Kapitola 2

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

V této kapitole budeme studovat zobrazení afinních prostorů, která zobecňují dobře známá zobrazení euklidovských prostorů. Poprvé tato zobrazení studoval Leonard Euler v roce 1738 v práci *Introductio in analysis infinitorum*. Název afinní zobrazení je odvozen od latinského slova *affinis*, tj. příbuzný, a vyjadřuje vztah mezi křivkami, které se v těchto zobrazeních na sebe zobrazují. Příkladem takovýchto příbuzných křivek je elipsa, která je afinním obrazem kružnice.

Všude v této kapitole předpokládáme, že afinní prostory (značíme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...) jsou reálné a konečnědimenzionální. Pokud bude nutno zvýraznit dimenzi, budeme pro afinní prostor $\mathcal{A}$ dimenze n používat označení $\mathcal{A}_n$.

2.1 Afinní zobrazení

V této části skript definujeme afinní zobrazení a popíšeme některé vlastnosti afinních zobrazení. Základním pojmem, který je nutný pro definici afinního zobrazení, je dělící poměr tří kolineárních (ležících na jedné přímce) bodů, [HoJa]. Připomeňme, že pro tři kolineární různé body $A, B, C \in \mathcal{A}$, definujeme dělící poměr bodu C vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí), jako reálné číslo $\lambda = (C; A, B)$ takové, že

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}\,,$$

kde $0 \neq \lambda \neq 1$.

Definice 2.1.1. Zobrazení f afinního prostoru $\mathcal{A}$ do afinního prostoru $\mathcal{A}'$ se nazývá *afinní zobrazení*, jestliže má následující vlastnost: leží-li navzájem různé body $A, B, C \in \mathcal{A}$ na přímce, pak buď jejich obrazy $f(A), f(B), f(C)$ splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a

$$(f(C); f(A), f(B)) = (C; A, B)\,.$$

Poznámka 2.1.1. Afinní zobrazení tedy můžeme charakterizovat jako lineární zobrazení (zobrazuje přímky na přímky) afinních prostorů, které navíc zachovává dělící poměr tří bodů. Existují lineární zobrazení, která nezachovávají dělící poměr tří bodů, např. středové projekce. ♢

Příklad 2.1.1. Všechna shodná a podobná zobrazení, se kterými jsme se setkali na střední škole, jsou afinní zobrazení. Podobně také rovnoběžné promítání prostoru (dimenze 3) do roviny, které se používá v konstrukční geometrii, je afinní zobrazení. Středové promítání prostoru do roviny není afinní zobrazení. ♡

Věta 2.1.1. *Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní právě tehdy, když*

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}\,, \tag{2.1.1}$$

kde $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že pro afinní zobrazení je splněna implikace (2.1.1). Jsou-li $A, B, C \in \mathcal{A}$ tři různé kolineární body, splňuje $\lambda = (C; A, B)$, $0 \neq \lambda \neq 1$, předpoklad implikace (2.1.1). Podle Definice 2.1.1 jsou buď $f(A) = f(B) = f(C)$, a tedy $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \mathbf{o} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$, nebo $f(A), f(B)$, $f(C)$ jsou tři různé kolineární body takové, že $\lambda = (f(C); f(A), f(B))$, tj. z definice dělícího poměru $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$. Implikace (2.1.1) je tedy splněna.

Nechť naopak platí implikace (2.1.1) pro libovolnou trojici bodů $A, B, C \in \mathcal{A}$ splňující předpoklad. Pokud jsou body A, B, C různé, musí být z předpokladu implikace kolineární a $\lambda = (C; A, B)$, $0 \neq \lambda \neq 1$. Pokud $f(A) = f(C)$, dostaneme $\mathbf{o} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$, tj. $f(B) = f(C)$. Podobně, pro $f(B) = f(C)$, dostaneme $\mathbf{o} = \overrightarrow{f(A)f(C)}$, tj. $f(A) = f(C)$. Konečně, pro $f(A) = f(B)$, dostaneme $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(C)}$. To je možné buď pro $\lambda = 1$, což je ale ve sporu s předpokladem, nebo $f(A) = f(C)$. Dohromady tak dostáváme, že podkud splývají dva z bodů $f(A), f(B), f(C)$, musí s nimi splývat i třetí. Nechť jsou konečně všechny body $f(A), f(B), f(C) \in$

$\mathcal{A}'$ různé, potom $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(B)f(C)}$ je ekvivalentní s tím, že jsou tyto body kolineární a $\lambda = (f(C); f(A), f(B))$. Je tedy f splňující implikaci (2.1.1) afinní zobrazení. $\square$

Věta 2.1.2. *Nechť $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní zobrazení. Potom pravidlo*

$$\varphi_f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$$

určuje lineární zobrazení φ_f ze $Z(\mathcal{A})$ do $Z(\mathcal{A}')$.

Důkaz. Nejdříve se musí ukázat, že φ_f je korektně definované zobrazení, tj. že nezávisí na umístění vektoru $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Nechť $\overrightarrow{CD}$ je jiné umístění vektoru $\mathbf{u}$. Z ekvipolence to nastává právě tehdy, když středy úseček AD a BC splývají (viz Obr. 2.1.1).

Protože afinní zobrazení zachovává dělicí poměr, zobrazí střed úsečky opět do středu úsečky (střed úsečky je bod s dělícím poměrem minus jedna vzhledem ke krajním bodům). Odtud je bod $f(S)$ společným středem úseček $f(A)f(D)$ a $f(B)f(C)$, a tedy vektory $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ a $\overrightarrow{f(C)f(D)}$ jsou umístěním téhož vektoru $\varphi_f(\mathbf{u})$. Je tedy φ_f korektně definované zobrazení.

Obr. 2.1.1

Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ jsou dva vektory. Podle druhého axiomu afinního prostoru je $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) + \varphi_f(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \varphi_f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ a je tedy splněna první podmínka pro lineární zobrazení.

Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ jsou dva vektory takové, že $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, tj. $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Odtud je podle Věty 2.1.1 $\overrightarrow{f(A)f(C)} = k\overrightarrow{f(A)f(B)}$, což znamená, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\varphi_f(\mathbf{v})$, a tedy φ_f je lineární zobrazení. $\square$

Definice 2.1.2. Lineární zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{A}')$ definované v předchozí Větě 2.1.2 se nazývá *asociované lineární zobrazení* afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

Poznámka 2.1.2. Asociované lineární zobrazení daného afinního zobrazení f je tedy jediné lineární zobrazení takové, že komutuje následující diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{A} \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\to"'] & \mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \arrow[d, "\to"] \\
Z(\mathcal{A}) \arrow[r, "\varphi_f"] & Z(\mathcal{A}')
\end{tikzcd}$$ ◊

Ve Větě 2.1.2 jsme jednoznačně danému afinnímu zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ přiřadili asociované lineární zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{A}')$. Opačně ale dané lineární zobrazení ještě neurčuje afinní zobrazení.

Věta 2.1.3. *Nechť $\varphi : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{A}')$ je lineární zobrazení a nechť $B \in \mathcal{A}$ a $B' \in \mathcal{A}'$ jsou libovolné body. Pak existuje jediné afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ takové, že $f(B) = B'$ a $\varphi \equiv \varphi_f$.*

Důkaz. Existence: Nechť libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ má vyjádření $X = B + \mathbf{u} = B + \overrightarrow{BX}$. Definujme zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ předpisem

$$f(X) = B' + \varphi(\mathbf{u})\,. \tag{2.1.2}$$

Ukážeme, že f je afinní zobrazení. Stačí dokázat platnost (2.1.1). Nechť tedy $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ jsou tři různé body takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}$. Potom

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(X)f(Z)} &= f(Z) - f(X) = B' + \varphi(\overrightarrow{BZ}) - B' - \varphi(\overrightarrow{BX}) \\
&= \varphi(\overrightarrow{BZ} - \overrightarrow{BX}) = -\varphi(\overrightarrow{ZX}) = \varphi(\overrightarrow{XZ}) \\
&= \varphi(\lambda\overrightarrow{YZ}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{YZ}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{YB} + \overrightarrow{BZ}) \\
&= \lambda(\varphi(\overrightarrow{BZ}) - \varphi(\overrightarrow{BY})) = \lambda((f(Z) - B') - (f(Y) - B')) \\
&= \lambda(f(Z) - f(Y)) = \lambda\overrightarrow{f(Y)f(Z)}\,.
\end{aligned}$$

Snadno se nahlédne, že $f(B) = B'$ a $\varphi_f \equiv \varphi$.

Jednoznačnost: Nechť $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní zobrazení takové, že $g(B) = B'$ a $\varphi_g \equiv \varphi$. Potom $g(X) = g(B + \mathbf{u}) = g(B) + \varphi_g(\mathbf{u}) = B' + \varphi(\mathbf{u})$ a odtud $g \equiv f$. □

Označme jako $f(\mathcal{A})$ úplný obraz afinního prostoru $\mathcal{A}$, tj.

$$f(\mathcal{A}) = \{X' \in \mathcal{A}' | \exists X \in \mathcal{A} : f(X) = X'\}\,.$$

Věta 2.1.4. *$f(\mathcal{A})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}'$.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $B \in \mathcal{A}$. Potom každý bod $X \in \mathcal{A}$ je tvaru $X = B + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A})$, a

$$f(\mathcal{A}) = \{f(X) = f(B) + \varphi_f(\mathbf{u}) | \forall \mathbf{u} \in Z(\mathcal{A})\} = \{f(B); \mathrm{Im}(\varphi_f)\},$$

tj. $f(\mathcal{A})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}'$ určený bodem $f(B)$ a zaměřením $\mathrm{Im}(\varphi_f)$. □

Poznámka 2.1.3. Protože $f(\mathcal{A})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}'$, je $\dim(f(\mathcal{A})) \leq \dim \mathcal{A}'$ a podobně je $\dim(f(\mathcal{A})) \leq \dim \mathcal{A}$ (to plyne z toho, že pro lineární zobrazení φ_f je $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_f)) \leq \dim Z(\mathcal{A})$). Přitom $\dim(f(\mathcal{A})) = \dim \mathcal{A}$ právě tehdy, když f je prosté, a $\dim(f(\mathcal{A})) = \dim \mathcal{A}'$ právě tehdy, když f je surjektivní. ♢

Věta 2.1.5. *Afinní zobrazení f je prosté právě tehdy, když jeho asociované zobrazené φ_f je prosté. Afinní zobrazení f je surjektivní právě tehdy, když jeho asociované zobrazené φ_f je surjektivní.*

Důkaz. Pro každé dva body $X, Y \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{f(X)f(Y)} = \varphi_f(\overrightarrow{XY})$. Není-li f prosté, existují dva různé body X, Y takové, že $f(X) = f(Y)$ a tedy existuje nenulový vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{XY}$ takový, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, tj. φ_f není prosté. Není-li naopak φ_f prosté, existuje nenulový vektor $\mathbf{u}$ takový, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ a $f(X+\mathbf{u}) = f(X) + \varphi_f(\mathbf{u}) = f(X)$. Protože $X \neq X + \mathbf{u}$ není ani f prosté. Dohromady tak dostáváme, že f je prosté právě tehdy, když φ_f je prosté.

Nechť f je surjektivní zobrazení a $\mathbf{v}' \in Z(\mathcal{A}')$ je libovolný vektor. Nechť K', $L' \in \mathcal{A}'$ jsou takové body, že $\mathbf{v}' = \overrightarrow{K'L'}$. Pak existují body $K, L \in \mathcal{A}$ takové, že $f(K) = K'$, $f(L) = L'$ a odtud $\varphi_f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$, kde $\mathbf{v} = \overrightarrow{KL}$. Tedy také φ_f je surjektivní. Nechť obráceně φ_f je surjektivní zobrazení a $Z \in \mathcal{A}'$ je libovolný bod. Zvolme libovolný bod $B \in \mathcal{A}$ a položme $\mathbf{v}' = \overrightarrow{f(B)Z}$. Podle předpokladu existuje vektor $\mathbf{v} \in Z(\mathcal{A})$ takový, že $\varphi_f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$. To ale znamená, že $Z = f(B) + \varphi_f(\mathbf{v}) = f(B + \mathbf{v})$, a tedy f je surjektivní. □

Definice 2.1.3. *Hodností afinního zobrazení* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ rozumíme dimenzi podprostoru $f(\mathcal{A})$. Hodnost afinního zobrazení f budeme označovat $h(f)$.

