Kapitola 1

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ NA VEKTOROVÝCH PROSTORECH

V této kapitole si připomeneme pojem lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory v rozsahu skript [Ho07]. Zvláštní pozornost budeme věnovat invariantním podprostorům a těm pojmům, které budeme později potřebovat při zobrazení bodových prostorů.

1.1 Lineární zobrazení vektorových prostorů

V této části předpokládáme všechny vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Pokud budeme potřebovat zdůraznit dimenzi vektorového prostoru, označíme ji jako jeho index, t.j. V_n označuje n-rozměrný vektorový prostor.

Definice 1.1.1. Buďte V a W vektorové prostory nad $\mathbb{T}$. Zobrazení $\varphi : V \to W$ nazveme *lineárním zobrazením* vektorového prostoru V do vektorového prostoru W (nebo *homomorfismem vektorových prostorů*) právě tehdy, když pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a libovolné $\lambda \in \mathbb{T}$ platí

1) $\varphi(\mathbf{u} \underset{V}{+} \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \underset{W}{+} \varphi(\mathbf{v})\,,$

2) $\varphi(\lambda \underset{V}{\cdot} \mathbf{u}) = \lambda \underset{W}{\cdot} \varphi(\mathbf{u})\,.$

Je-li φ bijekce, nazývá se *izomorfismus vektorových prostorů* V a W.

Poznámka 1.1.1. 1. Uvědomme si, že operace $+$ a $\cdot$ na levé straně rovností 1) a 2) jsou na prostoru V a stejné operace na pravých stranách patří k prostoru W. Pokud nemůže dojít k záměně, nebudeme vyznačovat, ke kterému prostoru operace patří a operaci násobení $\cdot$ nebudeme značit vůbec.

2. φ zachovává obě operace $+$ a $\cdot$. Proto se se někdy nazývá homomorfismem vektorových prostorů.

3. Platí $\varphi(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$. Opravdu, z $\varphi(-\mathbf{u}) = -\varphi(\mathbf{u})$, dostaneme $\varphi(\mathbf{o}_V) = \varphi(\mathbf{u} - \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(-\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{o}_W$.

4. Podmínky 1) a 2) v Definici 1.1.1 jsou ekvivalentní s rovností

$$\varphi(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i\,\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\varphi(\mathbf{v}_i)\,, \qquad k \geq 2\,, \tag{1.1.1}$$

kde $\mathbf{v}_i \in V$ a $\lambda_i \in \mathbb{T}$. Můžeme tedy v Definici 1.1.1 nahradit podmínky 1) a 2) jedinou podmínkou (1.1.1).

5. Je-li $\varphi : V \to W$ lineární zobrazení a $U \subseteq V$ vektorový podprostor, potom zúžení $\varphi|U : U \to W$ je lineární zobrazení. ♢

Poznámka 1.1.2. Uvědomme si, že těleso $\mathbb{T}$ je samo vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$. Potom lineární zobrazení $\varphi : V \to \mathbb{T}$ se nazývá *lineární forma* na V. ♢

Věta 1.1.1. *Buďte V, W a U tři vektorové prostory a $\varphi : V \to W$ a $\psi : W \to U$ lineární zobrazení. Potom $\psi \circ \varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

Připomeňme, [Ho07], že úplný obraz $\varphi(V) = \mathrm{Im}(\varphi) = \{\mathbf{w} \in W | \exists\, \mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ je vektorový podprostor v W a podobně jádro $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{v} \in V | \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W\}$ je vektorový podprostor ve V. Přitom

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(V)\,.$$

Definice 1.1.2. *Hodností lineárního zobrazení* rozumíme dimenzi vektorového podprostoru $\mathrm{Im}(\varphi)$. Značíme ji $h(\varphi)$.

Poznámka 1.1.3. Je-li lineární zobrazení φ injektivní, je $h(\varphi) = \dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ a je-li surjektivní je $h(\varphi) = \dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. Je-li φ izomorfismus je $\dim(V) = h(\varphi) = \dim(W)$. ♢

Jsou-li $\varphi, \psi : V \to W$ dvě lineární zobrazení a $\lambda \in \mathbb{T}$, můžeme definovat součet $\varphi + \psi$ a násobek $\lambda\,\varphi$ předpisem

$$(\varphi + \psi)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v})\,, \qquad (\lambda\,\varphi)(\mathbf{v}) = \lambda\,\varphi(\mathbf{v})\,. \tag{1.1.2}$$

Množinu všech lineárních zobrazení z V do W označujeme $\mathrm{Hom}(V,W)$ a vzhledem k operacím sčítání a násobení prvky z $\mathbb{T}$, definované v (1.1.2), jde o vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ dimenze $\dim(V)\cdot\dim(W)$. Nulovým prvkem v tomto prostoru je *nulové zobrazení*, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W$, $\forall \mathbf{v} \in V$, a opačným prvkem k prvku φ je $(-1)\,\varphi$.

Věta 1.1.2. *Lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W$ je určeno, známe-li obrazy $\varphi(\mathbf{v}_i)$ vektorů $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\rangle$, které tvoří bázi V.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\rangle$ je libovolná báze V_n. Potom každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme psát jako $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{v}_i$. Potom z Poznámky 1.1.1 4) dostaneme

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i\,\varphi(\mathbf{v}_i)$$

a tento vektor je jednoznačně určen, známe-li obrazy $\varphi(\mathbf{v}_i)$. □

Věta 1.1.3. *Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\rangle$ je báze vektorového prostoru V_n a $\mathcal{W} = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\rangle$ je báze vektorového prostoru W_m.*

1) Nechť $\varphi : V_n \to W_m$ je lineární zobrazení. Potom existuje jednoznačně určená matice $A_\varphi = (a_{ji})$ typu m/n nad $\mathbb{T}$ taková, že vektor $\mathbf{x} = (x_1;\ldots;x_n) \in V_n$ se zobrazí na vektor

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^n a_{1i}\,x_i;\ldots;\sum_{i=1}^n a_{ji}\,x_i) \in W_m\,.$$

2) Nechť $A = (a_{ji})$ je matice typu m/n nad $\mathbb{T}$. Potom zobrazení φ_A, které vektor $\mathbf{x} = (x_1;\ldots;x_n) \in V_n$ zobrazí na vektor

$$\mathbf{y} = \varphi_A(\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^n a_{1i}\,x_i;\ldots;\sum_{j=1}^n a_{ji}\,x_i) \in W_m\,,$$

je lineární.

Důkaz. 1) Vyjádřeme nejdříve vektor $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in W_m$ jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{W} = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\rangle$, t.j.

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m y_j\,\mathbf{w}_j\,. \tag{1.1.3}$$

Na druhou stranu je, podle Věty 1.1.2, vektor $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ dán jako lineární kombinace $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i\,\varphi(\mathbf{v}_i)$. Každý vektor $\varphi(\mathbf{v}_i) \in W_m$ ale můžeme vyjádřit jako kombinaci $\varphi(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,\mathbf{w}_j$. Dosazením tak dostaneme

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,\mathbf{w}_j \tag{1.1.4}$$

a porovnáním (1.1.3) s (1.1.4) tak dostaneme

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\,x_i\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{1.1.5}$$

2) Na druhou stranu předpokládejme, že je dána matice $A = (a_{ji})$ typu m/n nad $\mathbb{T}$. Snadno se vidí, že zobrazení, které zobrazí vektor $\mathbf{x} = (x_1; \ldots ; x_n) \in V_n$ na vektor

$$\mathbf{y} = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\,x_i; \ldots ; \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,x_i) \in W_m$$

je lineární zobrazení $\varphi_A : V_n \to W_m$. $\square$

Rovnici (1.1.5) budeme častěji psát maticově

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.1.6}$$

nebo symbolicky

$$(\mathbf{y}) = A_\varphi\,(\mathbf{x})\,, \tag{1.1.7}$$

kde $(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathcal{V}$ ve V_n a $(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic vektoru $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ vzhledem k bázi $\mathcal{W}$ v W_m.

Definice 1.1.3. Rovnice (1.1.5) – (1.1.7) nazýváme *souřadnicovým vyjádřením (rovnicemi) lineárního zobrazení* φ vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ ve V_n a $\mathcal{W}$ v W_m. Matici $A_\varphi = (a_{ij})$ nazýváme *maticí lineárního zobrazení* φ (vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ ve V_n a $\mathcal{W}$ v W_m).

Poznámka 1.1.4. Při pevně zvolených bázích $\mathcal{V}$ ve V_n a $\mathcal{W}$ v W_m je vztah mezi lineárními zobrazeními $\varphi : V_n \to W_m$ a maticemi A_φ typu m/n nad $\mathbb{T}$ vzájemně jednoznačný.

Přitom platí

$$A_{\varphi_A} = A\,, \quad \varphi_{A_\varphi} = \varphi$$

a

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi\,, \quad A_{\lambda\,\varphi} = \lambda\, A_\varphi\,. \qquad \diamondsuit$$

Poznámka 1.1.5. Z důkazu Věty 1.1.3 vyplývá, jaký je geometrický význam matice lineárního zobrazení φ. Ve sloupcích matice A_φ jsou souřadnice obrazů $\varphi(\mathbf{v}_i)$ vektorů $\mathbf{v}_i$ báze $\mathcal{V}$, v daném pořadí, vyjádřené vzhledem k bázi $\mathcal{W}$. $\diamondsuit$

Poznámka 1.1.6. Je-li $\varphi : V \to W$ izomorfismus, je také inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : W \to V$ izomorfismus a A_φ je regulární čtvercová matice řádu $\dim(V) = \dim(W)$. Proto se někdy říká, že lineární izomorfismus je *regulární zobrazení*. Navíc platí $A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}$. $\diamondsuit$

Poznámka 1.1.7. Bázi $\mathcal{V}$ vektorového prostoru V_n můžeme chápat jako lineární izomorfismus $\mathcal{V} : V_n \to \mathbb{T}^n$ (zde $\mathbb{T}^n$ chápeme jako n-dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{T}$), který je dán tak, že obrazem vektoru $\mathbf{v}_i$ báze $\mathcal{V}$ je uspořádaná n-tice $(0,\dots,1,\dots 0)$, ve které je 1 na i-tém místě. Potom souřadnicové vyjádření lineárního zobrazení φ je lineární zobrazení $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ takové, že komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{T}^n \arrow[l, "\mathcal{V}^{-1}"'] \arrow[d] \\ W_m \arrow[r, "\mathcal{W}"] & \mathbb{T}^m \end{tikzcd} \qquad \diamondsuit$$

