věty 3.5.1 je složení dvou podobných zobrazení opět podobné zobrazení, je složené zobrazení $g_1 = f \circ h_1^{-1} : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ podobné zobrazení s koeficientem $k.1/k = 1$, t.j. je to shodné zobrazení. Protože je h_1^{-1} bijekce, je k ní inverzní zobrazení stejnolehlost s koeficientem k a $f = g_1 \circ h_1$.

1) Na $\mathcal{E}'_m$ uvažujme stejnolehlost h_2^{-1} s koeficientem $1/k$ a libovolným středem. Protože stejnolehlost je podobné zobrazení a podle Věty 3.5.1 je složení dvou podobných zobrazení opět podobné zobrazení, je složené zobrazení $g_2 = h_2^{-1} \circ f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ podobné zobrazení s koeficientem $k.1/k = 1$, t.j. je to shodné zobrazení. Protože je h_2^{-1} bijekce, je k ní inverzní zobrazení stejnolehlost s koeficientem k a $f = h_2 \circ g_2$. □

Věta 3.5.3. *1) Podobné zobrazení je afinní zobrazení.*

2) Podobné zobrazení je prosté, t.j. $n \leq m$.

3) Podobné zobrazení zobrazuje libovolné tři kolineární body opět na tři kolineární body a zachovává dělící poměr.

Důkaz. 1. Shodná zobrazení a stejnolehlosti jsou afinní zobrazení. Protože je podle Věty 3.5.2 podobné zobrazení složením shodného zobrazení a stejnolehlosti, je podle Věty 1.1.8 podobné zobrazení afinní.

2. Protože je stejnolehlost bijekce a shodné zobrazení je prosté, je jejich složení prosté zobrazení.

3. Plyne přím z předchozích dvou vlastností. □

Věta 3.5.4. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je podobné zobrazení s koeficientem k. Pak pro asociované lineární zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ platí:*

1) $\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = k\|\mathbf{u}\|$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$.

2) $(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$.

Důkaz. 1. Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, potom $\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = |f(A)f(B)| = k\,|AB| = k\,\|\mathbf{u}\|$.

2. Máme

$$\begin{aligned} 2\,(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) &= \|\varphi_f(\mathbf{u}) + \varphi_f(\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\varphi_f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= k^2\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\right) \\ &= 2\,k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

□

Důsledek 3.5.1. Podobné zobrazení zachovává odchylky vektorů.

Důkaz. Máme

$$\cos \measuredangle\big(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})\big) = \frac{\big(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})\big)}{\|\varphi_f(\mathbf{u})\|\,\|\varphi_f(\mathbf{v})\|} = \frac{k^2\,\big(\mathbf{u}),\mathbf{v}\big)}{k\,\|\mathbf{u}\|\,k\,\|\mathbf{v}\|} = \cos \measuredangle\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\,.$$ □

Pomocná věta 3.5.5. *Nechť $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ je lineární zobrazení takové, že pro nějakou bázi $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\rangle$ prostoru $Z(\mathcal{E}_n)$ platí $\|\varphi(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$ pro všechny $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$. Pak $\big(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})\big) = k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pro všechny $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$.*

Důkaz. Máme

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}) + (\mathbf{v},\mathbf{v}) - 2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,,$$

t.j.

$$2\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\,.$$

Potom

$$\begin{aligned} 2\,(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) &= -\|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{v})\|^2 \\ &= -\|\varphi(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{v})\|^2 \\ &= k^2\left(-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) \\ &= 2\,k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

□

Věta 3.5.6. *Nechť je dáno $(n+1)$ bodů v obecné poloze $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}_n$ a body $P'_0, P'_1, \dots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ takové, že*

$$|P_iP_j| = k|P'_iP'_j|\,, \qquad i,j = 0,\dots,n\,, k \in \mathbb{R}^+. \tag{3.5.1}$$

Pak existuje jediné podobné zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f(P_i) = P'_i$ pro všechna $i = 0, \dots, n$.

Důkaz. Protože jsou body $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}_n$ v obecné poloze, jsou vektory $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \mathbf{u}_n = \overrightarrow{P_0P_n} \in Z(\mathcal{E}_n)$ lineárně nezávislé. Podmínka (3.5.1) znamená, že i body $P_0', P_1', \dots, P_n' \in \mathcal{E}_m'$ jsou v obecné poloze, a tedy i vektory $\mathbf{u}_1' = \overrightarrow{P_0'P_1'}, \dots, \mathbf{u}_n' = \overrightarrow{P_0'P_n'} \in Z(\mathcal{E}_m')$ jsou lineárně nezávislé. Podle Věty 1.1.2 existuje jediné lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}_m')$ takové, že $\varphi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i'$. Navíc platí $\|\varphi(\mathbf{u}_i)\| = k\,\|\mathbf{u}_i\|$ a $\|\varphi(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)\| = \|\varphi(\overrightarrow{P_jP_i})\| = |P_j'P_i'| = k\,|P_jP_i| = k\,\|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|$. Potom ale

$$\begin{aligned}
2\,(\varphi(\mathbf{u}_i), \varphi(\mathbf{u}_j)) &= -\|\varphi(\mathbf{u}_i) - \varphi(\mathbf{u}_j)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_i)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_j)\|^2 \\
&= -\|\varphi(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_i)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_j)\|^2 \\
&= k^2\big(- \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2 + \|\mathbf{u}_i\|^2 + \|\mathbf{u}_j\|^2\big) \\
&= 2\,k^2\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)\,.
\end{aligned}$$

$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = k^2\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a $\|\varphi(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$ pro každý vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$. Opravdu jsou-li $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n y_j\,\mathbf{u}_j$. Potom

$$\begin{aligned}
(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i\,\varphi(\mathbf{u}_i), \sum_{j=1}^n y_j\,\varphi(\mathbf{u}_j)\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\varphi(\mathbf{u}_i), \varphi(\mathbf{u}_j)) = k^2 \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \\
&= k^2\,(\sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j\,\mathbf{u}_j) = k^2\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,.
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě vyplývá $\|\varphi(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$.