Poznámka 2.1.4. Protože hodnost afinního zobrazení je dána dimenzí $f(\mathcal{A})$, která je dána dimenzí $\mathrm{Im}\varphi_f$, je $h(f) = h(\varphi_f)$. ♢

Důsledek 2.1.1. Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení. Pak:

1. f je prosté $\Leftrightarrow h(f) = n \leq m$;

2. f je surjektivní $\Leftrightarrow n \geq h(f) = m$;
3. f je bijekce $\Leftrightarrow h(f) = n = m$.

Důkaz. Využijeme Větu 2.1.4 a Poznámku 2.1.3.

1. f je prosté $\Leftrightarrow n = \dim \mathcal{A} = \dim f(\mathcal{A}) \leq \dim \mathcal{A}' = m$.

2. f je surjektivní $\Leftrightarrow f(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{A}' \Leftrightarrow m = \dim \mathcal{A}' = \dim f(\mathcal{A}) \leq \dim \mathcal{A} = n$.

3. Toto tvrzení je přímým důsledkem 1. a 2. tvrzení věty. □

Věta 2.1.6. *Afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ zobrazuje podprostor v $\mathcal{A}$ na podprostor v $\mathcal{A}'$ a zachovává rovnoběžnost podprostorů.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ je podprostor určený bodem B a zaměřením W, tj. $\mathcal{B} = \{B; W\}$. Potom $X \in \mathcal{B}$ je ekvivalentní $X = B + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w} \in W$. Odtud

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) + \varphi_f(\mathbf{w}) | \mathbf{w} \in W\}$$

a protože $\mathrm{Im}(\varphi_f|W) = \varphi_f(W)$ je vektorový podprostor v $Z(\mathcal{A}')$, je $f(\mathcal{B}) = \{f(B); \varphi_f(W)\}$ afinní podprostor v $\mathcal{A}'$.

Nechť $\mathcal{B} = \{B; W\}$ a $\mathcal{C} = \{C; U\}$ jsou dva rovnoběžné podprostory v $\mathcal{A}$. Připomeňme, že $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \Leftrightarrow W \subseteq U \vee U \subseteq W$. Odtud $\varphi_f(W) \subseteq \varphi_f(U) \vee \varphi_f(U) \subseteq \varphi_f(W)$, což je ekvivalentní $f(\mathcal{B}) \parallel f(\mathcal{C})$. □

Poznámka 2.1.5. Afinní zobrazení nezachovává obecně dimenzi prostoru, proto se např. dvě rovnoběžné přímky zobrazí buď do rovnoběžných přímek nebo na dva body, které ale chápeme také jako rovnoběžné afinní podprostory. ♢

Věta 2.1.7. *Je-li $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ afinní podprostor, je $f|\mathcal{B} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení a jeho asociované lineární zobrazení je $\varphi_f|Z(\mathcal{B})$.*

Důkaz. Toto tvrzení je přímým důsledkem Definice 2.1.1 a Věty 2.1.1. Opravdu, pokud platí (2.1.1) pro libovolné body $A, B, C \in \mathcal{A}$, platí to i pro $A, B, C \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. □

Věta 2.1.8. *Nechť $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ a $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ jsou dvě afinní zobrazení. Potom $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ je opět afinní zobrazení takové, že $\varphi_{g \circ f} = \varphi_g \circ \varphi_f$.*

Důkaz. Platí-li pro tři body $A, B, C \in \mathcal{A}$ rovnost $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}$, platí také rovnost $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$ protože f je afinní zobrazení. Potom ale také $\overrightarrow{g(f(A))g(f(C))} = \lambda \overrightarrow{g(f(B))g(f(C))}$ protože i g je afinní zobrazení.

Podle Věty 2.1.1 je tedy $g \circ f$ afinní zobrazení. Pro asociované lineární zobrazení dostaneme $\varphi_{g\circ f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{g(f(A))g(f(B))} = \varphi_g(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = \varphi_g(\varphi_f(\overrightarrow{AB}) = (\varphi_g \circ \varphi_f)(\overrightarrow{AB})$. $\square$

Věta 2.1.9. (O určenosti afinního zobrazení) *Nechť* $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ *jsou libovolné body v obecné poloze a nechť* $A'_0, \dots, A'_n \in \mathcal{A}'_m$ *jsou libovolné body. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení* $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ *takové, že* $f(A_i) = A'_i$, $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Předpoklad, že body $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ jsou v obecné poloze je ekvivalentní s tím, že vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ tvoří bázi $Z(\mathcal{A}_n)$. Definujme zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}'_m)$ předpisem $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{A'_0A'_i}$, $i = 1, \dots, n$. Podle Věty 1.1.2 je hodnotami na bázi určeno jediné lineární zobrazení φ a podle Věty 2.1.3 je předpisem

$$f(X) = A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0X})$$

určeno jediné afinní zobrazení, které má zřejmě požadované vlastnosti, protože

$$f(A_i) = A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = A'_0 + \overrightarrow{A'_0A'_i} = A'_i\,,$$

jak plyne z předpokladu. $\square$

Poznámka 2.1.6. Afinní zobrazení z afinní roviny $\mathcal{A}_2$ je tedy určeno obrazy tří bodů v obecné poloze (vrcholů trojúhelníka) a afinní zobrazení z afinního prostoru $\mathcal{A}_3$ je určeno obrazy čtyř bodů v obecné poloze (vrcholů čtyřstěnu). Specielně tak např. dostáváme, že libovolné dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ v $\mathcal{A}_2$ jsou afinní ve smyslu, že existuje jediné afinní zobrazení $\mathcal{A}_2$ na sebe, které zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$. $\diamondsuit$

Úloha 2.1.1. Nechť je dána afinní rovina $\mathcal{A}_2$, v ní přímka p a směr $L(\mathbf{s})$ nerovnoběžný s p. Dokažte, že zobrazení, které každému bodu $X \in \mathcal{A}_2$ přiřadí bod $X' = p \cap \{X; L(\mathbf{s})\}$ je afinní zobrazení $\mathcal{A}_2$ na p.

Řešení: Nechť $X, Y, Z \in \mathcal{A}_2$ jsou tři různé body ležící na jedné přímce q.

Obr. 2.1.2

Potom buď $q \parallel \mathbf{s}$, a tedy $X' = Y' = Z'$, nebo q není rovnoběžná s $\mathbf{s}$ a X', Y', Z' jsou tři různé kolineární body (leží na přímce p). Musíme ještě ukázat, že např. $(Z; X, Y) = (Z'; X', Y')$ (viz Obr. 2.1.2). To je ovšem důsledkem Věty 8.4 skript [HoJa]. Tato věta říká, že jsou-li s_1, s_2, s_3 tři různé navzájem rovnoběžné přímky, potom je libovolná s nimi různoběžná přímka r protíná v trojici bodů $S_i = s_i \cap r$ a dělící poměr $(S_3; S_1, S_2)$ je konstantní, nezávislý na volbě přímky r. Aplikací této věty na $s_1 = \{X; L(\mathbf{s})\} \parallel s_2 = \{Y; L(\mathbf{s})\} \parallel s_3 = \{Z; L(\mathbf{s})\}$ a přímky p, q dostaneme požadovaný výsledek. $\triangle$

Úloha 2.1.2. V $\mathcal{A}_2$ je dán $\triangle ABC$ a libovolné tři body A', B', C'. Určete obraz libovolného bodu X v afinním zobrazení $\mathcal{A}_2$ do $\mathcal{A}_2$, které zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$.

Řešení: Úlohu vyřešíme konstrukčně nejdříve pro obecný případ, kdy jsou body A', B', C' v obecné poloze (viz Obr. 2.1.3).

Obr. 2.1.3

Je-li bod X_1 totožný s některým bodem A, B, C, je i jeho obraz X_1' totožný s příslušným bodem A', B', C' (na Obr. 2.1.3 je to bod B). Leží-li bod X_2 na některé z přímek určené body A, B, C, např. na přímce AC, leží jeho obraz na obrazu této přímky tak, že se zachová dělící poměr vzhledem k příslušným vrcholům. Tedy na přímce $A'C'$ existuje jediný bod X_2' takový, že $(X_2; A, C) = (X_2'; A', C')$. Konečně, neleží-li bod X_3 na žádné z přímek určené body A, B, C, spojíme ho s libovolným z těchto bodů, např. s bodem C, a označíme Y průsečík této spojnice s přímkou určenou zbývajícími body, tj. body A, B. Podle předchozího kroku existuje jediný bod Y' na na přímce $A'B'$, takový, že $(Y; A, B) = (Y'; A', B')$. Potom je bod X_3' jediný bod na přímce $C'Y'$ takový, že $(X_3; Y, C) = (X_3'; Y', C')$.

Situace, kdy jsou body A', B', C' kolineární různé se vyřeší naprosto stejně.

Splývají-li některé dva z bodů A', B', C', např. $A' = B'$, pak každý bod přímky AB se zobrazí do bodu A'. Jinak je postup zachován.

Pokud splynou všechny body A', B', C', je obraz libovolného bodu X roven A'. $\triangle$

2.2 Analytické vyjádření afinního zobrazení

Nechť $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je afinní repér v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ je afinní repér v afinním prostoru $\mathcal{A}'_m$. Uvažujme afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ a jeho asociované zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}'_m)$. Označme jako $[b_1; \dots ; b_m]$ afinní souřadnice bodu $f(P) \in \mathcal{A}'_m$ v repéru $\mathcal{R}'$, tj.

$$f(P) = Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{d}_j \,.$$

Označme $(a_{1i}; \dots ; a_{mi})$ souřadnice vektoru $\varphi_f(\mathbf{e}_i)$ v bázi $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$, tj.

$$\varphi_f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{d}_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,.$$

Nechť $X \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod, který má v repéru $\mathcal{R}$ afinní souřadnice $[x_1; \dots ; x_n]$, tj.

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \,.$$

Souřadnice bodu $f(X) \in \mathcal{A}'_m$ v repéru $\mathfrak{R}'$ označme $[x'_1; \dots ; x'_m]$, tj.

$$f(X) = Q + \sum_{j=1}^{m} x'_j \mathbf{d}_j \,. \tag{2.2.1}$$

Na druhé straně

$$\begin{aligned} f(X) &= f(P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i) = f(P) + \varphi_f(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i) \\ &= f(P) + \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_f(\mathbf{e}_i) \\ &= Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{d}_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{d}_j \,. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Protože je souřadnicové vyjádření bodu dáno jednoznačně, dostaneme porovnáním souřadnicových vyjádření (2.2.1) a (2.2.2) vztah pro souřadnice bodů X a $f(X)$ ve tvaru

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \,, \quad j = 1, \dots, m \,, \tag{2.2.3}$$

který budeme častěji psát maticově

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{2.2.4}$$

nebo symbolicky

$$(f(X)) = A(X) + B\,, \tag{2.2.5}$$

kde $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic bodu X vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}$ a $(f(X)) = (X') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic bodu $f(X)$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}'$.

Naopak uvažujme reálnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n, reálnou matici $B = (b_i)$ typu $m/1$ a zobrazení, které každému bodu $X = [x_1; \ldots ; x_n] \in \mathcal{A}_n$ přiřadí bod $f(X) = X' = [x'_1; \ldots ; x'_m] \in \mathcal{A}'_m$ takový, že

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j\,,\ j = 1, \ldots, m\,. \tag{2.2.6}$$

Ukážeme, že f je afinní zobrazení. Uvažujme tři body $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda \overrightarrow{YZ}$. V souřadnicích to znamená, že $(z_i - x_i) = \lambda(z_i - y_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Pro souřadnice $[x'_1; \ldots ; x'_m]$, $[y'_1; \ldots ; y'_m]$, $[z'_1; \ldots ; z'_m]$ obrazů X', Y', Z' bodů X, Y, Z pak dostaneme

$$\begin{aligned} z'_j - x'_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i + b_j - (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z_i - x_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z_i - y_i)\,, \\ z'_j - y'_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i + b_j - (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i + b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z_i - y_i)\,, \end{aligned}$$

tj. $\overrightarrow{X'Z'} = \lambda \overrightarrow{Y'Z'}$ a podle Věty 2.1.1 je f afinní zobrazení.

Předchozí úvahy tak můžeme shrnout do následující věty.