Věta 1.1.4. *Nechť $\varphi : V_n \to W_m$ je lineární zobrazení, potom existují báze $\mathcal{V}$ ve V_n a báze $\mathcal{W}$ v W_m takové, že φ má souřadnicové vyjádření*

$$\begin{aligned} y_i &= x_i\,, \qquad i = 1,\dots,h(\varphi)\,,\\ y_j &= 0\,, \qquad j = h(\varphi)+1,\cdots,m\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Stačí zvolit libovolnou bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\rangle$ ve V takovou, aby $\mathrm{Im}(\varphi) = L(\varphi(\mathbf{v}_1),\dots,\varphi(\mathbf{v}_{h(\varphi)}))$, a bázi $\mathcal{W} = \langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\rangle$ v W_m takovou, že prvních $h(\varphi)$ vektorů $\mathbf{w}_i = \varphi(\mathbf{v}_i)$. $\square$

Poznámka 1.1.8. Mějme lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ a $\psi : W_m \to U_k$ a báze $\mathcal{V}$ ve V_n, $\mathcal{W}$ v W_m a $\mathcal{U}$ v U_k. Potom

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi \, A_\varphi \,. \qquad \diamondsuit$$

Věta 1.1.5. *Nechť jsou dány dvě báze $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ ve V_n a dvě báze $\mathcal{W}$ a $\mathcal{W}'$ v W_m. Nechť A_φ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ a B_φ je matice téhož zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$. Potom*

$$B_\varphi = K^{-1} \, A_\varphi \, L \,, \tag{1.1.8}$$

kde K je matice přechodu od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{W}'$ v W_m a L je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$ ve V_n.

Důkaz. Pro $\mathbf{x} \in V_n$ označme $(\mathbf{x})$ sloupcovou matici souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{V}$ a $(\mathbf{x}')$ sloupcovou matici souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{V}'$. Potom přechod od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$ ve V_n je dán maticí L, t.j. $(\mathbf{x}) = L\,(\mathbf{x}')$. Podobně, nechť $(\mathbf{y})$ je sloupcová matice souřadnic vektoru $\mathbf{y} \in W_m$ vzhledem k bázi $\mathcal{W}$ a $(\mathbf{y}')$ sloupcová matice souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{W}'$. Potom přechod od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{W}'$ v W_m je dán maticí K, t.j. $(\mathbf{y}) = K\,(\mathbf{y}')$.

Podle (1.1.7) je vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ lineární zobrazení φ dáno rovnicí $(\mathbf{y}) = A_\varphi\,(\mathbf{x})$ a podobně, vzhledem k bázím $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$, je φ dáno rovnicí $(\mathbf{y}') = B_\varphi\,(\mathbf{x}')$. Dosazením transformačních rovnic přechodu od bází $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ k bázím $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$ dostaneme

$$K\,(\mathbf{y}') = A_\varphi\, L\,(\mathbf{x}')\,,$$

t.j.

$$(\mathbf{y}') = K^{-1}\, A_\varphi\, L\,(\mathbf{x}')\,,$$

a porovnáním s rovnicí φ v bázích $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$ dostaneme $B_\varphi = K^{-1}\, A_\varphi\, L$. $\square$

Důsledek 1.1.1. Jsou-li matice A_φ, respektive B_φ, dvě matice téhož lineárního zobrazeni $\varphi : V_n \to W_m$ vyjádřené v různých bázích $\mathcal{V}$, respektive $\mathcal{V}'$, ve V_n a $\mathcal{W}$, respektive $\mathcal{W}'$, v W_m, potom existuje taková regulární matice K typu m/m a regulární matice L typu n/n, že $B_\varphi = K^{-1}\, A_\varphi\, L$. Přitom K je matice přechodu od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{W}'$ v W_m a L je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$ ve V_n. $\diamond$

Důsledek 1.1.2. Hodnost lineárního zobrazení je rovna hodnosti jeho matice vzhledem k libovolným bázím. Opravdu, z Poznámky 1.1.5 vyplývá, že $h(\varphi)$ je rovna hodnosti matice A_φ vyjádřené v libovolných bázích. Při přechodu k novým bázím se hodnost nemění, protože matice $B_\varphi = K^{-1}\, A_\varphi\, L$ má stejnou hodnost jako matice A_φ. $\diamond$

1.2 Invariantní podprostory

V této části budeme studovat lineární zobrazení vektorového prostoru V na sebe.

Definice 1.2.1. Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ nazýváme *lineární transformace (endomorfismus)* vektorového prostoru V. Je-li navíc φ izomorfismus, nazývá se *automorfizmus* vektorového prostoru V.

Poznámka 1.2.1. Automorfizmus vektorového prostoru V_n je bijekcí, jeho matice je čtvercová matice řádu n, t.j. regulární matice. Říkáme někdy proto, že automorfismus na V_n je *regulární zobrazení* na V_n. $\diamondsuit$

Poznámka 1.2.2. Podle úvah v předchozí části 1.1 můžeme lineární transformace vektorového prostoru V sečítat, násobit prvky z tělěsa $\mathbb{T}$, ale také skládat, viz Věta 1.1.1. Opravdu, složením dvou lineárních transformací na V je opět lineární transformace na V. Navíc, množina všech automorfismů vektorového prostoru V je grupou vzhledem k operaci skládání zobrazení. Tuto grupu budeme nazývat *obecná lineární grupa* vektorového prostoru V. $\diamondsuit$

Poznámka 1.2.3. Podle Věty 1.1.4 bylo možné zvolit báze vektorových prostorů tak, že matice lineárního zobrazení φ měla koeficienky $a_{ii} = 1$, $i = 0, \dots, h(\varphi)$, a zbývající koeficienty byly nulové. V případě lineární transformace na vektorovém prostoru V vyjadřujeme vzory i obrazy vzhledem k jedné bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ vektorového prostoru V_n. Matice A_φ je potom čtvercová matice řádu n a obecně nemůžeme volit bázi $\mathcal{V}$ tak, aby byla tvořena pouze jedničkami (na diagonále) a nulami. V následujících úvahách si ukážeme, jak zvolit bázi vektorového prostoru V tak, aby v ní měla daná lineární transformace co nejjednodušší rovnice. K tomu budou sloužit invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci. $\diamondsuit$

Poznámka 1.2.4. Uvažujme nyní ve V dvě báze $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$. Je-li A_φ matice lineární transformace φ v bázi $\mathcal{V}$ a B_φ matice φ v bázi $\mathcal{V}'$, je podle Věty 1.1.5, $B_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$, kde regulární matice S je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$. Znamená to, že matice A_φ a B_φ jsou si podobné. $\diamondsuit$

Definice 1.2.2. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V. Vektorový podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní podprostor* vzhledem k lineární transformaci φ, je-li $\varphi(U) \subseteq U$, t.j. pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in U$ je $\varphi(\mathbf{u}) \in U$.

Poznámka 1.2.5. Definice invariantního podprostoru závisí v podstatné míře na dané lineární transformaci. Jediné podprostory, které jsou invariantní vzhledem ke všem lineárním transformacím, jsou celý prostor V a nulový podprostor $\{\mathbf{o}\}$. $\diamondsuit$

Příklad 1.2.1. Nechť $V = \mathbb{T}^2$ a $U = \{(x_1; 0) | x_1 \in \mathbb{T}\}$. Potom U je invariantní vzhledem k lineární transformaci $\varphi((x_1; x_2)) = (x_1 + x_2; 0)$ ale není invariantní vzhledem k lineární transformaci $\psi((x_1; x_2)) = (x_2; x_1)$. $\heartsuit$

Věta 1.2.1. *Nechť φ je lineární transformace V. Pak $\mathrm{Im}(\varphi)$ a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ jsou invariantní podprostory.*

Důkaz. Máme

$$\varphi(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \{\mathbf{o}\} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$

a

$$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V \Rightarrow \varphi(\mathrm{Im}(\varphi)) \subseteq \varphi(V) = \mathrm{Im}(\varphi)\,.$$

$\square$

Věta 1.2.2. *Nechť φ je lineární transformace V a $U_1, \ldots, U_k$ jsou invariantní podprostory. Pak $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ a $U_1 + \cdots + U_k$ jsou invariantní podprostory.*

Důkaz. a) Nechť $\mathbf{u} \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$, t.j. $\mathbf{u} \in U_i$, $i = 1, \ldots, k$. Pak $\varphi(\mathbf{u}) \in U_i$, $\forall i$, a tedy $\varphi(\mathbf{u}) \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$.

b) Nechť $\mathbf{u} \in U_1 + \cdots + U_k$, t.j. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k$, $\mathbf{u}_i \in U_i$. Protože $\varphi(\mathbf{u}_i) \in U_i$, $\forall i$, máme $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k) = \varphi(\mathbf{u}_1) + \cdots + \varphi(\mathbf{u}_k) \in U_1 + \cdots + U_k$. $\square$

Připomeňme, že čtvercovou matici řádu $(k+m)$, $k, k \geq 1$, nad $\mathbb{T}$ tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

nazýváme *polorozpadlou maticí* nebo *maticí v polorozpadlém tvaru*, zatímco matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

nazýváme *rozpadlou maticí* nebo *maticí v rozpadlém tvaru*. Říkáme také, že rozpadlá matice je v *blokově diagonálním tvaru*. Submatice

$$A^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad B^+ = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

nazýváme *bloky matice* A a říkáme, že matice A se rozpadá na dva (diagonální) bloky A^+ a B^+.

Věta 1.2.3. *Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V.*

1) Ve V existuje netriviální podprostor dimenze k invariantní vzhledem k transformaci φ právě tehdy, když existuje taková báze $\mathcal{V}$ prostoru V, že v ní má φ matici v polorozpadlém tvaru (1.2.1).