Podle Věty 3.1.5 je zobrazení

$$f(X) = P_0' + \varphi(\overrightarrow{P_0X})$$

afinní zobrazení a snadno se vidí, že $f(P_i) = P_i'$. Potom

$$|f(X)f(Y)| = \|\varphi(\overrightarrow{P_0Y}) - \varphi(\overrightarrow{P_0X})\| = \|\varphi(\overrightarrow{XY})\| = k\,\|\overrightarrow{XY}\| = k\,|XY|\,,$$

a tedy je to podobné zobrazení. $\square$

Důsledek 3.5.2. Podobné zobrazení v rovině je určeno vrcholy podobných trojúhelníků. $\diamond$

Uvažujme kartézské repéry $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ v prostoru $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ v prostoru $\mathcal{E}'_m$. Potom dostaneme vyjádření f ve tvaru

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \, , \; j = 1, \ldots, m \, , \tag{3.5.2}$$

a z podmínky, že f je podobné zobrazení tvaru $(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dostaneme

$$(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = (A(\mathbf{u}))^T (A(\mathbf{v})) = (\mathbf{u})^T A^T A(\mathbf{v}) = k^2 (\mathbf{u})^T E_n(\mathbf{v}) \, ,$$

t.j. $A^T A = k^2 E_n$. Dostáváme tedy, že matice A je maticí podobného zobrazení právě tehdy, splňuje-li podmínku

$$A^T A = k^2 E_n \, . \tag{3.5.3}$$

Dále uvažujme podobná zobrazení na euklidovském prostoru.

Definice 3.5.2. Podobné zobrazení f s koeficientem k euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ na sebe se nazývá *podobnost* $\mathcal{E}_n$.
Je-li $k \neq 1$, nazývá se f *vlastní podobnost.*

Věta 3.5.7. *Podobnosti na euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ tvoří grupu, tzv.* grupu podobností $\mathfrak{Po}_n$.

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Složením dvou podobností je podobnost. Z definice podobného zobrazení se snadno vidí, že inverzní zobrazení k podobnosti s koeficientem k je opět podobnost s koeficientem $1/k$. □

Věta 3.5.8. *Vlastní hodnoty příslušné podobnosti s koeficientem k mohou být pouze $\pm k$.*

Důkaz. Je-li $\mathbf{u}$ vlastní vektor příslusný vlastní hodnotě λ, je z podmínky $\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = k \|\mathbf{u}\|$ pro asociované lineární zobrazení podobnosti $|\lambda| = k$, a tedy $\lambda = \pm k$. □

Věta 3.5.9. *Modul podobnosti s koeficientem k je $\pm k^n$.*

Důkaz. Podobnost má jako svou matici čtvercovou matici takovou, že $A^T A = k^2 E_n$. Potom $|A^T A| = k^{2n}$, a tedy $|A|^2 = \pm k^{2n}$ a po odmocnění $|A| = \pm k^n$. □

Věta 3.5.10. *Každá vlastní podobnost euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ má právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Kořeny charakteristické rovnice pro podobnost mohou být pouze hodnoty $\pm k$. Pro vlastní podobnost jednička není kořenem charakteristické rovnice a podle Věty 2.4.4 má podobnost právě jeden samodružný bod. $\square$

Věta 3.5.11. *Každá vlastní podobnost na $\mathcal{E}_n$ s koeficientem k je složením shodnosti na $\mathcal{E}_n$ a stejnolehlosti s koeficientem k a středem, který je samodružným bodem dané podobnosti.*

Důkaz. Je-li S samodružný bod vlastní podobnosti f, existuje jediná stejnolehlost h^{-1} s koeficientem $1/k$ a středem S. Potom $g_1 = f \circ h^{-1}$ a $g_2 = h^{-1} \circ f$ jsou shodnosti na $\mathcal{E}_n$ a $f = g_1 \circ h = h \circ g_2$. $\square$

Poznámka 3.5.2. Grupa podobností na $\mathcal{E}_n$ je podgrupou grupy afinit na $\mathcal{E}_n$, t.j. $\mathfrak{Po}_n \subset \mathfrak{A}_n$. $\diamondsuit$

Následující graf nám ukazuje hlavní podgrupy v grupě afinit na $\mathcal{E}_n$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{Af}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\mathfrak{Af}_n{}^+, \circ) \arrow[d] & (\mathfrak{Po}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & (\mathfrak{Ek}_n, \circ) \arrow[dl] \\
(\mathfrak{Po}_n{}^+, \circ) \arrow[d] & (\mathfrak{Sh}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & (\mathfrak{Ho}_n, \circ) \arrow[d] \\
(\mathfrak{Sh}_n^+, \circ) \arrow[dr] & & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathrm{Id}, \circ) &
\end{tikzcd}
$$