Věta 2.2.1. *Nechť jsou dány afinní repéry $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{A}'_m$. Je-li $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ afinní zobrazení, pak existuje reálná matice $A = (a_{ij})$ typu m/n a reálná matice $B = (b_i)$ typu $m/1$ takové, že pro souřadnice bodu $X = [x_1; \dots; x_n]$ a $f(X) = [x'_1; \dots; x'_m]$ platí vztah (2.2.4).*

Naopak, je-li $A = (a_{ij})$ reálná matice typu m/n a $B = (b_i)$ reálná matice typu $m/1$, je zobrazení, které každému bodu $X = [x_1; \dots; x_n] \in \mathcal{A}_n$ přiřadí bod $f(X) = X' = [x'_1; \dots; x'_m] \in \mathcal{A}'_m$ takový, že

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \, , \; j = 1, \dots, m \tag{2.2.7}$$

afinní zobrazení. □

Definice 2.2.1. Vztahy (2.2.3) – (2.2.5) se nazývají *souřadnicovým vyjádřením* nebo *souřadnicovými rovnicemi* afinního zobrazení f vzhledem k daným afinním repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

Poznámka 2.2.1. Při pevně zvolených afinních repérech v $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{A}'_m$ je tedy vztah mezi afinními zobrazeními a maticemi A, B vzájemně jednoznačný. Z výše popsaného popisu souřadnicového vyjádření afinního zobrazení vyplývá, jaký je geometrický význam matic A, B. Matice A je typu m/n a její sloupce jsou souřadnice vektorů $\varphi_f(\mathbf{e}_i) \in Z(\mathcal{A}'_m)$ vzhledem k bázi $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$. Sloupcová matice B typu $m/1$ je tvořena souřadnicemi bodu $f(P) \in \mathcal{A}'_m$ vzhledem k repéru $\mathcal{R}'$, tj. $B = (f(P))$. ♢

Poznámka 2.2.2. Afinní repér $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$ (respektive $\mathcal{R}'$ v $\mathcal{A}'_m$) je možno chápat jako bijekci $\mathcal{R} : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}^n$ (respektive $\mathcal{R}' : \mathcal{A}'_m \to \mathbb{R}^m$), [HoJa]. Souřadnicové vyjádření afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je potom zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které je dáno složením zobrazení $\mathcal{R}' \circ f \circ \mathcal{R}^{-1}$ podle následujícího diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_n \arrow[r, "\mathcal{R}^{-1}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\
\mathcal{A}'_m \arrow[r, "\mathcal{R}'"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

♢

Definice 2.2.2. Matice A v (2.2.5) se nazývá *matice afinního zobrazení* f vzhledem k daným afinním repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

Poznámka 2.2.3. Z definice hodnosti afinního zobrazení je zřejmé, že $h(f) = h(A)$, kde A je matice zobrazení vzhledem k libovolným repérům. $\diamondsuit$

Příklad 2.2.1. Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme chápat jako jednorozměrný afinní prostor. Potom lineární funkce $f(x) = ax + b$ je vlastně afinní zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\heartsuit$

Uvažujme vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{XY} = (u_1; \dots ; u_n) \in Z(\mathcal{A}_n)$. Z definice asociovaného lineárního zobrazení je v souřadnicích

$$(\varphi_f(\mathbf{u})) = A(Y) + B - (A(X) + B) = A((Y) - (X)) = A(\mathbf{u})\,,$$

tj. souřadnicové vyjádření asociovaného lineárního zobrazení φ_f je tvaru

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \tag{2.2.8}$$

nebo maticově

$$(\mathbf{u}') = A(\mathbf{u})\,, \tag{2.2.9}$$

kde $(\varphi_f(\mathbf{u})) = (\mathbf{u}') = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic vektoru $\varphi_f(\mathbf{u})$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}'$. Matice A je tedy současně i maticí φ_f v bázích $\langle \mathbf{e}_1, \dots , \mathbf{e}_n \rangle$ na $Z(\mathcal{A}_n)$ a $\langle \mathbf{d}_1, \dots , \mathbf{d}_m \rangle$ na $Z(\mathcal{A}'_m)$.

Matice A, B přiřazené afinnímu zobrazení závisí na zvolených afinních repérech. V následující větě si ukážeme, jaký je vztah mezi maticemi téhož afinního zobrazení v různých afinních repérech.

Věta 2.2.2. *Nechť $\mathcal{R}$, $\bar{\mathcal{R}}$ jsou dva afinní repéry na $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}'$, $\bar{\mathcal{R}}'$ jsou dva afinní repéry na $\mathcal{A}'_m$. Označme transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}$ maticově $(X) = K(\bar{X}) + L$ a transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}'$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}'$ maticově $(X') = M(\bar{X}') + N$. Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení, které má souřadnicové vyjádřejí vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ dáno maticově $(X') = A(X) + B$ a souřadnicové vyjádřejí vzhledem k repérům $\bar{\mathcal{R}}$ a $\bar{\mathcal{R}}'$ je dáno maticově $(\bar{X}') = C(\bar{X}) + D$. Pak*

$$C = M^{-1}AK, \quad D = M^{-1}(AL + B - N)\,. \tag{2.2.10}$$

Důkaz. Do maticové rovnice f vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ dosadíme na levou stranu transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}'$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}'$ a na pravou stranu transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}$. Dostaneme

$$M(\bar{X}') + N = A(K(\bar{X}) + L) + B\,.$$

Protože je matice M regulární, dostaneme odtud úpravou

$$(\bar{X}') = M^{-1}AK(\bar{X}) + M^{-1}(AL + B - N)\,,$$

což je maticový zápis souřadnicového vyjádření f vzhledem k repérům $\bar{\mathcal{R}}$ a $\bar{\mathcal{R}}'$. Porovnáním s původním zápisem potom dostaneme tvrzení věty. □

Protože souřadnicové vyjádření afinního zobrazení je závislé na zvolených afinních repérech, zajímá nás, zda není možné zvolit afinní repéry tak, aby mělo afinní zobrazení nejjednodušší možné rovnice. Dostáváme větu.

Věta 2.2.3. *Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení hodnosti h. Potom existují takové afinní repéry $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\rangle$ v $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m\rangle$ v $\mathcal{A}'_m$, že vzhledem k těmto repérům má f souřadnicové vyjádření*

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\,, & x'_{h+1} &= 0\,,\\ &\vdots & &\vdots\\ x'_h &= x_h\,, & x'_m &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Důkaz. Afinní repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\rangle$ v $\mathcal{A}_n$ zvolíme libovolně tak, aby vektory $\mathbf{e}_j$, $j = h+1, \dots, n$, ležely v $\mathrm{Ker}(\varphi_f)$. To znamená že vektory $\varphi_f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, h$, jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi v $\mathrm{Im}\varphi_f \subseteq Z(\mathcal{A}'_m)$. Afinní repér $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m\rangle$ v $\mathcal{A}'_m$ volíme následujícím způsobem. $Q = f(P)$, $\mathbf{d}_i = \varphi_f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, h$, $\mathbf{d}_j$, $j = h+1, \dots, m$, volíme libovolně tak aby $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m\rangle$ byla báze $Z(\mathcal{A}'_m)$. V takto zvolených repérech má f uvedené rovnice (2.2.11). □

Poznámka 2.2.4. Afinní repéry ztotožňují afinní prostor $\mathcal{A}_n$ s $\mathbb{R}^n$ a afinní prostor $\mathcal{A}'_m$ s $\mathbb{R}^m$. Potom z předchozí Věty 2.2.3 a Poznámky 2.2.2 vyplývá, že souřadnicové vyjádření injektivního afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$, $h(f) = n \le m$, je ve vhodně zvolených souřadnicích vlastně kanonické vložení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, kdy uspořádanou n-tici $[x_1; \dots; x_n]$ doplníme na m-tici reálných čísel nulami, tj. $[x_1; \dots; x_n] \mapsto [x_1; \dots; x_n; 0; \dots; 0]$.

Podobně pro surjektivní afinní zobrazení, kdy $h(f) = m \le n$, je ve vhodných souřadnicích toto zobrazení vyjádřeno jako kanonická projekce $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$, kdy z uspořádané n-tice $[x_1; \dots; x_n]$ vezmeme pouze prvních m členů a ostatní vynecháme, tj. $[x_1; \dots; x_m; x_{m+1}; \dots; x_n] \mapsto [x_1; \dots; x_m]$. ♢

Věta 2.2.4. *Nechť na afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ je dán repér $\mathcal{R}$, na afinním prostoru $\mathcal{A}'_m$ je dán repér $\mathcal{R}'$ a na afinním prostoru $\mathcal{A}''_p$ je dán repér $\mathcal{R}''$. Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení, které má vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ maticové vyjádření $(X') = A(X) + B$. Nechť $g : \mathcal{A}'_m \to \mathcal{A}''_p$ je afinní zobrazení, které má vzhledem k repérům $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$ maticové vyjádření $(X'') = C(X') + D$. Pak afinní zobrazení $g \circ f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}''_p$ má vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''$ maticové vyjádření*

$$(X'') = CA(X) + CB + D\,. \tag{2.2.12}$$

Důkaz. Stačí dosadit z maticového vyjádření f do maticového vyjádření g. □

Poznámka 2.2.5. Matice složeného zobrazení $g \circ f$ je tedy součin matic původních zobrazení v příslušném pořadí. Protože B je matice tvořená souřadnicemi obrazu počátku repéru $\mathcal{R}$ v zobrazení f, je matice $CB+D$ obrazem počátku repéru $\mathcal{R}$ v zobrazení $g\circ f$, a to je v souladu s geometrickým významem těchto koeficientů popsaným v Poznámce 2.2.1. ♢

Úloha 2.2.1. Afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ je dáno obrazy tří bodů A_1, A_2, A_3 v obecné poloze. Určete rovnice tohoto zobrazení jestliže vzhledem k nějakým afinním repérův $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_2$ a $\mathcal{R}'$ v $\mathcal{A}_3$ je $A_1 = [1;1] \mapsto A'_1 = [4;4;0]$, $A_2 = [-1;1] \mapsto A'_2 = [2;8;0]$, $A_3 = [-1;-1] \mapsto A'_3 = [-2;2;-2]$.

Řešení: Označme jako obvykle afinní souřadnice na $\mathcal{A}_2$ jako $[x;y]$ a na $\mathcal{A}_3$ jako $[x';y';z']$. Potom rovnice afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ jsou dány maticově

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Dosazením souřadnic bodů A_i na pravou stranu a souřadnic bodů A'_i na levou stranu souřadnicových rovnic dostaneme soustavu devíti nehomogenních lineárních rovnic pro devět koeficientů a_{ij}, b_i, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$. Tato soustava se rozpadne na tři soustavy pro koeficienty jednotlivých řádků a tyto soustavy mají stejnou matici zhomogenizované soustavy. Dají se tedy řešit současně úpravami matic. Dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Sloupce za čarou odpovídají neznámým příslušného řádku matic A a B a souřadnicové rovnice zobrazení f je tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Praktická poznámka: Při úpravě matice soustavy na schodovitý tvar je výhodné převést matici před čarou až na jednotkovou matici. Potom za čarou dostaneme přímo výsledek. Ve sloupcích za čarou jsou koeficienty příslušných řádků matic A a B. △

Úloha 2.2.2. Určete maticovou rovnici afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$, jestliže jsou v souřadnicích vzhledem k pevnému afinnímu repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ dány obrazy $\varphi_f(\mathbf{v}_1)$, $\varphi_f(\mathbf{v}_2)$, $\varphi_f(\mathbf{v}_3)$ vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ v homomorfismu φ_f asociovaném s f a obraz $f(R) = R'$ bodu R : $\mathbf{v}_1 = (1;1;0) \mapsto \varphi_f(\mathbf{v}_1) = (1;2;0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1;0;2) \mapsto \varphi_f(\mathbf{v}_2) = (1;1;-4)$, $\mathbf{v}_3 = (2;1;-1) \mapsto \varphi_f(\mathbf{v}_3) = (1;1;3)$, $R = [0;-1;3] \mapsto R' = [2;-3;-1]$.