2) Nechť $\dim(V) = n \geq 2$. *Potom V je přímý součet dvou netriviálních podprostorů dimenzí k a m, $k + m = n$, invariantních vzhledem k φ právě tehdy, když existuje taková báze $\mathcal{V}$ prostoru V, že v ní má φ matici v rozpadlém tvaru s bloky řádů k a m.*

Důkaz. 1) Nechť U_k je k-dimenzionální podprostor V_n, který je invariantní vzhledem k lineární transformaci φ. Zvolme bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru V_n tak, aby $U_k = L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Snadno se vidí, že v takové bázi je matice A_φ v polorozpadlém tvaru (1.2.1). Naopak, nechť je matice A_φ v nějaké bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru V_n v polorozpadlém tvaru (1.2.1). Protože ve sloupcích matice A_φ jsou souřadnice obrazů vektorů $\varphi(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, je $\varphi(\mathbf{v}_i) \in L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, $i = 1, \ldots, k$, a tedy podprostor $U_k = L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ je invariantní vzhledem k φ.

2) Nechť $V_n = W_k \oplus U_m$ a W_k a U_m jsou invariantní podprostory vzhledem k φ. Potom zvolíme bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ tak, že $W_k = L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ a $U_m = L(\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Snadno se vidí, že v takové bázi je matice A_φ v rozpadlém tvaru (1.2.2) s bloky řádů k a m. Naopak, nechť je matice A_φ v nějaké bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru V_n v rozpadlém tvaru s bloky

řádů k a m. Protože ve sloupcích matice A_φ jsou souřadnice obrazů vektorů $\varphi(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, n$, je $\varphi(\mathbf{v}_i)$ in $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, $i = 1, \dots, k$, a $\varphi(\mathbf{v}_j)$ in $L(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$, $j = k+1, \dots, n$, tedy podprostory $W_k = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ a $U_m = L(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou invariantní vzhledem k φ. □

Důsledek 1.2.1. Je-li V_n přímý součet n jednodimenzionálních podprostorů, které jsou invariantní vzhledem k φ, potom existuje taková báze V_n, že vzhledem k ní je matice A_φ diagonální. ⋄

Na základě Důsledku 1.2.1 hrají jednodimenzionální vektorové podprostory, které jsou invariantní vzhledem k lineární transformaci φ, významnou roli. Budeme se tedy zabývat takovými podprostory $L(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, že $\varphi(L(\mathbf{u})) \subseteq L(\mathbf{u})$, musí se tedy vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ zobrazit do $L(\mathbf{u})$, t.j. pro nějaké $\lambda \in \mathbb{T}$ je $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{u}$.

Definice 1.2.3. *Charakteristický (vlastní) vektor* lineární transformace φ vektorového prostoru V je takový nenulový vektor $\mathbf{u}$, pro který platí

$$\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{u}\,, \quad \lambda \in \mathbb{T}\,. \tag{1.2.4}$$

Číslo λ nazýváme *charakteristickým (vlastním) číslem (hodnotou)* lineární transformace φ příslušným vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$.

Charakteristickým (vlastním) vektorem a *charakteristickým (vlastním) číslem (hodnotou)* čtvercové matice A řádu n rozumíme charakteristický (vlastní) vektor a charakteristické (vlastní) číslo (hodnotu) lineární transformace φ_A.

Poznámka 1.2.6. Nechť $\mathbf{u}$ je vlastní vektor lineární transformace φ příslušný vlastnímu číslu λ, potom jeho libovolný nenulový násobek je také vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ. Opravdu, je-li $\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{u}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{T}$, je $\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\alpha\,\mathbf{u}) = \alpha\,\varphi(\mathbf{u}) = \alpha\,\lambda\,\mathbf{u} = \lambda\,\alpha\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{v}$. Jsou tedy všechny nenulové vektory jednodimenzionálního podprostoru (směru) $L(\mathbf{u})$ vlastní vektory lineární transformace φ příslušné vlastnímu číslu λ a hovoříme o *vlastním směru* lineární transformace φ příslušném vlastnímu číslu λ. ◇

Věta 1.2.4. *$\lambda \in \mathbb{T}$ je vlastní hodnotou lineární transformace φ na V_n právě tehdy, když splňuje rovnici*

$$|A_\varphi - \lambda\,E_n| = 0\,, \tag{1.2.5}$$

kde A_φ je matice φ v libovolné bázi ve V_n a E_n je jednotková matice řádu n.

Důkaz. Předpokládejme, že λ je vlastní hodnotou která přísluší vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$ lineární transformace φ. Potom $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{u}$ a v souřadnicích $A_\varphi\,(\mathbf{u}) = \lambda\,(\mathbf{u})$, což upravíme na

$$(A_\varphi - \lambda\,E_n)\,(\mathbf{u}) = (\mathbf{o})\,. \tag{1.2.6}$$

Rovnice (1.2.6) je maticovým zápisem soustavy homogenních lineárních rovnic a z předpokladu, že $\mathbf{u}$ je nenulový vektor, vyplývá, že tato soustava musí být závislá, t.j. determimant $|A_\varphi - \lambda\,E_n|$ matice této soustavy musí být nulový. □

Ve Větě 1.2.4 jsme předpokládali souřadnicové vyjádření lineární transformace φ vzhledem k nějaké zvolené bázi. V následující větě si ukážeme, že rovnice $|A_\varphi - \lambda\,E_n| = 0$, a tím i vlastní hodnoty lineární transformace φ, jsou na zvolené bázi nezávislé.

Věta 1.2.5. *Nechť A a B jsou dvě podobné čtvercové matice řádu n. Pak*

$$|A - \lambda\,E_n| = |B - \lambda\,E_n|\,. \tag{1.2.7}$$

Důkaz. A a B jsou podobné matice, t.j existuje regulární matice S řádu n taková, že $B = S^{-1}\,A\,S$. Pak

$$\begin{aligned} |B - \lambda\,E_n| &= |S^{-1}\,A\,S - \lambda\,S^{-1}\,E_n\,S| = |S^{-1}\,(A - \lambda\,E_n)\,S| \\ &= |S^{-1}|\,|A - \lambda\,E_n|\,|S| = |A - \lambda\,E_n|\,. \end{aligned}$$ □

Poznámka 1.2.7. Rovnice (1.2.5) se nazývá *charakteristická rovnice lineární transformace* φ (případně matice A_φ). Snadno se vidí, že charakteristická rovnice je polynomiální, proto hovoříme o *charakteristickém polynomu lineární transformace* φ (případně matice A_φ). Opravdu

$$\begin{aligned} |A_\varphi - \lambda\,E_n| = (-\lambda)^n + J_1\,(-\lambda)^{n-1} + J_2\,(-\lambda)^{n-2} \\ + \cdots + J_{n-1}\,(-\lambda) + J_n\,, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

kde J_i jsou součty hlavních minorů řádu i matice A_φ, speciálně tedy J_1 je součet prvků na diagonále matice A_φ, takzvaná *stopa matice* A_φ, a J_n je determinat matice A_φ. ♢

Důsledek 1.2.2. Protože lineární transformace na V_n má v různých bázích matice, které jsou si navzájem podobné, je charakteristická rovnice lineární transformace jednoznačně určená lineární transformaci nezávisle na jejím souřadnicovém vyjádření.

Podobně i kořeny charakteristické rovnice, t.j. vlastní hodnoty lineární transformace, jsou jednoznačně určeny lineární transformaci nezávisle na jejím souřadnicovém vyjádření. ⋄

Věta 1.2.6. *Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V_n a $\lambda \in \mathbb{T}$ je vlastní hodnota φ. Pak vlastní vektor $\mathbf{u}$ příslušný λ vyjádřený v souřadnicích vzhledem k nějaké bázi $\mathcal{V}$ je řešením homogenní soustavy rovnic*

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)\,u_1 & + & a_{12}\,u_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,u_n & = & 0\,, \\ a_{21}\,u_1 & + & (a_{22}-\lambda)\,u_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,u_n & = & 0\,, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,u_1 & + & a_{n2}\,u_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)\,u_n & = & 0\,, \end{array} \tag{1.2.9}$$

kde $A_\varphi = (a_{ij})$ je matice φ vzhledek k bázi $\mathcal{V}$.

Důkaz. Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ musí být řešením rovnice (1.2.6), což je právě maticový zápis homogenní soustavy rovnic (1.2.9). □

Poznámka 1.2.8. Ve Větě 1.2.5 jsme ukázali, že charakteristická rovnice, a tím i její kořeny, lineární transformace φ jsou nezávislé na bázi, ve které vyjádříme lineární transformaci pomocí souřadnic. Souřadnice vlastního vektoru jsou ovšem na použitých souřadnicích závislé. Opravdu, jsou-li matice A_φ a B_φ matice φ v různých bázích $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ a S je matice přechodu od první báze k druhé, transformuje se homogenní soustava rovnic

$$(B_\varphi - \lambda E_n)(\mathbf{u}') = (\mathbf{o}) \tag{1.2.10}$$

transformuje do soustavy

$$S^{-1}(A_\varphi - \lambda E_n)S(\mathbf{u}') = (\mathbf{o})$$

t.j., po vynásobení maticí S,

$$(A_\varphi - \lambda E_n)(S(\mathbf{u}')) = (\mathbf{o}). \tag{1.2.11}$$

Je-li tedy vektor $\mathbf{u}'$ řešením homogenní soustavy (1.2.10) je vlastním vektorem lineární transformace φ příslušným vlastní hodnotě λ a vyjádřeným v souřadnicích vyhledem k bázi $\mathcal{V}'$. Řešení homogenní soustavy (1.2.11) je ale potom vektor o souřadnicích $S(\mathbf{u}')$, což je tentýž vlastní vektor jen vyjádřený v souřadnicích vzhledem k bázi $\mathcal{V}$. ♢

Poznámka 1.2.9. Uvědomme si, že jednotková matice E_n je maticí identické lineární transformace na V_n vyjádřené v libovolné bázi. Je tedy matice $(A_\varphi - \lambda\, E_n)$ maticí lineární transformace $(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_{V_n})$ a vlastní vektor φ patří do jádra $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_{V_n})$. ♢

Poznámka 1.2.10. Posloupnost vlastních hodnot lineární transformace φ se nazývá *spektrum.* $\diamondsuit$

Příklad 1.2.2. Jestliže hodnost lineární transformace φ na V_n je menší než n, potom $\mathrm{Ker}(\varphi)$ je netriviální vektorový podprostor (dimenze $n - h(\varphi)$) a každý nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ je vlastní vektor φ pro vlastní hodnotu $\lambda = 0$, opravdu $\varphi(\mathbf{u}) = 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$. $\heartsuit$

Úloha 1.2.1. Lineární transformace na $\mathbb{R}^2$ je dána maticí $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Určete její vlastní čísla a vlastní vektory.