Řešení: I. metoda: Jestliže je $(X') = A(X) + B$ maticová rovnice afinního zobrazení $f : A_3 \to A_3$, kde (X) a $(X)'$ jsou sloupcové matice souřadnic bodů X a $f(X) = X'$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}$, pak $(\mathbf{u}') = A(\mathbf{u})$ je maticová rovnice lineárního zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_3) \to Z(\mathcal{A}_3)$ asociovaného s f. Určíme nejdříve matici A. Dosazením souřadnic vektorů $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, do pravé strany a souřadnic vektorů $\varphi_f(\mathbf{v}_i)$ do levé strany souřadnicového vyjádření φ_f dostaneme soustavu devíti nehomogenních lineárních rovnic pro devět neznámých koeficientů matice A. Tato soustava je regulární (plyne z nezávislosti vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$) a rozpadne se na tři soustavy po třech neznámých koeficientech jednotlivých řádků. Protože jsou matice zhomogenizovaných soustav stejné, dají se tyto tři soustavy řešit současně úpravami matic. Dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Sloupce za čarou odpovídají neznámým příslušného řádku matice A, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matici B nyní dostaneme dosazením souřadnic R a R' do obecné rovnice afinního zobrazení, tj. $B = (R') - A(R)$, což v našem případě dává

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Maticová rovnice afinního zobrazení je tedy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II. metoda: Víme, že ve sloupcích matice A jsou souřadnice vektorů $\varphi_f(\mathbf{e}_i)$. Zadání obrazů vektorů $\mathbf{v}_i$ se dá interpretovat také vektorovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \varphi_f(\mathbf{e}_1) + \varphi_f(\mathbf{e}_2) \phantom{{}+\varphi_f(\mathbf{e}_3)} &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\,, \\ -\varphi_f(\mathbf{e}_1) \phantom{{}+\varphi_f(\mathbf{e}_2)} + \varphi_f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3\,, \\ 2\varphi_f(\mathbf{e}_1) + \varphi_f(\mathbf{e}_2) - \varphi_f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\,, \end{aligned}$$

odkud úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi_f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\,, \\ \varphi_f(\mathbf{e}_2) &= \phantom{\mathbf{e}_1 -{}} 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3\,, \\ \varphi_f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 \phantom{{}- 3\mathbf{e}_2} - \mathbf{e}_3\,, \end{aligned}$$

a tedy matice A je stejná jako při I. metodě. Matice B se určí naprosto stejným způsobem jako v I. metodě.

III. metoda: Protože jsou vektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, lineárně nezávislé, jsou body R, $R + \mathbf{v}_1$, $R + \mathbf{v}_2$, $R + \mathbf{v}_3$ v obecné poloze. Protože známe jejich souřadnicová vyjádření i souřadnicová vyjádření jejich obrazů, můžeme použít metodu popsanou v řešení Úlohy 2.2.1. Výsledné rovnice budou totožné jako v I. medodě. $\triangle$

Úloha 2.2.3. Ztransformujte rovnice afinního zobrazení f z Cvičení 2.2.1 do nových repérů $\bar{\mathcal{R}} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ v $\mathcal{A}_2$ a $\bar{\mathcal{R}}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \rangle$ v $\mathcal{A}_3$, kde ve starých souřadnicích je $P = [1; 1]$, $\mathbf{e}_1 = (1; 2)$, $\mathbf{e}_2 = (-1; 1)$, $Q = [1; 0; 1]$, $\mathbf{d}_1 = (2; 1; 2)$, $\mathbf{d}_2 = (0; 1; 1)$, $\mathbf{d}_3 = (1; 2; 0)$.

Řešení: Transformační rovnice pro souřadnice při přechodu od afinního repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}$ v $\mathcal{A}_2$ (respektive od afinního repéru $\mathcal{R}'$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}'$ v

$\mathcal{A}_3$) jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{respektive} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením transformačních rovnic v $\mathcal{A}_3$ do levé strany a transformačních rovnic v $\mathcal{A}_2$ do pravé strany v rovnicích f dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

odkud určíme (X') tím, že vynásobíme obě strany maticové rovnice maticí $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, která je invezní maticí k matici $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Po roznásobení a úpravě dostaneme maticovou rovnici f v nových repérech ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

2.3 Modul afinního zobrazení, grupa afinit

V této a následujících částech skript se budeme zabývat afinními zobrazeními n-rozměrného afinního prostoru na sebe. V souřadnicích potom vyjadřujeme afinní zobrazení pouze vzhledem k jednomu afinnímu repéru a matice zobrazení je čtvercová matice řádu n.

Věta 2.3.1. *Nechť má afinní zobrazení v nějakém afinním repéru souřadnicové vyjádření $f(X) = A(X) + B$. Potom číslo $|A|$ je nezávislé na zvoleném repéru.*

Důkaz. Mějme na $\mathcal{A}_n$ dva repéry $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Nechť Q je matice přechodu od prvního repéru k druhému, a nechť $(f(X)) = A(X) + B$ je souřadnicové vyjádření afinního zobrazení f vzhledem k repéru $\mathcal{R}$ a $(f(X)) = C(X) + D$ je souřadnicové vyjádření f vzhledem k repéru $\mathcal{R}'$. Potom podle Věty 2.2.2 je $C = Q^{-1}AQ$ a odtud

$$|C| = |Q^{-1}AQ| = |Q^{-1}| \cdot |A| \cdot |Q| = \frac{1}{|Q|} \cdot |A| \cdot |Q| = |A|. \qquad \square$$

Definice 2.3.1. Číslo $|A|$, které je jednoznačně přiřazeno afinnímu zobrazení f, se nazývá *modul afinního zobrazení* a značíme ho $m(f)$.

Věta 2.3.2. *Nechť f, g jsou dvě afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$. Potom*

$$m(f \circ g) = m(g \circ f) = m(f) \cdot m(g)\,.$$

Důkaz. Mějme v nějakém repéru zobrazení f a g dána maticovými rovnicemi $(f(X)) = A(X) + B$, $(g(X)) = C(X) + D$. Potom $((f \circ g)(X)) = A(C(X) + D) + B = AC(X) + AD + B$ a $m(f \circ g) = |AC| = |A| \cdot |C| = m(f) \cdot m(g)$. Podobně $((g \circ f)(X)) = C(A(X) + B) + D = CA(X) + CB + D$ a $m(g \circ f) = |CA| = |C| \cdot |A| = |A| \cdot |C| = m(f) \cdot m(g)$. □

Mezi afinními zobrazeními $\mathcal{A}_n$ na sebe hrají významnou roli ta zobrazení, jejichž modul je nenulový, tj. jejichž matice v libovolném repéru je regulární. Tyto afinní zobrazení se nazývají *regulární afinní zobrazení.*

Definice 2.3.2. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení n-rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe se nazývá *afinní transformace* nebo *afinita* prostoru $\mathcal{A}_n$.

Poznámka 2.3.1. Afinita prostoru $\mathcal{A}_n$ je regulární zobrazení, protože jeho matice je regulární. To vyplývá z toho, že je-li afinní zobrazení f bijekce na $\mathcal{A}_n$, je jeho hodnost rovna n a odtud vzhledem k libovolnému repéru je $n = h(f) = h(A) \Leftrightarrow |A| \neq 0$. ♢

Věta 2.3.3. *Všechny afinity afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ tvoří grupu vzhledem k operaci skládání zobrazení.*

Důkaz. Složením dvou afinit je opět afinita (to je důsledek toho, že složením dvou bijekcí je bijekce a složením dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení - Věta 2.1.8) a identita je afinita. Stačí tedy ukázat, že pro libovolnou afinitu je i f^{-1} afinita. Uvažujme libovolné tři různé kolineární body $X', Y', Z' \in \mathcal{A}_n$ takové, že $\lambda = (Z'; X', Y')$. Označme X vzor bodu X' v zobrazení f (protože f je bijekce, je X určen jednoznačně) a Y vzor bodu Y'. Označme Z bod na přímce XY takový, že $\lambda = (Z; X, Y)$. Potom také $\lambda = (f(Z); f(X), f(Y)) = (f(Z); X', Y')$, a tedy $f(Z) = Z'$ a odtud je f^{-1} afinita. □

Poznámka 2.3.2. Při označení z důkazu předchozí věty je pro afinitu f asociované lineární zobrazení určeno $\varphi_f(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{X'Y'}$ a $\varphi_{f^{-1}}(\overrightarrow{X'Y'}) = \overrightarrow{XY}$. Protože φ_f je bijekce, je ${\varphi_f}^{-1} \equiv \varphi_{f^{-1}}$. ♢

Definice 2.3.3. Grupu všech afinních transformací n-rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ nazýváme *afinní grupou* nebo *grupou afinit* prostoru $\mathcal{A}_n$ a značíme $(\mathfrak{A}_n, \circ)$.

Věta 2.3.4. *Nechť afinita $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ má vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$ souřadnicové vyjádření*

$$f : (X') = A(X) + B\,,$$

pak f^{-1} má souřadnicové vyjádření

$$f^{-1} : (X') = A^{-1}(X) - A^{-1}B\,.$$

Důkaz. Protože f je bijekce, je matice A regulární a z rovnic f vynásobením A^{-1} dostaneme tvrzení věty. □

Věta 2.3.5. *Zobrazení m, které přiřadí afinitě f její modul, je grupový homomorfismus z $(\mathfrak{A}_n, \circ)$ do $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.*

Důkaz. Tato věta je důsledkem Věty 2.3.2. □

Využitím toho, že úplným vzorem libovolné podgrupy v $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je podgrupa v $(\mathfrak{A}_n, \circ)$, můžeme definovat některé významné podgrupy grupy afinit. Uvažujme v $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ podgrupu kladných reálných čísel $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Odpovídající podgrupa v grupě afinit je podgrupa všech afinit (značíme $({\mathfrak{A}_n}^+, \circ)$), jejichž modul je kladný, tj. $m(f) > 0$. Takovéto afinity budeme nazývat *přímé afinity.* Naopak afinity, jejichž modul je záporný, budeme nazývat *nepřímé afinity.* Snadno se vidí, že složením dvou nepřímých afinit je přímá afinita a tedy nepřímé afinity grupu netvoří. Geometrický význam přímé a nepřímé afinity je následující. Uvažujme afinní repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{A}_n$. Potom $\langle f(P); \varphi_f(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi_f(\mathbf{e}_n) \rangle$ je také afinní repér v $\mathcal{A}_n$ a matice A afinního zobrazení f vzhledem k repéru $\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ je maticí přechodu od prvního repéru k druhému. Pokud je $|A| > 0$, tj. f je přímá afinita, jsou oba repéry souhlasně orientované, a tedy přímá afinita zachovává orientaci prostoru. Pokud je naopak $|A| < 0$, tj. f je nepřímá afinita, jsou oba repéry opačně orientované, a tedy nepřímá afinita mění orientaci prostoru.

Uvažujme v $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ konečnou podgrupu $(\{1; -1\}, \cdot)$. Odpovídající podgrupa v grupě afinit je podgrupa všech afinit (značíme $(\mathfrak{E}_n, \circ)$), jejichž modul je roven 1 nebo (-1), tj. $m(f) = \pm 1$. Takovéto afinity budeme nazývat *ekviafinní zobrazení $\mathcal{A}_n$*. Geometrický význam ekviafinních zobrazení si ukážeme později v Části ??.

Úloha 2.3.1. Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v obecné poloze v $\mathcal{A}_3$. Afinita $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ je dána obrazy $A \mapsto C$, $B \mapsto D$, $C \mapsto B$, $D \mapsto A$. Určete rovnice f vzhledem afinnímu repéru $\mathcal{R} = \langle A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$. Zjistěte, zda je f přímá nebo nepřímá afinita. Určete rovnice f^{-1}.

Řešení: V daném afinním repéru je $A = [0; 0; 0]$, $B = [1; 0; 0]$, $C = [0; 1; 0]$, $D = [0; 0; 1]$. Souřadnicové rovnice f můžeme určit některou z metod použitých v Úloze 2.2.1 nebo 2.2.2. Použijeme II. metodu Úlohy 2.2.2. Máme $\overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{CD} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} \mapsto \overrightarrow{CB} = (1; -1; 0)$, $\overrightarrow{AD} \mapsto \overrightarrow{CA} = (0; -1; 0)$. Odtud dostáváme přímo rovnice f ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože je $|A| = -1$, je modul afinity záporné číslo a f je nepřímá afinita, která je navíc ekviafinním zobrazením.

Inverzní afinitu můžeme určit dvojím způsobem.

a) Ze zadání je jasné, že f^{-1} je určeno obrazy $A \mapsto D$, $B \mapsto C$, $C \mapsto A$, $D \mapsto B$. Potom postupujeme stejně, jako při určování rovnic f, tj. $\overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{DC} = (0; 1; -1)$, $\overrightarrow{AC} \mapsto \overrightarrow{CA} = (0; 0; -1)$, $\overrightarrow{AD} \mapsto \overrightarrow{DB} = (1; 0; -1)$, a dostaneme souřadnicové vyjádření f^{-1} ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Souřadnicové vyjádření f^{-1} můžeme také dostat z rovnic f vynásobením maticí inverzní k matici A. $\triangle$

2.4 Samodružné prvky afinního zobrazení

V této části skript budeme studovat samodružné útvary afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Definujme nejdříve samodružné útvary pro libovolné zobrazení.

Definice 2.4.1. Nechť M je neprázdná množina a $f : M \to M$ je zobrazení. Prvek $X \in M$ nazýváme *samodružným prvkem (pevným prvkem)* zobrazení f, jestliže $f(X) = X$.

Neprázdná podmnožina $U \subseteq M$ se nazývá *silně samodružná* podmnožina zobrazení f, je-li $f(X) = X$ pro všechna $X \in U$.

Neprázdná podmnožina $U \subseteq M$ se nazývá *slabě samodružná* podmnožina zobrazení f, je-li $f(U) \subseteq U$ a U není silně samodružná. Jinými slovy $f(X) \in U$ pro všechna $X \in U$ a existuje $Y \in U$ takový, že $f(Y) \neq Y$.

Poznámka 2.4.1. Silně samodružná podmnožina nějakého zobrazení je tedy samodružná prvek po prvku, kdežto slabě samodružná podmnožina je samodružná jen jako celek, její jednotlivé prvky nemusí být samodružné. $\diamondsuit$

Aplikujme nyní předchozí Definici 2.4.1 na afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$. V tomto případě hovoříme o *samodružných (pevných) bodech* afinního zobrazení f.

Věta 2.4.1. *Pokud má afinní zobrazení samodružné body, je množina samodružných bodů afinním podprostorem v $\mathcal{A}_n$.*

Důkaz. Nechť má f alespoň jeden samodružný bod, např. A. Pokud nemá f již další samodružné body, je množina samodružných bodů 0-dimenzionální podprostor tvořený jediným bodem A.

Nechť má f další samodružný bod $B \neq A$. Potom každý bod přímky $p(AB)$ je samodružný. Opravdu, pro $X \in p(AB)$, $A \neq X \neq B$, je z $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{BX}$ pro nějaké $0 \neq \lambda \neq 1$ podle Věty 2.1.1 $\overrightarrow{f(A)f(X)} = \lambda\overrightarrow{f(B)f(X)} \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(X)} = \lambda\overrightarrow{Bf(X)}$. Odtud je $f(X) \in p(AB)$ a $(f(X); A, B) = (X; A, B)$, což je možné pouze pro $f(X) = X$. Pokud již neexistuje samodružný bod neležící na přímce $p(AB)$, je množina samodružných bodů právě přímka $p(AB)$, tj. podprostor dimenze jedna.

Pokud existuje samodružný bod C, který neleží na přímce $p(AB)$, je podle předchozí kostrukce libovolný bod přímek určených bodem C a libovolným bodem přímky $p(AB)$ také samodružný. Tyto body tvoří rovinu $\rho(ABC)$ samodružných bodů. Pokud již neexistuje samodružný bod neležící v rovině $\rho(ABC)$, je množina samodružných bodů právě rovina $\rho(ABC)$, tj. podprostor dimenze dva.

Výše popsaným způsobem tak dojdeme po konečném počtu kroků, že množina samodružných bodů afinního zobrazení f je podprostor dimenze $k \leq n$. $\square$

Popišme nyní výpočet samodružných bodů v souřadnicovém vyjádření afinního zobrazení vzhledek k libovolnému repéru $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$. Předpokládajme, že má f souřadnicové vyjádření $(X') = A(X) + B$. Potom pro samodružný bod X je $(X') = (X)$ a dostaneme

$$(A - E_n)(X) + B = (0)\,, \tag{2.4.1}$$

kde E_n je jednotková matice řádu n a (0) je sloupcová matice tvořena nulami. Po rozepsání dostaneme tuto soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-1)x_n + b_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Je zřejmé, že množina řešení soustavy (2.4.2) je opravdu podprostor v $\mathcal{A}_n$, což je v souladu s Větou 2.4.1.

Věta 2.4.2. *Pokud má afinní zobrazení f alespoň jeden samodružný bod, pak existuje takový afinní repér $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$, že f má vzhledem k tomuto repéru souřadnicové vyjádření*

$$(f(X)) = A(X)\,. \tag{2.4.3}$$

Důkaz. Je-li $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\rangle$ afinní repér a počátek je samodružný bod f, tj. $f(P) = P$, pak tvrzení plyne z $P = [0; \ldots; 0]$. □

Definice 2.4.2. Nechť f je afinní zobrazení prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe a φ_f je jeho asociované lineární zobrazení. *Vlastním směrem*, respektive *vlastním vektorem*, respektive *vlastním číslem*, afinního zobrazení f rozumíme vlastní směr, respektive vlastní vektor, respektive vlastní číslo, asociovaného lineárního zobrazení φ_f.

Připomeňme, jak je definován vlastní směr, vlastní vektor a vlastní číslo lineárního zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}_n)$. *Vlastní směr lineárního zobrazení φ_f* je jednodimenzionální podprostor $L(\mathbf{u})$, který je invariantní vzhledem k φ_f, tj. $\varphi_f(L(\mathbf{u})) \subset L(\mathbf{u})$. Nenulový vektor $\mathbf{u}$, který generuje vlastní směr, se nazývá *vlastní vektor lineárního zobrazení φ_f* a musí pro něj platit $\varphi_f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$. Reálné číslo λ z předchozího vyjádření se nazývá *vlastní číslo lineárního zobrazení φ_f* příslušné vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$.

Poznámka 2.4.2. Z geometrického významu vlastního směru vyplývá, že přímka, jejíž zaměření je vlastním směrem, se zobrazí buď do bodu (pro nulové vlastní číslo) nebo se zobrazí na přímku rovnoběžnou. ♢

Vyjádřeme nyní podmínky pro vlastní směry v libovoných souřadnicích. Nechť vzhledem k libovolnému repéru v $\mathcal{A}_n$ má φ_f souřadnicové vyjádření $(\mathbf{u}') = A(\mathbf{u})$. Podmínka $\varphi_f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ pro vlastní vektor je nyní tvaru $A(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})$, což upravíme na tvar

$$(A - \lambda E_n)(\mathbf{u}) = (\mathbf{o})\,, \tag{2.4.4}$$

kde E_n je jednotková matice řádu n a $\mathbf{o}$ je nulový vektor. (2.4.4) jsou maticovým zápisem soustavy homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n &= 0\,, \\ a_{21}u_1 + (a_{22}-\lambda)u_2 + \cdots + a_{2n}u_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)u_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Protože podle předpokladu musí být vlastní vektor nenulový, musí mít soustava (2.4.5) nenulové řešení a tedy determinant matice soustavu $(A - \lambda E_n)$ musí být nulový.

Věta 2.4.3. *Hodnota determinantu $|A-\lambda E_n|$ je nezávislá na zvoleném afinním repéru v $\mathcal{A}_n$.*

Důkaz. Je-li $\mathcal{R}'$ jiný repér v $\mathcal{A}_n$ a Q je matice přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\mathcal{R}'$, je podle Věty 2.2.2 matice φ_f vzhledem k repéru $\mathcal{R}'$ tvaru $Q^{-1}AQ$. Potom $|Q^{-1}AQ-\lambda E_n| = |Q^{-1}AQ - Q^{-1}\lambda E_n Q| = |Q^{-1}(A-\lambda E_n)Q| = |Q^{-1}|\cdot|(A-\lambda E_n)|\cdot|Q| = \frac{1}{|Q|}\cdot|(A-\lambda E_n)|\cdot|Q| = |(A-\lambda E_n)|$. □

Definice 2.4.3. Nechť f je afinní zobrazení prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe a φ_f je jeho asociované lineární zobrazení. Nechť má f vzhledem k nějakém afinnímu repéru souřadnicové rocnice $(X') = A(X) + B$. Rovnice

$$|A-\lambda E_n| = 0 \tag{2.4.6}$$

se nazývá *charakteristická rovnice* afinního zobrazení f.

Poznámka 2.4.3. Charakteristická rovnice (2.4.6) afinního zobrazení je tedy totožná s charakteristickou rovnicí asociovaného lineárního zobrazení φ_f. Z Věty 2.4.3 vyplývá, že charakteristická rovnice je nezávislá na použitých souřadnicích a je to tedy opravdu rovnice přiřazená jednoznačně danému afinnímu zobrazení. ♢

Poznámka 2.4.4. Rozepišme charakteristickou rovnici (2.4.6) afinního zobrazení podrobněji. Dostaneme

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4.7}$$

a odtud je okamžitě vidět, že charakteristická rovnice je polynomiální rovnice stupně n. Vlastní čísla afinního zobrazení jsou potom reálné kořeny charakteristické rovnice. Z nezávislosti charakteristické rovnice na afinním repéru, vzhledem ke kterému vyjadřujeme rovnice afinního zobrazení, vyplývá, že také vlastní čísla jsou na zvoleném repéru nezávislá.

Poznamenéjme ještě, ža má-li charakteristická rovnice afinního zobrazení f dvojici komplexně sdružených kořenů, odpovídá jim dvoudimenzionální podprostor invariantní vzhledem k φ_f, a tedy roviny, které mají tento podprostor jako zaměření se zobrazí na rovnoběžné roviny. $\diamondsuit$

Pro libovolný nenulový kořen charakteristické rovnice (2.4.7) dostaneme, že homogenní soustava (2.4.5) má nenulové řešení a každý nenulový vektor, který je řešením soustavy (2.4.5), je vlastním vektorem příslušným k tomuto kořenu.

Poznámka 2.4.5. Pro nulový kořen charakteristické rovnice (2.4.6) afinního zobrazení platí, že mu odpovídající vektory se zobrazí na nulový vektor. Je tedy obecné řešení soustavy (2.4.5) pro $\lambda = 0$ jádrem φ_f. Protože prosté lineární zobrazení má triviální jádro, dostáváme tak, že f je prosté (je to afinita) právě tehdy, když nula není vlastním číslem f. $\diamondsuit$

Později, při klasifikacích afinit, budeme potřebovat následující větu.

Věta 2.4.4. *Jestliže jednička není vlastním číslem $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$, pak má f právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Provedeme v libovolném repéru. Jestliže jednička není kořenem charakteristické rovnice, je matice $(A - E_n)$ regulární a nehomogenní soustava (2.4.2) má právě jedno řešení. $\square$

Věta 2.4.5. *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla lineárního zobrazení φ_f a $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ jsou jim odpovídající vlastní vektory. Z posloupnosti $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ vybereme libovolnou maximální posloupnost nezávislých vektorů, nechť je to například prvních r vektorů $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$, $1 \le r \le k$. Nyní pokračujeme sporem. Předpoládejme, že $r < k$. Potom

$$\mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathbf{u}_i \,, \qquad c_i \in \mathbb{R} \,,$$

a tedy $\lambda_{r+1} \cdot \mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{r+1} \cdot c_i \cdot \mathbf{u}_i$. Na druhé straně

$$\lambda_{r+1} \cdot \mathbf{u}_{r+1} = \varphi_f(\mathbf{u}_{r+1}) = \varphi_f(\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \varphi_f(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i\,.$$

Porovnáním dostaneme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_{r+1} \cdot c_i \cdot \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot (\lambda_{r+1} - \lambda_i) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{o}\,.$$

Z lineární nezávislosti $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ plyne $c_i \cdot (\lambda_{r+1} - \lambda_i) = 0$, $i = 1, \cdots, r$, a podle předpokladu $(\lambda_{r+1} - \lambda_i) \neq 0$ musí být $c_i = 0$ pro všechna $i = 1, \cdots, r$. Potom ale $\mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{o}$ a to je ve sporu s definicí vlastního vektoru, který musí být nenulový. Tedy $r = k$ a vektory $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ jsou lineárně nezávislé. □

Věta 2.4.6. *Nechť má afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ n různých (reálných) vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potom vzhledem k afinnímu repéru, kde za základní souřadné vektory vezmeme vlastní vektory f, má f souřadnicové rovnice*

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 + b_1\,, \\ &\cdots \\ x_n' &= \lambda_n x_n + b_n\,, \end{aligned}$$

tj. matice afinního zobrazení je diagonální. Má-li navíc f alespoň jeden samodružný bod, volbou počátku afinního repéru do samodružného bodu dostaneme $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Je-li v afinním repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ vektor $\mathbf{e}_i$ vlastní vektor f příslušný vlastnímu číslu λ_i, jsou v i-tém sloupci matice zobrazení souřadnice vektoru $\varphi_f(\mathbf{e}_i) = (0; \cdots; 0; \lambda_i; 0; \cdots; 0)$, kde λ_i je na i-tém místě. □

Úloha 2.4.1. Určete všechny samodružné body a vlastní směry afinního zobrazení na $\mathcal{A}_3$, které je dáno vzhledem k nějakému repéru rovnicemi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zobrazení má rovinu samodružných bodů $\rho : x-y+3z+1=0$. Charakteristická rovnice je $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0$. Kořeny jsou $\lambda_{1,2}=1$ a $\lambda_3=-1$. Kořeni $\lambda_{1,2}=1$ odpovídá dvoudimenzionální prostor vlastních vektorů $k\,(-3;0;1)+l\,(1;1;0)$ a kořeni $\lambda_3=-1$ odpovídá jednodimenzionální prostor vlastních vektorů $m\,(-2;-1;1)$. △

2.5 Posunutí, stejnolehlost, homotetie

Na střední škole jsme studovali posunutí a stejnolehlost v euklidovských prostorech. Tato zobrazení se ale dají definovat již v afinních prostorech libovolné dimenze. Začneme s posunutím.