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 12\,\lambda + 27 = 0$ a jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 9$ a $\lambda_2 = 3$. Potom vlastní hodnotě $\lambda_1 = 9$ odpovídají vlastní vektory, které jsou řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} -u_1 - 5\,u_2 &= 0\,, \\ -u_1 - 5\,u_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

a podobně vlastní hodnotě $\lambda_2 = 3$ odpovídají vlastní vektory, které jsou řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 5\,u_1 - 5\,u_2 &= 0\,, \\ -u_1 + u_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Jsou tedy příslušné vlastní vektory $\mathbf{u}_1 = k\,(-5; 1)$ a $\mathbf{u}_2 = l\,(1; 1)$, kde k, l jsou libovolná nenulová reálná čísla. $\triangle$

Věta 1.2.7. *Nechť φ je lineární transformace na V. Pak vlastní vektory φ příslušné navzájem různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou navzájem různé vlastní hodnoty a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ příslušné vlastní vektory lineární transformace φ. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, $1 \leq k \leq r$, je maximální posloupnost lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Dále budeme postupovat sporem. Předpokládejme $k < r$, pak $\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{u}_i$. Aplikujeme na tuto rovnost lineární transformaci φ a dostaneme z linearity φ

$$\varphi(\mathbf{u}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\varphi(\mathbf{u}_i)\,.$$

Protože jsou vektory $\mathbf{u}_i$ vlastní vektory pro λ_i, $i = 1, \ldots, r$, dostaneme

$$\lambda_{k+1}\,\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\,c_i\,\mathbf{u}_i$$

a současně musí být

$$\lambda_{k+1}\,\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k+1}\,c_i\,\mathbf{u}_i.$$

Porovnáním koeficientů u $\mathbf{u}_i$, $i = 1,\dots,k$, dostaneme

$$\lambda_i\,c_i = \lambda_{k+1}\,c_i.$$

Tato rovnost je splněna buďto pro $\lambda_i = \lambda_{k+1}$, což je spor s předpokladem, že vlastní hodnoty byly různé, nebo pro $c_i = 0$, $\forall i = 1,\dots,k$, ale potom $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{o}$, což je spor s definicí vlastního vektoru. Musí tedy být $k = r$ a všechny vlastní vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r$ jsou lineárně nezávislé. □

Důsledek 1.2.3. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V_n, která má n navzájem různých vlastních hodnot v $\mathbb{T}$. Pak V_n je přímým součtem n jednodimenzionálních podprostorů, které jsou invariantní vzhledem k φ a ve vhodné bázi prostoru V_n je matice A_φ diagonální. Rozklad V_n na přímý součet invariantních podprostorů je jednoznačný, až na jejich pořadí.

Důkaz. Jestliže má charakteristická rovnice φ celkem n navzájem různých kořenů $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, potom podle Věty 1.2.7 má n odpovídajících vlastních vektorů $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$, které tvoří bázi V_n. Matice A_φ má v této bázi diagonální tvar, kde na diagonále budou vlastní hodnoty $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ v tom pořadí, v jakém použijeme vektory v bázi $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$. □

Věta 1.2.7 hovoří o vlastních vektorech lineární transformace, které přísluší různým kořenům charakteristického polynomu. Jaká situace ale nastane pro stejné kořeny, t.j. kořeny s násobností vyšší než jedna? Předpokládejme, že charakteristická rovnice má k-násobný kořen λ, kde $k > 1$. V tomto případě homogenní soustava rovnic (1.2.9) pro výpočet vlastních vektorů může mít jako řešení podprostor dimenze 1 až k. Že mohou nastat všechny možnosti si budeme demonstrovat v následující úloze.

Úloha 1.2.2. Lineární transformace na $\mathbb{R}^3$ jsou dány maticemi:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace φ_{A_i}, $i = 1, 2, 3$.

Řešení: a) Charakteristický polynom je $|A_1 - \lambda\,E_3| = (1-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 1$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je potom $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a odtud je každý vlastní vektor nenulovým násobkem vektoru $(1;0;0)$, t.j. dimenze prostoru obecného řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů je jedna.

b) Charakteristický polynom je $|A_2 - \lambda\, E_3| = (1-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 1$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je potom $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a odtud je každý vlastní vektor lineární kombinací vektorů $(1;0;0)$ a $(0;1;0)$, t.j. dimenze prostoru obecného řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů je dvě.

c) Charakteristický polynom je $|A_3 - \lambda\, E_3| = (3-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 3$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je nulová, t.j. dimenze prostoru obecného řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů je tři. $\triangle$

Poznámka 1.2.11. Zvláštní roli mezi vícenásobnými kořeny charakteristického polynomu hraje nulový kořen. Z Příkladu 1.2.2 víme, že řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 0$ je jádro lineární transformace φ. Má-li jádro dimenzi k, $k \geq 1$, je 0 nejméně k-násobným kořenem charakteristického polynomu. Opravdu, protože v tomto případě je hodnost $h(\varphi) = h(A_\varphi) = (n-k)$, jsou všechny hlavní minory řádu většího než $(n-k)$ matice A_φ nulové a z Poznámky 1.2.7 vyplývá, že 0 je nejméně k-násobným kořenem charakteristického polynomu. Naopak, je-li 0 právě k-násobným kořenem charakteristického polynomu, musí být charakteristický polynom tvaru

$$(-\lambda)^k \left((-\lambda)^{n-k} + J_1\,(-\lambda)^{n-k-1} + J_{n-k-1}\,(-\lambda) + J_{n-k}\right),$$

kde $J_{n-k} \neq 0$. To znamená, že hodnost $h(A_\varphi)$ je právě $(n-k)$ a dimenze homogenní soustavy pro výpočet vlastních směrů pro $\lambda = 0$, t.j. jádra φ, je k. $\diamondsuit$

Obecně, pro k-násobný kořen charakteristického polynomu lineární transformace platí věta, jejíž důkaz přesahuje rámec tohoto textu a uvedeme si ji proto bez důkazu. Důkaz viz např. [Sl].

Věta 1.2.8. *Nechť λ je právě k-násobným kořenem charakteristického polynomu lineární transformace φ na V_n, $n \geq k \geq 1$. Potom existuje k-dimenzionální vektorový podprostor U_k prostoru V_n, který je invariantní vzhledem k φ. Navíc existuje taková báze V_n, že maticový diagonální blok příslušný podprostoru U_k je horní trojúhelníková matice, která má na diagonále hodnotu λ.* $\square$

Poznámka 1.2.12. Je-li $k = 1$, je trojúhelníková matice tvořena jediným prvkem. Pro $k > 1$ je horní trojúhelníková matice v předchozí Větě 1.2.8 matice, která má všechny prvky pod diagonálou nulové. Všechny tři případy v Úloze 1.2.2 byly tohoto typu, přitom v případě c) je příslušný 3-rozměrný invariantní podprostor přímým součtem jednodimenzionálních invariantních podprostorů. To platí i obecně, t.j. k-dimenzionální vektorový podprostor U_k, který přísluší k-násobnému kořeni λ charakteristického polynomu, $k \geq 2$, může být přímým součtem invariantních podprostorů nižších dimenzí. Tento rozklad už ale není jednoznačný. $\diamondsuit$

Popišme nyní (bez důkazu), jak lze nalézt invariantní podprostor U_k příslušný k-násobnému kořeni λ charakteristického polynomu lineární transformace φ na V_n. Máme $U_k = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k$, kde $(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k$ je lineární transformace, která vznikne složením transformace $(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})$ samé se sebou k-krát. Důkaz toho, že pro k-násobný kořen charakteristického polynomu φ je dimenze jádra $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k$ právě k a že U_k je invariantní podprostor lineární transformace φ lze nalézt např. v textu [Sl]. Snadno se vidí, že všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ patří do U_k. Opravdu, je-li $\mathbf{u}$ vlastním vektorem příslušným λ, je

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$$

a tedy i $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k = U_k$. Máme tedy $L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j) \subseteq U_k$, kde $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j$ jsou lineárně nezávislé vlastní vektory, které přísluší λ. Pro $j = k$ je $\varphi | U_k$ lineární transformace, která má v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ diagonální (t.j. horní trojúhelníkovou) matici s hodnotou λ na diagonále.

Je-li $j < k$, hledáme další vektor $\mathbf{u}_{j+1} \notin L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j)$ takový, že

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{u}_{j+1}) = \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{o} \neq \mathbf{w}_1 \in L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j)\,, \tag{1.2.12}$$

t.j. takový, že

$$\varphi(\mathbf{u}_{j+1}) = \lambda\,(\mathbf{u}_{j+1}) + \mathbf{w}_1 \in L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})\,. \tag{1.2.13}$$

Takový vektor patří do U_k, protože pro $\mathbf{w}_1 = \sum_{i=1}^{j} a_i\,\mathbf{u}_i$ je

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{w}_1) = \sum_{i=1}^{j} a_i\,\varphi(\mathbf{u}_i) - \lambda \sum_{i=1}^{j} a_i\,\mathbf{u}_i = \mathbf{o}\,,$$

a tedy

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^2(\mathbf{u}_{j+1}) = \mathbf{o}$$

Přidáme vektor $\mathbf{u}_{j+1}$ do posloupnosti nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}$ a v dalším kroku hledáme vektor $\mathbf{u}_{j+2} \notin L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j+1})$, takový, že

$$(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_{V_n})(\mathbf{u}_{j+2}) = \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{o} \neq \mathbf{w}_2 \in L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j+1})\,. \tag{1.2.14}$$

Takový vektor patří do U_k, protože $(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_{V_n})^2(\mathbf{w}_2) = \mathbf{o}$, a tedy $(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_{V_n})^3(\mathbf{u}_{j+2}) = \mathbf{o}$. Přidáme ho do posloupnosti nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+2}$. Takto pokračujeme, až po $(k-j)$ krocích proces ukončíme. Potom se snadno vidí, že $\varphi | U_k$ má v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ horní trojúhelníkovou matici, kde na diagonále je λ a nad diagonálou jsou 0 pro vlastní vektory příslušné λ a hodnoty, které odpovídají zvoleným vektorům $\mathbf{w}_i$ pro vektory $\mathbf{u}_{j+i}$, $i = 1, \dots, k-j$.