Definice 2.5.1. Nechť $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$ je vektor. Zobrazení, které přiřadí každému bodu $X \in \mathcal{A}_n$ bod $X' \in \mathcal{A}_n$ takový, že

$$X' = X + \mathbf{u} \tag{2.5.1}$$

se nazývá *posunutí (translace) afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$ o vektor $\mathbf{u}$ a značíme ho $t_{\mathbf{u}}$.

Věta 2.5.1. *Posunutí o nulový vektor je identita, posunutí o nenulový vektor je afinita $\mathcal{A}_n$, která nemá žádný samodružný bod a všechny směry jsou vlastní směry.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{u}=\mathbf{o}$. Potom $t_{\mathbf{o}}(X)=X+\mathbf{o}=X$, a tedy $t_{\mathbf{o}} \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$.

Nechť $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Protože $t_{\mathbf{u}}(X)=X+\mathbf{u}$, je podle axiomů afinního prostoru ([HoJa]) $t_{\mathbf{u}}$ bijekce $\mathcal{A}_n$. Nechť $X,Y,Z \in \mathcal{A}_n$ jsou tři body takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned}\overrightarrow{t_{\mathbf{u}}(X)t_{\mathbf{u}}(Z)} &= (Z+\mathbf{u})-(X+\mathbf{u}) = \overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}\\ &= \lambda(Z-Y) = \lambda((Z+\mathbf{u})-(Y+\mathbf{u}))\\ &= \lambda\overrightarrow{t_{\mathbf{u}}(Y)t_{\mathbf{u}}(Z)}\,,\end{aligned}$$

a podle Věty 2.1.1 je $t_{\mathbf{u}}$ afinní zobrazení.

Dále, pro samodružný bod platí $X = X + \mathbf{u}$, a z vlastností afinních prostorů to je možné pouze pro $\mathbf{u}=\mathbf{o}$, kdy je každý bod samodružný. Pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ nemůže být žádný bod samodružný.

Pro asociované lineární zobrazení $\varphi_{t_{\mathbf{u}}}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi_{t_{\mathbf{u}}}(\overrightarrow{XY}) &= \overrightarrow{t_{\mathbf{u}}(X)t_{\mathbf{u}}(Y)}\\ &= (Y+\mathbf{u})-(X+\mathbf{u}) = \overrightarrow{XY}\,,\end{aligned}$$

tj. $\varphi_{t_{\mathbf{u}}} \equiv \mathrm{id}_{Z(\mathcal{A}_n)}$, která má všechny směry samodružné. □

Vyjádřeme nyní posunutí o vektor $\mathbf{u}$ v libovolném afinním repéru. Nechť $\mathbf{u} = (u_1; \dots ; u_n)$ je souřadnicové vyjádření vektoru $\mathbf{u}$. $X = [x_1; \dots ; x_n]$ je libovolný bod a $X' = X + \mathbf{u}$. Potom v souřadnicích tomu odpovídá maticový zápis

$$(X') = E_n(X) + (\mathbf{u}) , \tag{2.5.2}$$

kde E_n je jednotková matice řádu n. Rozepsáním jednotlivých souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{u}} : \quad x_1' &= x_1 + u_1 , \\ &\dots \\ x_n' &= x_n + u_n . \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Posunutí je tedy afinita s jednotkovou maticí jako maticí zobrazení v libovolném souřadnicovém vyjádření.

Definice 2.5.2. Nechť $S \in \mathcal{A}_n$ je bod a $0 \neq \kappa \in \mathbb{R}$. Zobrazení, které přiřadí každému bodu $X \in \mathcal{A}_n$ bod $X' \in \mathcal{A}_n$ takový, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX} \tag{2.5.4}$$

se nazývá *stejnolehlost afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$ a značíme ho $s(S, \kappa)$. Bod S se nazývá *střed stejnolehlosti* a číslo κ *koeficient stejnolehlosti.* Pro $\kappa \neq 1$ hovoříme o *vlastní stejnolehlosti.*

Poznámka 2.5.1. Na střední škole byla stejnolehlost definována jako zobrazení v euklidovské rovině, které bylo dáno bodem S (středem stejnolehlosti) a reálným číslem $\kappa \neq 0$ (koeficientem stejnolehlosti). Každý bod $X \neq S$ se zobrazil do bodu X' takového, že platí:

1. polopřímky SX a SX' jsou totožné pro $\kappa > 0$ a opačné pro $\kappa < 0$;
2. $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$, tj. $|\kappa| = \frac{|SX'|}{|SX|}$.

Snadno se vidí, že tato definice se dá rozšířit na euklidovský prostor libovolné dimenze a že určuje totéž zobrazení jako Definice 2.5.2. ♢

Věta 2.5.2. *Stejnolehlost s koeficientem $\kappa = 1$ je identita, stejnolehlost s koeficientem $\kappa \neq 1$ je afinita $\mathcal{A}_n$, která má jediný samodružný bod S a všechny směry jsou vlastní směry.*

Důkaz. Nechť $\kappa = 1$, potom $s(S, 1)(X) = X$, a tedy $s(S, 1) \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$.

Nechť $\kappa \neq 1$, označujme v tomto důkaze krátce $s(S, \kappa) = s$.

s je bijekce. Opravdu máme $s(X) = s(Y) \Leftrightarrow \kappa X + (1 - \kappa)S = \kappa Y + (1 - \kappa)S \Leftrightarrow \kappa X = \kappa Y \Leftrightarrow \kappa \overrightarrow{XY} = \mathbf{o} \Leftrightarrow X = Y$, tj. s je injektivní. Podobně, je-li $X' \in \mathcal{A}_n$, pak existuje právě jeden bod $X \in \mathcal{A}_n$ takový, že $s(X) = X'$ a to bod $X = \frac{1}{\kappa}X' - \frac{1-\kappa}{\kappa}S$, což znamená, že s je surjektivní.

Nechť $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ jsou tři body takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}$. Potom

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s(X)s(Z)} &= (\kappa Z + (1-\kappa)S) - (\kappa X + (1-\kappa)S) = \kappa\overrightarrow{XZ} \\ &= \kappa\lambda\overrightarrow{YZ} = \lambda((\kappa Z + (1-\kappa)S) - (\kappa Y + (1-\kappa)S) \\ &= \lambda\overrightarrow{s(Y)s(Z)}\,,\end{aligned}$$

a podle Věty 2.1.1 je s afinní zobrazení.

Pro samodružné body platí $X = \kappa X + (1-\kappa)S \Leftrightarrow (1-\kappa)X = (1-\kappa)S \Leftrightarrow (1-\kappa)\overrightarrow{XS} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \kappa = 1 \vee X = S$. Tedy pro $\kappa = 1$ je každý bod samodružný (stejnolehlost je identita) a pro $\kappa \neq 1$ je samodružný jediný bod S.

Pro libovolný vektor $\overrightarrow{XY}$ je $\varphi_s(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{s(X)s(Y)} = \kappa\overrightarrow{XY}$, tj. $\mathbf{u} = \overrightarrow{XY}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu κ. Protože $\mathbf{u}$ byl libovolný vektor, jsou všechny směry vlastní směry s příslušné vlastnímu číslu κ. □

Vyjádření (2.5.4) se dá psát jako $X' = \kappa X + (1-\kappa)S$ a v souřadnicích v libovolném afinním repéru tomu odpovídá maticový zápis

$$(X') = \kappa E_n(X) + (1-\kappa)(S)\,, \tag{2.5.5}$$

což pro $S = [s_1; \ldots ; s_n]$ rozepíšeme

$$\begin{aligned} s(S,\kappa):\quad x_1' &= \kappa x_1 + (1-\kappa)s_1\,, \\ &\ \ \ldots \\ x_n' &= \kappa x_n + (1-\kappa)s_n\,, \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

a tedy stejnolehlost s koeficientem κ je afinita s maticí κE_n v libovolném souřadnicovém vyjádření.

Poznámka 2.5.2. Protože vzhledem k libovolnému afinnímu repéru je matice stejnolehlosti, respektive posunutí, rovna κE_n, respektive E_n, je modul stejnolehlosti roven κ^n, respektive je modul posunutí roven 1.

Posunutí je tedy vždy přímá afinita. Je-li dimenze afinního prostoru sudá, je $\kappa^n > 0$ a každá vlastní stejnolehlost je přímá afinita. Je-li dimenze prostoru lichá, jsou stejnolehlosti s kladným koeficieltem přímé afinity a stejnolehlosti se záporným koeficientem nepřímé afinity. ♢

Poznámka 2.5.3. Je-li koeficient stejnolehlosti roven -1, je $X' = -X + 2\,S$, t.j. $\overrightarrow{SX'} = -\overrightarrow{XS}$ a dostáváme *symetrii podle bodu (středovou symetrii)* S jako speciální případ vlastní stejnolehlosti. Bod S se nazývá *středem symetrie.* ♢

Z Vět 2.5.1 a 2.5.2 vyplývá, že stejnolehlosti a posunutí mají společnou vlastnost – všechny směry prostoru $\mathcal{A}_n$ jsou vlastní směry těchto zobrazení. Studujme obecně všechna afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$, která mají tuto vlastnost.

Definice 2.5.3. Afinita afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, pro kterou je libovolný směr vlastním směrem, se nazývá *homotetie afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$.

Věta 2.5.3. *Je-li f homotetie afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, pak je f buď posunutí, nebo stejnolehlost.*

Důkaz. Nechť f je afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$, které má všechny směry vlastní, tj. pro každý vektor $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$ existuje $\lambda(\mathbf{u})$ takové, že platí $\varphi_f(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{u}$, kde λ je funkce $\mathbf{u}$. Nechť $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je libovolná báze $Z(\mathcal{A}_n)$. Potom $\varphi_f(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $i = 1 \dots, n$, a odtud

$$\varphi_f(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n$$

a současně

$$\varphi_f(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n) = k(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n)\,.$$

Tedy $k = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. Odtud $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ pro všechna $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$ a všechny směry jsou vlastní směry f příslušné jedinému vlastnímu číslu k.

a) Nechť nyní $k = 0$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ je nulové zobrazení. Uvažujme libovolný bod $B \in \mathcal{A}_n$, potom $f(B+\mathbf{u}) = f(B)$, tj. celý prostor se zobrazuje do jediného bodu $f(B)$. Toto zobrazení ovšem není homotetií, protože není afinitou.

b) Nechť $k \neq 0$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ a každý směr je vlastním směrem příslušným vlastní hodnotě k, tj. f je homotetie. Potom $f(B+\mathbf{u}) = f(B) + k\overrightarrow{BX}$, kde $X = B + \mathbf{u}$. Pro $k = 1$ je toto zobrazení posunutím o vektor $\overrightarrow{Bf(B)}$ a pro $k \neq 1$ jde o vlastní stejnolehlost s koeficientem k a středem $S = B + \frac{1}{1-k}(f(B) - B)$. □

Věta 2.5.4. *Homotetie afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ tvoří podgrupu v grupě afinit.*

Důkaz. Z Definice 2.5.3 je zřejmé, že složením dvou homotetií je opět homotetie a že identita je homotetie. Musíme pouze ukázat, že je-li f homotetie, je i f^{-1} homotetie. V důkaze Věty 2.5.3 jsme dokázali, že pro homotetii f existuje nenulové číslo k takové, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$. Protože je φ_f izomosfizmus, je $\mathbf{u} = (\varphi_f)^{-1}(\varphi_f(\mathbf{u})) = (\varphi_f)^{-1}(k\mathbf{u}) = k(\varphi_f)^{-1}(\mathbf{u})$, a tedy $(\varphi_f)^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{1}{k}\mathbf{u}$ a z identity $(\varphi_f)^{-1} \equiv \varphi_{f^{-1}}$ dostaneme, že každý směr je vlastním směrem f^{-1} pro vlastní hodnotu $\frac{1}{k}$, a tedy f^{-1} je homotetie. □

Definice 2.5.4. Podgrupa v grupě afinit prostoru $\mathcal{A}_n$, kterou jsme definovali v předchozí Větě 2.5.4 se nazývá *grupa homotetií afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$ a označujeme ji $(\mathfrak{H}_n, \circ)$.