Úloha 1.2.3. Lineární transformace na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ukažte, že charakteristický polynom má trojnásobný kořen a najděte takovou bázi, že v ní má φ_A horní trojúhelníkovou matici.

Řešení: Charakteristický polynom je $|A_1 - \lambda\, E_3| = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 2$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je potom $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a odtud je každý vlastní vektor nenulovým násobkem vektoru $\mathbf{u}_1 = (0; 0; 1)$. Dále řešíme soustavu rovnic $(\varphi_A - 2\, \mathrm{id})(\mathbf{x}) = a\, \mathbf{u}_1$, $a \neq 0$, t.j. řešíme soustavu nehomogeních rovnic

$$\begin{array}{rrrcl} & 2\, x_2 & & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ 2\, x_1 & +2\, x_2 & & = & a\,. \end{array}$$

Řešením je např., pro $a = 2$, vektor $\mathbf{u}_2 = (1; 0; 1)$. V dalším kroku hledám vektor $(\varphi_A - 2\, \mathrm{id})(\mathbf{x}) = a\, \mathbf{u}_1 + b\, \mathbf{u}_2$, $a^2 + b^2 \neq 0$, t.j. řešíme soustavu nehomogeních rovnic

$$\begin{array}{rrrcl} & 2\, x_2 & & = & b \\ & & 0 & = & 0 \\ 2\, x_1 & +2\, x_2 & & = & a + b\,. \end{array}$$

Řešení je např., pro $a = 2, b = 2$, vektor $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 1)$. Protože je $\varphi_A(\mathbf{u}_1) = (0; 0; 2) = 2\, \mathbf{u}_1$, $\varphi_A(\mathbf{u}_2) = (2; 0; 4) = 2\, \mathbf{u}_1 + 2\, \mathbf{u}_2$ a konečně $\varphi_A(\mathbf{u}_3) =$

$(4;2;6) = 2\,\mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2 + 2\,\mathbf{u}_3$, je matice transformace v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Poznamenéjme ještě, že tato matice není určena jednoznačně, protože jsme provedli celou řadu voleb při výběru vektorů báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ a tyto volby ovlivní podobu matice B. △

Úloha 1.2.4. Nechť má lineární transformace φ vlastní vektor $\mathbf{u}$, který přísluší vlastní hodnotě λ. Dokažte, že $\varphi^k(\mathbf{u}) = \lambda^k\,\mathbf{u}$ pro každé přirozené k a φ^k je lineární transformace, která vznikne složením φ samého se sebou k-krát. △

1.3 Rozklad reálného vektorového prostoru na invariantní podprostory

Ve "středoškolské" geometrii se zabýváme pouze reálnými bodovými (afinními, euklidovskými) prostory. Proto úvahy o invariantních prostorech z části 1.2 budeme specifikovat pro těleso reálných čísel $\mathbb{R}$. Předpokládejme tedy, že V_n je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Potom v libovolné bázi je matice lineární transformace φ na V_n reálná čtvercová matice a charakteristický polynom $|A_\varphi - \lambda\,E_n|$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty.

Z algebry, [Ho93, Ho94, Ro], víme, že charakteristický polynom nad $\mathbb{R}$ nemusí být obecně řešitelný v $\mathbb{R}$. Při hledání kořenů charakteristického polynomu a příslušných vlastních vektorů tak mohou nastat následující situace.

A) Charakteristický polynom má pouye reálné kořeny.

B) Charakteristický polynom má nejméně jednu dvojici komplexně sdružených kořenů.

Rozeberme si nyní jednotlivé možnosti.

A) Má-li charekteristická rovnice lineární transformace φ na V_n celkem n různých reálných kořenů, je podle Důsledku 1.2.3 V_n přímým součtem n jednodimenzionálních vlastních směrů a v bázi, která je tvořena vlastními vektory, má matice A_φ diagonální tvar, kde na diagonále jsou vlastní hodnoty φ.

Úloha 1.3.1. Lineární transformace φ na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$. Určete vlastní čísla a vlastní vektory φ.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A-\lambda\,E_3| = \lambda^3-11\lambda^2+15\lambda+27$, jeho kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ a $\lambda_3 = 9$. Matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) pro λ_1 je $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ a obecné řešení této soustavy je generováno vektorem $\mathbf{u}_1 = (-2; 4; 7)$. Dále matice pro λ_2 je $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ a obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{u}_2 = (-2; 0; 1)$. Konečně matice pro λ_3 je $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & -6 \end{pmatrix}$ a obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{u}_3 = (2; -6; 7)$. Snadno se vidí, že $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou lineárně nezávislé. Potom v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ má matice lineární transformace φ tvar $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. $\triangle$

Má-li charakteristický polynom reálný kořen s násobností $k > 1$, potom mu odpovídá k dimenzionální invariantní podprostor U_k. V závěru části 1.2 a Úloze 1.2.3 jsme ukázali, že v tomto případě můžeme nalézt bázi U_k takovou, že odpovídající matice je horní trojúhelníková matice řádu k.

B) Nechť má nyní charakteristický polynom lineární transformace φ dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha + i\,\beta$ a $\bar{\lambda} = \alpha - i\,\beta$. V tomto případě předpokládáme, že λ a $\bar{\lambda}$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace na komplexním vektorovém prostoru, která má stejnou reálnou matici, jako φ. To můžeme udělat např. konstrukcí komplexního rozšíření reálného vektorového prostoru a konstrukcí komplexního rozšíření lineární transformace, které jsou popsány ve skriptu [JaSe].

Podobným způsobem, jako se v teorii čísel sestrojí komplexní rozšíření tělesa reálných čísel v těleso komplexních čísel, sestrojíme i komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru V.

Uvažujme množinu $V \times V$ a definujme na ní operaci sčítání a násobení komplexním číslem následujícím způsobem

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d})\,, \tag{1.3.1}$$

$$(\alpha + i\beta)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}, \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a})\,. \tag{1.3.2}$$

Snadno se ověří, že $V \times V$ spolu s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými (1.3.1) a (1.3.2) je vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice 1.3.1. Množinu $V \times V$ s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými vztahy (1.3.1) a (1.3.2) budeme nazývat *komplexní rozšíření* reálného vektorového prostoru V a označovat $V^{\mathbb{C}}$.

Uvažujme podmnožinu $M = \{(\mathbf{u}, \mathbf{o}) \in V \times V\} \subset V^{\mathbb{C}}$. Snadno ověříme, že M je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení reálnými čísly. Uvažujme zobrazení V na M, které přiřadí vektoru $\mathbf{u} \in V$ vektor $(\mathbf{u}, \mathbf{o}) \in M$. Toto zobrazení je izomorfizmem vektorového prostoru V na M. Při ztotožnění V a M tedy dostáváme, že $V \subset V^{\mathbb{C}}$.

Poznámka 1.3.1. V je podmnožina ve $V^{\mathbb{C}}$, ale ne vektorový podprostor, protože V je definováno nad $\mathbb{R}$ a $V^{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$. $\diamondsuit$

Nyní můžeme každý vektor $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^{\mathbb{C}}$ psát následujícím způsobem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + (\mathbf{o}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + i(\mathbf{v}, \mathbf{o}) = \mathbf{u} + i\mathbf{v}\,.$$

Můžeme tedy formálně psát $V^{\mathbb{C}} = V \oplus i\,V$.

Vektor $\mathbf{u} \in V$ budeme nazývat *reálnou složkou (částí)* a vektor $\mathbf{v} \in V$ *imaginární složkou (částí)* vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$ a označovat $\mathbf{u} = \mathfrak{Re}(\mathbf{w})$, $\mathbf{v} = \mathfrak{Im}(\mathbf{w})$. Nulovým vektorem $V^{\mathbb{C}}$ je $(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = \mathbf{o} + i\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Věta 1.3.1. *Vektory $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle \in V$ jsou lineárně nezávislé v prostoru V tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně nezávislé v prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Důkaz viz [JaSe]. $\square$

Důsledek 1.3.1. Každá báze prostoru V_n je i bází prostoru $V_n^{\mathbb{C}}$.

Důkaz. Opravdu, je-li $\mathcal{V} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ je báze vektorového prostoru V_n. Potom vektory báze $\mathcal{V}$ jsou lineárně nezávislé ve $V^{\mathbb{C}}$ a musíme dokázat, že $\mathcal{V}$ je systém generátorů $V^{\mathbb{C}}$. Buď $\mathbf{x} + i\,\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$ libovolný vektor. Potom existují reálná čísla $x_1; \ldots; x_n; y_1; \ldots; y_n$ tak, že $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j$. Odtud

$$\mathbf{x} + i\,\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j + i \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + i\,y_j)\mathbf{u}_j,$$

což dokazuje náš Důsledek 1.3.1. $\square$

Definice 1.3.2. Každá báze prostoru $V^{\mathbb{C}}$, která je současně i bází V, se nazývá *reálná báze*.

Věta 1.3.2. *Buď U podprostor vektorového prostoru V. Potom $U^{\mathbb{C}}$ je podprostorem vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Věta 1.3.2 je přímým důsledkem definice komplexního rozšíření vektorového prostoru. □

Definice 1.3.3. Podprostor W vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$, který je komplexním rozšířením podprostoru $U \subseteq V$, se nazývá *reálný podprostor* a označujeme ho $U^{\mathbb{C}}$.

Ne každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ je reálný, ale každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ obsahuje nějaký reálný podprostor, minimálně triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$.

Vektory $\mathbf{u} + i\,\mathbf{v}$ a $\mathbf{u} - i\,\mathbf{v}$ se nazývají vektory *komplexně sdružené.* Je-li $\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$, budeme komplexně sdružený vektor označovat $\overline{\mathbf{w}}$. Je-li $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ vektorový podprostor, je $\overline{W} = \{\overline{\mathbf{w}} | \mathbf{w} \in W\}$ vektorový podprostor nazývaný *komplexně sdružený podprostor* k podprostoru W.

Pro komplexně sdružené vektory ve $V^{\mathbb{C}}$ platí vztahy obdobné vztahům pro komplexně sdružená čísla. Pro $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{C}$, platí

$$\overline{\mathbf{w} + \mathbf{w}'} = \overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'}\,,$$
$$\overline{k\mathbf{w}} = \overline{k}\;\overline{\mathbf{w}}\,.$$

kde $\overline{k}$ je komplexně sdružené číslo k číslu k. Dále platí $\mathfrak{Re}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w} + \overline{\mathbf{w}})$, $\mathfrak{Im}(\mathbf{w}) = \frac{i}{2}(\overline{\mathbf{w}} - \mathbf{w})$.

Věta 1.3.3. *Nechť V a U jsou reálné vektorové prostory a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}}$ takové, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ je $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$. Je-li lineární zobrazení φ prosté, je i lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ prosté a je-li φ surjektivní, je i $\varphi^{\mathbb{C}}$ surjektivní.*

Důkaz. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Definujme zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ vztahem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\,\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + i\,\varphi(\mathbf{y}) \tag{1.3.3}$$

pro každé $\mathbf{x} + i\,\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$. Je zřejmé, že $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$. Ověříme, že $\varphi^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{x}_j + i\,\mathbf{y}_j \in V^{\mathbb{C}}$, $\alpha_j + i\,\beta_j \in \mathbb{C}$,

$j = 1, 2$. Potom

$$\begin{gathered}
\varphi^{\mathbb{C}}((\alpha_1 + i\,\beta_1)(\mathbf{x}_1 + i\,\mathbf{y}_1) + (\alpha_2 + i\,\beta_2)(\mathbf{x}_2 + i\,\mathbf{y}_2)) = \\
= \varphi^{\mathbb{C}}((\alpha_1\mathbf{x}_1 - \beta_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 - \beta_2\mathbf{y}_2) + i\,(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \beta_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \beta_2\mathbf{x}_2)) = \\
= \varphi(\alpha_1\mathbf{x}_1 - \beta_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 - \beta_2\mathbf{y}_2) + i\,\varphi(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \beta_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \beta_2\mathbf{x}_2) = \\
= \alpha_1\varphi(\mathbf{x}_1) - \beta_1\varphi(\mathbf{y}_1) + \alpha_2\varphi(\mathbf{x}_2) - \beta_2\varphi(\mathbf{y}_2) + \\
+ i\,(\alpha_1\varphi(\mathbf{y}_1) + \beta_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \alpha_2\varphi(\mathbf{y}_2) + \beta_2\varphi(\mathbf{x}_2)) = \\
= (\alpha_1 + i\,\beta_1)(\varphi(\mathbf{x}_1) + i\,\varphi(\mathbf{y}_1)) + (\alpha_2 + i\,\beta_2)(\varphi(\mathbf{x}_2) + i\,\varphi(\mathbf{y}_2)) = \\
= (\alpha_1 + i\,\beta_1)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_1 + i\,\mathbf{y}_1) + (\alpha_2 + i\,\beta_2)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_2 + i\,\mathbf{y}_2).
\end{gathered}$$

Předpokládejme, že $\psi^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ takové, že $\psi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$. Potom z linearity dostáváme, že musí platit vztah (1.3.3), a tedy $\varphi^{\mathbb{C}} \equiv \psi^{\mathbb{C}}$.

Nechť je lineární zobrazení φ prosté a $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_1 + i\,\mathbf{y}_1) = \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_2 + i\,\mathbf{y}_2)$. Potom z (1.3.3) je $\varphi(\mathbf{x}_1) = \varphi(\mathbf{x}_2)$ a $\varphi(\mathbf{y}_1) = \varphi(\mathbf{y}_2)$, a tedy musí být $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ a $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$, což znamená, že i $\varphi^{\mathbb{C}}$ je prosté zobrazení.

Nechť lineární zobrazení φ je surjektivní zobrazení. Nechť $\mathbf{x}' + i\,\mathbf{y}' \in U^{\mathbb{C}}$ je libovolný vektor. Protože φ je surjektivní zobrazení, existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ takové, že $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ a $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'$. Potom $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\,\mathbf{y}) = \mathbf{x}' + i\,\mathbf{y}'$, a tedy i $\varphi^{\mathbb{C}}$ je surjektivní. $\square$

Definice 1.3.4. Zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ definované ve Větě 1.3.3 se nazývá *komplexní rozšíření lineárního zobrazení φ.*

Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, respektive $\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$, je báze vektorového prostoru V_n, respektive U_m. Nechť vzhledem k těmto bázím má lineární zobrazení φ z V_n do U_m matici A_φ. Protože každá báze prostoru V_n je i bází prostoru $V_n^{\mathbb{C}}$ a podobně, každá báze prostoru U_m je i bází prostoru $U_m^{\mathbb{C}}$, můžeme vyjádřit i matici $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$.

Věta 1.3.4. *Pro libovolné lineární zobrazení φ z V_n do U_m jsou matice A_φ a $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k reálným bázím ve $V_n^{\mathbb{C}}$ a $U_m^{\mathbb{C}}$ totožné.*

Důkaz. Nechť v bázích $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ ve V_n a $\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$ v U_m je A_φ matice lineárního zobrazení φ z V_n do U_m. Podle (1.3.3) je $(\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) = (\varphi(\mathbf{x})) + i(\varphi(\mathbf{y})) = A_\varphi\,(\mathbf{x}) + i\,A_\varphi\,(\mathbf{y}) = A_\varphi\,(\mathbf{x} + i\,\mathbf{y})$. $\square$

Poznámka 1.3.2. Je třeba si uvědomit, jaký je rozdíl mezi souřadnicovým vyjádřením libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ a komplexním rozšířením lineárního zobrazení z V do U. Zatímco matice komplexního rozšíření reálného lineárního zobrazení vzhledem k reálným bázím je definována nad $\mathbb{R}$, je obecně matice libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ definována nad $\mathbb{C}$. $\diamondsuit$

Nyní uvažujme lineární transformaci φ na reálném vektorovém prostoru V_n a uvažujme lineární transformaci $\varphi^{\mathbb{C}}$ na komplexním rozšíření $V_n^{\mathbb{C}}$, která vznikne komplexním rozšířením φ. Potom (reálné) vlastní vektory, které přísluší reálným kořenům charakteristického polynomu φ jsou i vlastní (reálné) vektory lineární transformace $\varphi^{\mathbb{C}}$. Má-li ale charakteristický polynom dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha + i\,\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\,\beta$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$, potom lineární transformace $\varphi^{\mathbb{C}}$ má dvojici vlastních vektorů, které jsou navzájem komlexně sdružené. Opravdu, je-li $\mathbf{w} \in V_n^{\mathbb{C}}$ vlastní vektor $\varphi^{\mathbb{C}}$ příslušný λ, t.j.

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda\,\mathbf{w}\,,$$

potom

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{w}}\,.$$

To vyplývá z toho, že pro $\varphi^{\mathbb{C}}$ platí $\overline{\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w})} = \varphi^{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{w}})$, což je vidět přímo z (1.3.3). Potom vlastní vektor příslušný $\bar{\lambda}$ je vektor komplexně sdružený s $\mathbf{w}$. Přitom $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$ je vektor takový, že reálné vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou lineárně nezávislé. Opravdu, protože λ a $\bar{\lambda}$ jsou různé kořeny charakteristického polynomu, musí jim odpovídat podle Věty 1.2.7 lineárně nezávislé vlastní vektory ve $V_n^{\mathbb{C}}$. Ale $\mathbf{w}$ a $\bar{\mathbf{w}}$ jsou lineárně nezávisle ve $V_n^{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou lineárně nezávislé ve V_n.

Nechť $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_n$, je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda = \alpha + i\,\beta$. Potom

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1) + i\,\varphi(\mathbf{v}_2)$$

a současně

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda\,\mathbf{w} = (\alpha + i\,\beta)\,(\mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2) = \alpha\,\mathbf{v}_1 - \beta\,\mathbf{v}_2 + i\,(\beta\,\mathbf{v}_1 + \alpha\,\mathbf{v}_2)\,.$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek dostaneme

$$\varphi(\mathbf{v}_1) = \alpha\,\mathbf{v}_1 - \beta\,\mathbf{v}_2\,, \quad \varphi(\mathbf{v}_2) = \beta\,\mathbf{v}_1 + \alpha\,\mathbf{v}_2\,,$$

t.j. dvoudimenzionální podprostor $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subseteq V_n$ je invariantní vzhledem k φ a příslušný blok řádu dva v matici A_φ vzhledem bázi, kde použijeme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, je matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Poznámka 1.3.3. V předchozích úvahách jsme uvažovali pouze jednonásobné komplexní kořeny charakteristického polynomu. Pro vícenásobné komplexní kořeny bychom mohli aplikovat Větu 1.2.8 pro těleso komplexních čísel. Vzhledem k tomu, že dále se budeme zabývat především prostory dimenze dvě a tři, nemůže tato situace nastat a proto se ji dále nebudeme zabývat. $\diamondsuit$

Poznámka 1.3.4. Komplexně sdružené kořeny charakteristického polynomu lineární transformace φ na reálném vektorovém prostoru V_n jsou vlastní hodnoty lineární transformace $\varphi^{\mathbb{C}}$, ale nejsou to vlastní hodnoty pro φ protože nepatří do tělesa $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Předešlé úvahy nyní můžeme shrnout. Nechť má charakteristický polynom lineární transformace φ na reálném vektorovém prostoru V_n celkem $m \geq 0$ reálných různých kořenů s násobností $k_i \geq 1$, $i = 0, \ldots, m$, a celkem $l \geq 0$ dvojic různých komplexně sdružených jednonásobných kořenů, t.j. $n = 2l + \sum_{i=0}^{m} k_i$. Potom V_n je přímý součet invariantních podprostorů

$$V_n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$$

kde U_i je k_i-dimenzionální invariantní podprostor, který odpovídá k_i-násobnému i-tému reálnému kořeni charakteristického polynomu a W_j, $j = 0, \ldots, l$, je dvoudimenzionální invariantní podprostor, který odpovídá j-tému komplexnímu kořeni charakteristického polynomu. Tento rozklad je až na pořadí jednoznačný. Navíc, existuje taková báze V_n, že matice A_φ je blokově diagonální s $(m + l)$ diagonálními bloky A_{k_i} a B_j, kde A_{k_i} je horní trojúhelníková matice řádu k_i příslušná i-tému reálnému kořeni charakteristického polynomu a $B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, $\beta_j \neq 0$, jsou matice řádu 2 příslušné j-tému komplexnímu kořeni $\lambda_j = \alpha_j + i\,\beta_j$ charakteristického polynomu.