Podle Věty 2.5.4 je složením dvou homotetií opět homotetie. Probereme si jednotlivé možnosti, které mohou nastat.

Nechť jsou obě homotetie posunutím, tj. $t_{\mathbf{u}}$ a $t_{\mathbf{v}}$. Potom

$$(t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}})(X) = t_{\mathbf{v}}(X + \mathbf{u}) = (X + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = X + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t_{(\mathbf{u}+\mathbf{v})}(X)\,,$$

a tedy složením dvou posunutí o vektory $\mathbf{u}$, respektive $\mathbf{v}$, je posunutí o vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Operace skládání posunutí je tedy vnitřní operací na množině všech posunutí, a protože identita je také posunutí a $t_{-\mathbf{u}}$ je opačné posunutí k $t_{\mathbf{u}}$, je množina všech posunutí grupa, která je navíc komutativní (to vyplývá z toho, že $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}} = t_{(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = t_{(\mathbf{v}+\mathbf{u})} = t_{\mathbf{u}} \circ t_{\mathbf{v}}$). Grupu všech posunutí značíme $(\mathfrak{T}_n, \circ)$ a tato grupa je izomorfní s grupou $(Z(\mathcal{A}_n), +)$. V některých přístupech ke středoškolské látce byl izomorfizmus těchto grup využíván k definici pojmu volného vektoru, který byl definován jako příslušné posunutí.

Nechť je nyní jedna homotetie posunutí $t_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, a druhá vlastní stejnolehlost $s(S, \kappa)$. Potom

$$(t_{\mathbf{u}} \circ s(S, \kappa))(X) = t_{\mathbf{u}}(\kappa X + (1 - \kappa)S) = (\kappa X + (1 - \kappa)S) + \mathbf{u}\,,$$

což je vlastní stejnolehlost s koeficientem κ a středem $S + \frac{1}{1-\kappa}\mathbf{u}$ (poznamenejme, že střed se určí jako samodružný bod). Protože $(\kappa X + (1 - \kappa)S) + \mathbf{u} = \kappa(X + \mathbf{u}) + (1 - \kappa)(S + \mathbf{u}) = s(S + \mathbf{u}, \kappa) \circ t_{\mathbf{u}}(X)$ je $t_{\mathbf{u}} \circ s(S, \kappa) = s(S + \mathbf{u}, \kappa) \circ t_{\mathbf{u}}$ takže skládání posunutí a vlastní stejnolehlosti nekomutuje, protože $s(S, \kappa) \not\equiv s(S + \mathbf{u}, \kappa)$.

Podobně dostaneme, že $s(S, \kappa) \circ t_{\mathbf{u}}$ je vlastní stejnolehlost s koeficientem κ a středem $S + \frac{\kappa}{1-\kappa}\mathbf{u}$.

Konečně mějme dvě stejnolehlosti $s(S, \kappa)$ a $s(R, \lambda)$. Potom

$$\begin{aligned}
(s(R, \lambda) \circ s(S, \kappa))(X) &= s(R, \lambda)(\kappa X + (1 - \kappa)S) \\
&= \lambda(\kappa X + (1 - \kappa)S) + (1 - \lambda)R \\
&= \lambda\kappa X + \lambda(1 - \kappa)S) + (1 - \lambda)R \\
&= \lambda\kappa X + \lambda(S - R) - \lambda\kappa S + R\,.
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě vyplývá, že pro $\lambda\kappa = 1$ je složené zobrazení posunutím o vektor $(1 - \lambda)\overrightarrow{SR}$. Je-li navíc $S \equiv R$, je složené zobrazení identita, a tedy $(s(S, \kappa))^{-1} \equiv s(S, \frac{1}{\kappa})$. Pro $\lambda\kappa \neq 1$ je složené zobrazení opět stejnolehlost s koeficientem $\lambda\kappa$ a středem $\frac{1}{1-\lambda\kappa}\big(\lambda(S-R)-\lambda\kappa S+R\big)$. Pokud bychom složili stejnolehlosti v opačném pořadí, dostaneme

$$(s(S,\kappa)\circ s(R,\lambda))(X)=\lambda\kappa X+\kappa(R-S)-\lambda\kappa R+S$$

tj. skládání stejnolehlostí není komutativní. Složením dvou stejnolehlostí tedy není obecně stejnolehlost ale homotetie, a samotné stejnolehlosti tedy netvoří grupu.

Věta 2.5.5. *Nechť t je posunutí a h je homotetie, pak $h^{-1}\circ t\circ h$ je posunutí.*

Důkaz. Na základě Vět 2.5.1 a 2.5.3 je posunutí taková homotetie, která nemá samodružný bod. Důkaz nyní provedeme sporem. Nechť homotetie $h^{-1}\circ t\circ h$ má samodružný bod P, tj. $(h^{-1}\circ t\circ h)(P)=P$. Potom $h(P)=(t\circ h)(P)$, a tedy t má samodružný bod $h(P)$ a to je ve sporu s předpokladem, že t je posunutí. Tedy $h^{-1}\circ t\circ h$ nemá samodružné body a jedná se o posunutí. □

Důsledek 2.5.1. Množina všech posunutí a symetrií podle všech možných středů tvoří podgrupu v grupě homotetií. Je-li t posunutí a s středová symetrie, je $s^{-1}\circ t\circ s$ je posunutí.

Důkaz. Středová symetrie je stejnolehlost s koeficientem -1. Podle předchozích úvah je složením středové symetrie s posunutím opět středová symetrie a složením dvou středových symetrií se stejnými středy je identita a složením dvou středových symetrií s různými středy je posunutí. □

Poznámka 2.5.4. Připomeňme, že podgrupa $\mathfrak{T}$ grupy $\mathfrak{H}$ se nazývá *normální podgrupa*, je-li pro každé $t\in\mathfrak{T}$ a každé $h\in\mathfrak{H}$ prvek $h^{-1}\circ t\circ h\in\mathfrak{T}$. Je tedy grupa posunutí normální podgrupou v grupě homotetií i v podgrupě posunutí a středových symetrií. ♢

Poznámka 2.5.5. Shrneme-li výsledky Části 3 a Vět 2.5.4 a 2.5.5 dostáváme následující graf podgrup grupy všech afinit prostoru $\mathcal{A}_n$, kde šipka znázorňuje inkluzi. Situaci musíme navíc rozlišit pro lichou a sudou dimenzi.

Sudá dimenze $n=2k$:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{A}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
({\mathfrak{A}_n}^+, \circ) \arrow[d] \arrow[drr] & & (\mathfrak{E}_n, \circ) \arrow[d] \\
(\mathfrak{H}_n, \circ) \arrow[dr] & & (\mathfrak{E}_n^+, \circ) \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathrm{Id}, \circ) &
\end{tikzcd}$$

Lichá dimenze $n = 2k + 1$:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{A}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
({\mathfrak{A}_n}^+, \circ) \arrow[d] \arrow[dr] & (\mathfrak{E}_n, \circ) \arrow[d] \arrow[dr] & (\mathfrak{H}_n, \circ) \arrow[dll] \arrow[d] \\
(\mathfrak{H}_n^+, \circ) \arrow[dr] & (\mathfrak{E}_n^+, \circ) \arrow[d] & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathrm{Id}, \circ) &
\end{tikzcd}$$

Připomeňme si kritéria, jak ze souřadnicového vyjádření afinity f poznat, do které podgrupy patří daná afinita. Především pro matici A afinity platí $|A| \neq 0$. Potom $f \in {\mathfrak{A}_n}^+$ právě tehdy, když $|A| > 0$, $f \in \mathfrak{E}_n$ právě tehdy, když $|A| = \pm 1$ a $f \in \mathfrak{H}_n$ právě tehdy, když $A = \kappa E_n$, $\kappa \neq 0$. Potom $f \in \mathfrak{E}_n^+ = \mathfrak{E}_n \cap {\mathfrak{A}_n}^+$ právě tehdy, když $|A| = 1$, $f \in \mathfrak{T}_n = \mathfrak{H}_n \cap \mathfrak{E}_n^+$ právě tehdy, když $A = E_n$, je-li navíc matice B nulová, jedná se o identitu. $\diamondsuit$

Úloha 2.5.1. Nechť je dána stejnolehlost s se středem $S = [1; 2; 1]$ a koeficientem $\kappa = -2$ a posunutí t o vektor $\mathbf{u} = (-1; 1; 1)$. Ukažte:

a) že zobrazení s^{-1} je stejnolehlost, nalezněte její střed a koeficient;

b) že zobrazení $s \circ t$ je stejnolehlost, nalezněte její střed a koeficient;

c) že zobrazení $t \circ s$ je stejnolehlost, nalezněte její střed a koeficient;

d) že zobrazení $s^{-1} \circ t \circ s$ je posunutí, nalezněte vektor příslušný tomuto posunutí.

Řešení: Úlohu vyřešíme v souřadnicích. Určíme nejdříve souřadnicová vyjádření s a t. Podle (2.5.3) a (2.5.6) je

$$\begin{aligned} s:\quad x' &= -2x + 3\,, & t:\quad x' &= x - 1\,,\\ y' &= -2y + 6\,, & y' &= y + 1\,,\\ z' &= -2z + 3\,, & z' &= z + 1\,. \end{aligned}$$

a) Z rovnic s určíme snadno rovnice inverzního zobrazení

$$\begin{aligned} s^{-1}:\quad x' &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\,,\\ y' &= -\tfrac{1}{2}y + 3\,,\\ z' &= -\tfrac{1}{2}z + \tfrac{3}{2}\,, \end{aligned}$$

tj. s^{-1} je stejnolehlost s koeficientem $\lambda = -\frac{1}{2}$ a středem $S = [1; 2; 1]$.

b) Dosazením z rovnic t do rovnic s dostaneme

$$\begin{aligned} s \circ t:\quad x' &= -2x + 5\,,\\ y' &= -2y + 4\,,\\ y' &= -2z + 1\,, \end{aligned}$$

tj. $s \circ t$ je stejnolehlost s koeficientem $\lambda = -2$ a středem $S = [\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}]$.

c) Dosazením z rovnic s do rovnic t dostaneme

$$\begin{aligned} t \circ s:\quad x' &= -2x + 2\,,\\ y' &= -2y + 7\,,\\ y' &= -2z + 4\,, \end{aligned}$$

tj. $t \circ s$ je stejnolehlost s koeficientem $\lambda = -2$ a středem $S = [\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}]$.

d) Dosazením z rovnic $t \circ s$ do rovnic s^{-1} dostaneme

$$\begin{aligned} s^{-1} \circ t \circ s:\quad x' &= x + \tfrac{1}{2}\,,\\ y' &= y - \tfrac{1}{2}\,,\\ y' &= z - \tfrac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

tj. $s^{-1} \circ t \circ s$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$. △

2.6 Základní afinní zobrazení

V této části se budeme zabývat těmi afinními zobrazeními prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe, které budou mít za množinu samodružných bodů nejméně nadrovinu. Tato afinní zobrazení hrají velice významnou roli, protože "generují" všechna afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$.

Definice 2.6.1. Afinní zobrazení afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe, které má za množinu samodružných bodů nejméně nadrovinu, se nazývá *základní afinní zobrazení* v prostoru $\mathcal{A}_n$. Afinita afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, která má za množinu samodružných bodů právě nadrovinu, se nazývá *základní afinita* prostoru $\mathcal{A}_n$.

Je-li $n = 2$, nazývá se základní afinita *osovou afinitou* a přímka samodružných bodů se nazývá *osou afinity.*

Věta 2.6.1. *Základní afinní zobrazení je určeno nadrovinou samodružných bodů a obrazem jednoho bodu, který v této nadrovině neleží.*

Důkaz. Podle Věty 2.1.9 je afinní zobrazení určeno obrazem $(n+1)$ bodů v obecné poloze. Zvolíme-li prvních n bodů v nadrovině samodružných bodů, tj. jsou samodružné, stačí pro určení afinního zobrazení znát obraz jediného bodu, který v této nadrovině neleží. □

Příklady základních afinních zobrazení známe z konstrukční geometrie v 3-rozměrném prostoru, jde se používá rovnoběžná projekce prostoru do roviny. Projekce se dají zobecnit na libovolnou dimenzi.