Úloha 1.3.2. Lineární transformace φ na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Rozložte $\mathbb{R}^3$ na invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci φ a najděte takovou bázi, ve které se matice φ rozpadá na diagonální bloky.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda\, E_3| = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5$, jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Matice homogenní soustavy rovnic

(1.2.9) pro $\lambda_1 = 1$ je $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ a obecné řešení této soustavy je generováno vektorem $\mathbf{u}_1 = (1;2;1)$. Dále pro komplexní kořen $\lambda_2 = 2+i$ uvažujeme homogenní soustavu rovnic (1.2.9) nad komplexními čísly s maticí $\begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 6 & -5-i & 2 \\ 8 & -6 & 3-i \end{pmatrix}$. Obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{w} = (1;1-i;-2i) = (1;1;0) + i\,(0;-1;-2) = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$. Potom $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus W_2$, kde $U_1 = L(\mathbf{u}_1)$ je vlastní směr příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ a $W_2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je dvoudimenzionální invariantní podprostor příslušný kořenům $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Snadno se vidí, že v bázi $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ má φ matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Opravdu $\varphi(\mathbf{u}_1) = (1;2;1) = 1\,\mathbf{u}_1$, $\varphi(\mathbf{v}_1) = (2;3;2) = 2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ a $\varphi(\mathbf{v}_2) = (1;-1;-4) = \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2$. $\triangle$

Úloha 1.3.3. Lineární transformace φ na $\mathbb{R}^2$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Ukažte, že kořeny charakteristického polynomu jsou komplexne sdružené a nalezněte takovou bázi, ve které má matice φ tvar $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ukažte, že v $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{C}}$ můžeme nalézt komplexní bázi takovou, že vzhledem k ní má $\varphi^{\mathbb{C}}$ diagonální tvar.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda\,E_2| = \lambda^2 + 1$, t.j. jeho kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$. Potom matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) nad komplexními čísly je $\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix}$. Obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{w} = (1;-1+i) = (1;-1) + i\,(0;1) = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$. Potom $\varphi(\mathbf{v}_1) = (0;-1) = -\mathbf{v}_2$ a $\varphi(\mathbf{v}_2) = (1;-1) = \mathbf{v}_1$, t.j. v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ prostoru $\mathbb{R}^2$, má φ matici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Uvažujme nyní lineární transformaci $\varphi^{\mathbb{C}}$ v $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{C}}$ a vyjádřeme její matici vzhledem k bázi $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$, $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{v}_1 - i\,\mathbf{v}_2$. Matice přechodu od reálné báze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ke komplexní bázi $\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}$ je komplexní matice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Její inverzní matice je $S^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Potom matice $\varphi^{\mathbb{C}}$ vzhledem k bázi $\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}$ musí být

$$-\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}-i & -1\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

1.4 Ortogonální zobrazení a transformace

Naše úvahy uzavřeme ortogonálními lineárními zobrazeními a transformacemi euklidovských vektorových prostorů.

Připomeňme, že euklidovský vektorový prostor je reálný vektorový prostor V se skalárním součinem, který zanačíme $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Všechny báze $\mathcal{E} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ euklidovského vektorového prostoru V_n uvažujeme ortonormální, t.j. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pro $i \neq j$ a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$, $i, j = 1, \dots, n$. V libovolné ortonormální bázi má potom skalární součin vyjádření

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \begin{pmatrix}u_1 & \dots & u_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} = (\mathbf{u})^T(\mathbf{v}) = (\mathbf{u})^T E_n(\mathbf{v}),$$

kde $(\mathbf{u})^T$ je řádková matice souřadnic vektoru $\mathbf{u}$, která vznikne transponováním sloupcové matice $(\mathbf{u})$.

Definice 1.4.1. Lineární zobrazení φ z euklidovského vektorového prostoru V do euklidovského vektorového prostoru W se nazývá *ortogonální zobrazení* z V do W, jestliže platí

$$\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \tag{1.4.1}$$

pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Je-li navíc φ bijektivní, nazývá se izomorfismus euklidovského vektorového prostoru V na W. Euklidovské prostory V a W se potom nazývají *izomorfní.*

Je-li φ ortogolální zobrazení V na sebe, nazývá se *ortogonální transformace* euklidovského vektorového prostoru V.

Ortogonální lineární zobrazení tedy zachovává skalární součin. Jako důsledek tak dostáváme, [Ho07].

Důsledek 1.4.1. Nechť φ je ortogonální zobrazení z V do W. Pak

1) $\| \varphi(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \|$ pro každé $\mathbf{u} \in V$.

2) Ortogonální transformace zachovává odchylku vektorů, t.j. pro dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je $\sphericalangle(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

3) Ortonormální posloupnost $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ ve V se zobrazí na ortonormální posloupnost $\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_k)$ v W.

4) φ je injektivní zobrazení, t.j. $\dim V \leq \dim W$. $\diamond$

Věta 1.4.1. *Nechť φ je ortogonální zobrazení z V do W. Pak vzhledem k libovolným ortonormálním bázím ve V a W splňuje matice A_φ podmínku*

$$A_\varphi^T A_\varphi = E_n\,. \tag{1.4.2}$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{E} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $\mathcal{F} = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle$ jsou ortonormální báze ve V_n a W_m. Nechť A_φ je matice ortogonálního zobrazení φ z V_n do W_m vzhledem k těmto bázím, t.j. $\varphi(\mathbf{u}) = A_\varphi(\mathbf{u})$. Potom platí

$$\begin{aligned}(\mathbf{u})^T E_n(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u})\cdot\varphi(\mathbf{v}) &= (\varphi(\mathbf{u}))^T E_m\,(\varphi(\mathbf{v}))\\ &= (A_\varphi(\mathbf{u}))^T E_m\,(A_\varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u})^T A_\varphi^T A_\varphi(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Porovnáním prvního a posledního výrazu dostaneme $A_\varphi^T A_\varphi = E_n$. □

Nechť nyní je φ ortogonální transformace na euklidovském vektorovém prostoru V_n. Podmínka (1.4.2) znamená, že matice ortogonální transformace vzhledem k libovolné ortonormální bázi je ortonormální čtvercová matice. Připomeňme, že v tomto případě je $A_\varphi^T = A_\varphi^{-1}$, $|A_\varphi| = \pm 1$.

Věta 1.4.2. *Nechť φ je ortogonální transformace na V_n. Je-li $U_k \subseteq V_n$, $0 < k < n$, invariantní podprostor transformace φ, je i $(n-k)$-dimenzionální podprostor $U_k^\perp$ invariantní podprostor transformace φ.*

Důkaz. Nechť $U_k \subseteq V_n$ je invariantní podprostor ortogonální transformace φ. Potom pro každý $\mathbf{u} \in U_k$ je i $\varphi(\mathbf{u}) \in U_k$. Protože $\varphi|U_k$ je ortogonální transformace na U_k je i $\varphi^{-1}(\mathbf{u}) \in U_k$. Potom pro každý $\mathbf{v} \in U_k^\perp$ máme

$$\varphi(\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{v})\cdot\varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}\cdot\varphi^{-1}(\mathbf{u}) = 0\,,$$

a tedy $\varphi(\mathbf{v}) \perp \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in U_k$, a $\varphi(\mathbf{v}) \in U_k^\perp$. □

Jako důsledek Věty 1.4.2 tak dostáváme, že má-li ortogonální transformace φ na V_n netriviální invariantní podprostory, je V_n přímým součtem navzájem ortogonálních podprostorů a existuje taková ortonormální báze V_n, že se v ní matice φ rozpadá na ortonormální diagonální bloky.

Platí $\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ a odtud vyplývá, že reálné vlastní hodnoty ortogonální transformace mohou být pouze 1 a (-1). Opravdu, protože pro vlastní vektor $\mathbf{u}$ příslušný vlastní hodnotě λ máme $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{u}$, dostaneme $\|\,\varphi(\mathbf{u})\,\| = |\lambda|\cdot\|\,\mathbf{u}\,\| = \|\,\mathbf{u}\,\|$, t.j. $|\lambda| = 1$. Podobně komplexní kořeny charakteristické rovnice jsou tvaru $\lambda = \cos\alpha \pm i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, t.j. dvourozměrný blok odpovídající komplexnímu λ je ortonormální matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Navíc platí, že vlastní vektory, které patří různým vlastním hodnotám charakteristického polynomu jsou kolmé. Opravdu, je-li $\mathbf{u}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu (-1), máme

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u})\cdot\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(-\mathbf{v})$$

a odtud $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, a tedy $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou kolmé. Vždy je můžeme brát jako jednotkové.

Podobně vlastní vektor, který patří nějaké vlastní hodnotě charakteristického polynomu, je kolmý na dvoudimenzionální invariantní podprostor, který je přiřazen komplexnímu kořeni charakteristické rovnice. Je-li totiž $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$ komplexní vektor příslušný komplexnímu koření $\lambda = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, charakteristické rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 &= \varphi(\mathbf{u})\cdot\varphi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\,,\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2 &= \varphi(\mathbf{u})\cdot\varphi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\cdot(\sin\alpha\,\mathbf{v}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{v}_2)\,.
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
&(\cos\alpha - 1)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1) - \sin\alpha\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,,\\
&\sin\alpha\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1) + (\cos\alpha - 1)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,,
\end{aligned}$$

což nastává pouze pro $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 = 0$ a $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, t.j. vektor $\mathbf{u}$ je kolmý na podprostor $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Pro vektor $\mathbf{v}$ příslušný vlastnímu číslu (-1) dostáváme analogicky stejný výsledek.

Konečně, pro komplexní kořen $\lambda = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, charakteristické rovnice jsou příslušné reálné vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ kolmé, a vždy je můžeme brát jednotkové. Opravdu

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 &= \varphi(\mathbf{v}_1)\cdot\varphi(\mathbf{v}_1) = (\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\\
&= \cos^2\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) - 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\,,
\end{aligned}$$

což upravíme na

$$-\sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) - 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,. \qquad (1.4.3)$$

Pro $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2$ dostaneme stejnou podmínku (1.4.3). Konečně

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \varphi(\mathbf{v}_1) \cdot \varphi(\mathbf{v}_2) = (\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2) \cdot (\sin\alpha\,\mathbf{v}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{v}_2)\\ &= \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\\ &\quad - \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)\,,\end{aligned}$$

t.j.

$$\cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) - 2\,\sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) = 0\,. \quad (1.4.4)$$

Vynásobením (1.4.3) $\cos\alpha$ a (1.4.4) $\sin\alpha$ a sečtením dostaneme

$$-2\,\sin\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 0\,,$$

což je splněno právě tehdy, když $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, t.j. $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ jsou kolmé. Potom ale z (1.4.3) dostaneme

$$\sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) = 0\,,$$

což je splněno právě tehdy, když $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2$, t.j. $\|\,\mathbf{v}_1\,\| = \|\,\mathbf{v}_2\,\|$ a vždy můžeme volit $\|\,\mathbf{v}_1\,\| = \|\,\mathbf{v}_2\,\| = 1$. Pro komplexní kořen $\lambda = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, tak vždy máme otonormální bázi ve 2-dimenzionálním invariantním podprostoru, který odpovídá λ.

Zbývá nám už pouze prodiskutovat případ vícenásobných kořenů charakteristického polynomu ortogonálná transformace φ na V_n. Nechť je nejdříve nějaká vlastní hodnota λ_0 (1 nebo (-1)) k-násobným kořenem charakteristického polynomu ortogonálná transformace. V tomto případě uvažujme libovolný jednotkový vlastní vektor $\mathbf{u}_1$ příslušný k-násobnému kořeni λ_0. Označme $U_1 = L(\mathbf{u}_1)$. Potom je $V_n = U_1 \oplus U_1^\perp$ a v libovolné ortonormální bázi ve V_n, ve které použijeme vektor $\mathbf{u}_1$ jako první bázový vektor, má matice transformace tvar $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$, kde A_{n-1} je ortonormální matice řádu $(n-1)$. Potom $|A_\varphi - \lambda\,E_n| = (\lambda_0 - \lambda)|A_{n-1} - \lambda\,E_{n-1}|$ a tedy zúžení $\varphi|U_1^\perp$ je ortogonální transformace na $U_1^\perp$, jejíž charakteristický polynom dělí charakteristický polynom φ a λ_0 je jeho $(k-1)$-násobným kořenem. Uvažujme libovolný jednotkový vlastní vektor $\mathbf{u}_2 \in U_1^\perp$ příslušný $(k-1)$-násobnému kořeni λ_0 charakteristického polynomu ortogonální transformace $\varphi|U_1^\perp$ a označme $U_2 = L(\mathbf{u}_2)$. Potom $U_1^\perp = U_2 \oplus (U_1 \oplus U_2)^\perp$, t.j. $V_n = U_1 \oplus U_2 \oplus (U_1 \oplus U_2)^\perp$ a v libovolné ortonormální bázi ve V_n, ve které použijeme vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jako první bázové vektory, má matice transformace tvar $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n-2} \end{pmatrix}$, kde A_{n-2} je ortonormální matice řádu

$(n-2)$. Analogicky jako v předchozím kroku postupujeme pro ortogonální transformaci $\varphi|(U_1 \oplus U_2)^\perp$ a dále, až nalezneme celkem k ortonormálních vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ_0. Je tedy k-dimenzionální podprostor příslušný k-násobné vlastní hodnotě přímým součtem k ortogonálních jednodimenzionálních vlastních podprostorů.

Podobně pro l-násobný, $l > 1$, komplexní kořen charakteristického polynomu $\lambda_1 = \cos\alpha_1 + i\,\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1 \neq 0$, uvažujme invariantní 2-dimenzionální podprostor $W_{11} = L(\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21})$. Potom $V_n = W_{11} \oplus W_{11}^\perp$ a zúžení $\varphi|W_{11}^\perp$ na invariantní $(n-2)$-dimenzionální podprostor má charakteristický polynom, pro který je λ_1 $(l-1)$-násobným kořenem. Pro tento kořen existuje dvoudimenzionální podprostor $W_{12} = L(\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{22}) \subseteq W_{11}^\perp$ invariantní vzhledem k $\varphi|W_{11}^\perp$, t.j. i vzhledem k φ. Potom $V_n = W_{11} \oplus W_{12} \oplus (W_{11} \oplus W_{12})^\perp$. Takto postupujeme dále až po l krocích dostaneme l vzájemně ortogonálních 2-dimenzionálních podprostorů takových, že

$$V_n = W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{1l} \oplus (W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{1l})^\perp\,.$$

Dostáváme tak, že l -násobnému komplexnímu kořeni charakteristického polynomu odpovídá $2\,l$ -dimenzionální invariantní podprostor, který je přímým součtem l 2-dimenzionálních navzájem ortogonálních podprostorů. V prostoru V_n potom existuje taková ortonormální báze, že v ní má φ matici v blokově diagonálním tvaru $A = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & B_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{n-2\,l} \end{pmatrix}$, kde blok $B_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$ a $A_{n-2\,l}$ je ortonormální matice řádu $(n-2\,l)$. 0 zde značí nulovou matici příslušného řádu.

Poznámka 1.4.1. Z podoby matice B_1 pro komplexní kořen charakteristického polynomu $\lambda_1 = \cos\alpha_1 + i\,\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1 \neq 0$, vyplývá , že zúžení $\varphi|W_{1j}$, $j = 1, \dots, l$, na 2-dimenzionální podprostor, který odpovídá λ_1 je "otočení" prostoru W_{1j} o úhel α_1. Opravdu $\mathbf{v}_{1j} \cdot \varphi(\mathbf{v}_{1j}) = \mathbf{v}_{1j} \cdot (\cos\alpha_1\,\mathbf{v}_{1j} - \sin\alpha_1\,\mathbf{v}_{2j}) = \cos\alpha_1$ a podobně $\mathbf{v}_{2j} \cdot \varphi(\mathbf{v}_{2j}) = \mathbf{v}_{2j} \cdot (\sin\alpha_1\,\mathbf{v}_{1j} + \cos\alpha_1\,\mathbf{v}_{2j}) = \cos\alpha_1$. Je tedy odchylka $\sphericalangle(\mathbf{v}_{1j}, \varphi(\mathbf{v}_{1j})) = \alpha_1 = \sphericalangle(\mathbf{v}_{2j}, \varphi(\mathbf{v}_{2j}))$. $\diamondsuit$

Předchozí úhahy můžeme shrnout do následující Věty.

Věta 1.4.3. *Nechť k_1, k_2, j jsou celá nezáporná čísla a nechť φ je ortogonální transformace na V_n, která má 1 jako k_1-násobnou vlastní hodnotu,*

(-1) jako k_2-násobnou vlastní hodnotu a dále má j dvojic komplexně sdružených kořenů s násobností l_i, $i = 1, \dots, j$, t.j. $n = k_1 + k_2 + 2\sum_{i=0}^{j} l_i$. Potom V_n je přímým součtem

$$V_n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{k_1+k_2} \oplus W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{jl_j}$$

kde U_i, $i = 0, \dots, k_1$, jsou jednodimenzionální invariantní podprostory příslušné vlastní hodnotě 1 , U_{k_1+i}, $i = 0, \dots, k_2$, jsou jednodimenzionální invariantní podprostory příslušné vlastní hodnotě (-1) a W_{il_i} je 2-dimenzionální l_i-tý invariantní podprostor daný komplexním kořenem λ_i, $i = 0, \dots, j$. Navíc ve V_n existuje ortonormální báze taková, že v ní má matice transformace φ matici v blokově diagonálním tvaru, kde na diagonále je nejdříve k_1 hodnot 1, potom k_2 hodnot (-1) a l_i bloků $B_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ řádu 2, $i = 0, \dots, j$.

Důkaz. Věta vyplývá z předchozích úvah. $\square$

Úloha 1.4.1. Ortogonální transformace φ na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Rozložte $\mathbb{R}^3$ na invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci φ a najděte takovou bázi, ve které se matice φ rozpadá na diagonální bloky.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda E_3| = -\lambda^3 + 1$, jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) pro $\lambda_1 = 1$ je $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$ a obecné řešení této soustavy je generováno jednotkovým vektorem $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{3})$. Dále pro komplexní kořen $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ uvažujeme homogenní soustavu rovnic (1.2.9) nad komplexními čísly s maticí $\begin{pmatrix} 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Obecné řešení je generováno vektorem s jednotkovými reálými a imaginárními částmi $\mathbf{w} = (-\frac{\sqrt{3}}{6} - i\frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{6}) + i\,(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$. Potom $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus W_2$, kde $U_1 = L(\mathbf{u}_1)$ je vlastní směr příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ a $W_2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je dvoudimenzionální invariantní podprostor příslušný kořenům $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Snadno se vidí, že báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ je ortonormální a že v ní má φ matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. △

Použitá literatura

Bic L. Bican, *Lineární algebra*, SNTL, Praha 1979.

Ho94 P. Horák, *Algebra a teoretická aritmetika I*, skripta MU, Brno 1994.

Ho93 P. Horák, *Algebra a teoretická aritmetika II*, skripta MU, Brno 1993.

Ho07 P. Horák, *Lineární algebra a geometrie 1*, skripta MU, Brno 2007.

JaSe J. Janyška, A. Sekaninová, *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, skripta MU, 2. vydání, Brno 2001.

Ro J. Rosický, *Algebra*, skripta MU, Brno 2002.

Sl J. Slovák, *Lineární algebra*, učební text MU, Brno 1997-98, http://www.math.muni.cz/~slovak/Vyuka/la.pdf.