Definice 2.6.2. Nechť ρ je nadrovina v $\mathcal{A}_n$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{s} \in Z(\mathcal{A}_n)$ je libovolný vektor, který nepatří do zaměření ρ. Zobrazení, které každému bodu $X \in \mathcal{A}_n$ přiřadí bod $\rho \cap \{X; L(\mathbf{s})\}$ se nazývá *rovnoběžnou projekcí* prostoru $\mathcal{A}_n$ ve směru $L(\mathbf{s})$ do nadroviny ρ, značíme $r(\mathbf{s}, \rho)$. Směr $L(\mathbf{s})$ se nazývá *směrem projekce.*

Věta 2.6.2. *Rovnoběžná projekce prostoru do nadroviny ρ je afinní zobrazení hodnosti $(n-1)$, které má za množino samodružných bodů nadrovinu ρ.*

Důkaz. Uvažujme rovnoběžnou projekci $r(\mathbf{s}, \rho)$. Nechť jsou dány tři kolineární různé body A, B, C ležící na přímce p. Pokud $p \parallel \mathbf{s}$, je $\{A; L(\mathbf{s})\} \equiv \{B; L(\mathbf{s})\} \equiv \{C; L(\mathbf{s})\}$ a obrazem všech tří bodů je jediný bod. Pokud $p \nparallel \mathbf{s}$, jsou přímky $\{A; L(\mathbf{s})\}$, $\{B; L(\mathbf{s})\}$, $\{C; L(\mathbf{s})\}$ navzájem různé a rovnoběžné. Potom obrazy bodů A, B, C jsou tři různé kolineární body v ρ ležící na přímce q, kterou dostaneme jako průnik ρ s rovinou $\{A; Z(p) + L(\mathbf{s})\}$

(opravdu, podle Věty 6.5 skript [HoJa], je tento průnik přímka). Zachování dělícího poměru vyplývá z Věty 8.4 skript [HoJa] (viz také Úloha 2.1.1), a tedy $r(\mathbf{s},\rho)$ je afinní zobrazení.

Z definice je zřejmé, že pro $X \in \rho$ je $r(\mathbf{s},\rho)(X) = X$ a $r(\mathbf{s},\rho)(\mathcal{A}_n) = \rho$, tj. $h(r(\mathbf{s},\rho)) = n - 1$. □

Věta 2.6.3. *Nechť ρ je nadrovina v $\mathcal{A}_n$. Afinní zobrazení, pro které je ρ silně samodružná, je buď identita, nebo rovnoběžná projekce do nadroviny ρ nebo základní afinita.*

Důkaz. Nechť je nadrovina ρ silně samodružná v afinním zobrazení f. Podle Věty 2.6.1 je afinní zobrazení určeno nadrovinou ρ a obrazem jediného bodu $B \notin \rho$.

Mohou nastat následující možnosti:

1. $f(B) = B$, potom $f \equiv \mathrm{id}$.

2. $f(B) \in \rho$. Ukážeme, že v tomto případě je f rovnoběžnou projekcí $\mathcal{A}_n$ na ρ ve směru vektoru $\overrightarrow{Bf(B)}$, tj. musíme ukázat, že pro každé $X \neq B$, $X \notin \rho$, je $f(X) \in \rho$ a $Xf(X) \| Bf(B)$. Situaci rozdělíme na dva případy.

a) b)

Obr. 2.6.1

a) Není-li přímka BX rovnoběžná s ρ, označme Y průsečík přímky BX s nadrovinou ρ (viz Obr. 2.6.1 a)). Bod Y je potom samodružný bod zobrazení f, a tedy $f(Y) = Y$. Potom obraz bodu X leží na přímce $f(B)Y$ a $(f(X); f(B), f(Y)) = (X; B, Y)$. Tedy $f(X) \in \rho$ a přímky $Xf(X)$, $Bf(B)$ jsou rovnoběžné.

b) Je-li přímka BX rovnoběžná s nadrovinou ρ (viz Obr. 2.6.1 b)), můžeme zvolit v nadrovině ρ bod Z tak, aby $Bf(B)ZX$ byl rovnoběžník, tedy $X - B = Z - f(B)$. Pak, protože Z a $f(B)$ jsou samodružné body f, je $f(X) - f(B) = Z - f(B)$, tj. $f(X) = Z$. Potom $f(X) \in \rho$ a $f(X) - f(B) = X - B$, tj. opět přímky $Xf(X)$, $Bf(B)$ jsou rovnoběžné.

V obou případech je tedy $f(X)$ rovnoběžnou projekcí bodu X do nadroviny ρ ve směru $\overrightarrow{Bf(B)}$.

3. Pokud $f(B) \notin \rho$ a $f(B) \neq B$, je f základní afinita. □

Všimněme si nyní blíže základních afinit. Předpokládejme, že základní afinita má nadrovinu samodružných bodů ρ a zobrazí bod $B \notin \rho$ na $f(B) \notin \rho$, $B \neq f(B)$. Nechť nejdříve přímka $Bf(B)$ není rovnoběžná s ρ, tj. přímka $Bf(B)$ má s nadrovinou ρ společný bod B_0, který je samodružným bodem afinity f. Uvažujme bod $X \neq B$ a sestrojme jeho obraz. Situaci rozdělíme na dvě možnosti. Nechť nejdříve přímka BX není rovnoběžná s ρ (viz Obr. 2.6.2 a)), pak průsečík Y přímky BX s ρ je samodružným bodem zobrazení f. Protože X je bodem přímky BY, je $f(X)$ bodem přímky $f(B)Y$ a platí $(X; B, Y) = (f(X); f(B), Y)$. Odtud $Xf(X) \| Bf(B)$. Dostaneme tedy obraz $f(X)$ bodu X jako průsečík přímky $f(B)Y$ a rovnoběžky s přímkou $Bf(B)$ vedenou bodem X. Je-li přímka BX rovnoběžná s ρ, je $f(X)$ ten bod, kterým se doplní body $X, B, f(B)$ na rovnoběžník (viz Obr. 2.6.2 b)).

a) b)

Obr. 2.6.2

V případě, že je přímka $Bf(B)$ rovnoběžná s nadrovinou ρ, postupujeme při konstrukci obrazů bodů X naprosto stejným způsobem, jako v předchozím případě (na Obr. 2.6.3 je tato situace zobrazena jen pro bod X takový, ža přímka BX není rovnoběžná s ρ).

Obr. 2.6.3

Definice 2.6.3. Základní afinita f s nadrovinou samodružných bodů ρ taková, že $\overrightarrow{Bf(B)} \in Z(\rho)$, $B \notin \rho$, se nazývá *elace.*

Poznámka 2.6.1. Z definice elace je zřejmé, že zúžení elace na nadrovinu, která je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, je posunutí v této nadrovině. ♢

Věta 2.6.4. *Nechť f je základní afinita, která není elace a je dána nadrovinou samodružných bodů ρ a obrazem bodu $B \notin \rho$. Pro každý bod $X \notin \rho$ označme X_0 průsečík přímky $Xf(X)$ s nadrovinou ρ. Pak dělící poměr $(X_0; X, f(X))$ je konstantní, nezávislý na volbě X.*

Důkaz. Pro základní afinitu, která není elací, jsou body $B, f(B)$ a B_0 tři různé kolineární body. V případě, že $X \neq B$ je takový bod, že přímka BX není rovnoběžná z ρ (viz Obr. 2.6.2 a)), je přímka $Xf(X)$ obrazem přímky $Bf(B)$ ve stejnolehlosti se středem v bodě Y, který je průsečíkem přímky BX a nadroviny ρ. V této stejnolehlosti se zobrazí bod B na X, $f(B)$ na $f(X)$ a B_0 na X_0. Protože stejnolehlost je afinita, je $(X_0; X, f(X)) = (B_0; B, f(B))$. Je-li přímka BX rovnoběžná s ρ, dostaneme $BX \| f(B)f(X) \| B_0X_0$ a podle Věty 8.4 skript [HoJa] je libovolná přímka protíná v trojici bodů, jejichž dělící poměr je konstantní. Aplikujeme-li tuto větu na přímky $Bf(B)$ a $Xf(X)$, dostaneme opět rovnost dělících poměrů $(X_0; X, f(X)) = (B_0; B, f(B))$. □

Definice 2.6.4. Nechť je f základní afinita, která není elací a je určena nadrovinou samodružných bodů ρ a obrazem bodu $B \notin \rho$. Číslo $(B_0; B, f(B))$ se nazýva *chakteristika* základní afinity.

Směr určený nenulovým vektorem $\overrightarrow{Bf(B)}$ se nazývá *směrem základní afinity afinity.*

Elace potom nazýváme *základní afinity bez charakteristiky.*

Poznámka 2.6.2. Základní afinita, která není elací, je určena směrem a charakteristikou. ♢

Poznámka 2.6.3. Z vlastností dělícího poměru tří bodů vyplývá, že pro základní afinitu se zápornou charakteristikou jsou body X a $f(X)$, $X \notin \rho$, oddělovány nadrovinou ρ, tj. leží v různých poloprostorech určených nadrovinou ρ. Pro základní afinity s kladnou charakteristikou leží body X a $f(X)$ ve stejném poloprostoru. ♢

Definice 2.6.5. Zobrazení f prostoru na sebe, které není identitou a složeno samo se sebou dává identitu, se nazývá *involutorní zobrazení* nebo *involuce.*

Dvojice bodů, které si v involuci vymění místo, se nazývá *involutorní dvojice bodů.*

Poznámka 2.6.4. Příkladem afinity, která je involutorní je středová symetrie. ♢

Věta 2.6.5. *Základní afinita je involutorní zobrazení právě tehdy, když její charakteristika je rovna mínus jedné.*

Důkaz. Elace nemůže být involutorní, protože v nadrovinách rovnoběžných s nadrovinou samodružných bodů se jedná o posunutí (viz Poznámka 2.6.1). Předpokládejme, že involuce f je základní afinita s charakteristikou k a X, X' je involutorní dvojice f. Potom $k = (X_0; X, X')$ a $k = (X_0; X', X)$. Z vlastností dělícího poměru (viz [HoJa]) je $k = 1/k$, a tedy $k = -1$ (připomeňme, že dělící poměr tří bodů je číslo různé od 0 a 1). □

Poznámka 2.6.5. Pro libovolnou involutorní dvojici bodů X, X' involutorní základní afinity f s nadrovinou samodružných bodů ρ platí, že X_0 je středem úsečky XX' (viz Obr. 2.6.4). Takovéto základní afinity se proto nazývají *symetrie prostoru* $\mathcal{A}_n$ *podle nadroviny* ρ ve směru základní afinity. Pokud je prostor, ve kterém je symetrie definována, euklidovský, používá se název *šikmá nebo kosá symetrie* podle nadroviny. ♢

Obr. 2.6.4

Věta 2.6.6. *Ke každému afinnímu zobrazení f afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe existuje nejvýše $(n+1)$ základních afinních zobrazení takových, že f je jejich složením. Mezi těmito základními afinními zobrazeními je nejvýše $(h(f)+1)$ základních afinit a právě $(n - h(f))$ rovnoběžných projekcí do nadrovin.*

Důkaz. Nechť $h(f) \leq n$ je hodnost afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$. Zvolme v $\mathcal{A}_n$ $(n+1)$ bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ v obecné poloze tak, že prvních $(h(f)+1)$ bodů $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_{h(f)})$ je v obecné poloze.

Pokud $P_0 \neq f(P_0)$, zvolme libovolnou nadrovinu ρ_1 takovou, že $P_0 \notin \rho_1$, $f(P_0) \notin \rho_1$. Pak existuje podle Věty 2.6.3 jediná základní afinita f_1, která má ρ_1 za nadrovinu samodružných bodů a zobrazuje P_0 na $f(P_0)$. Označme $f_1(P_i) = P_{1i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokud $P_0 = f(P_0)$ tento krok vynecháme (jako f_1 bereme identitu).

Pokud $P_{11} \neq f(P_1)$, zvolme libovolnou nadrovinu ρ_2 takovou, že $f(P_0) \in \rho_2$, $P_{11} \notin \rho_2$, $f(P_1) \notin \rho_2$. Pak existuje podle Věty 2.6.3 jediná základní afinita f_2, která má ρ_2 za nadrovinu samodružných bodů a zobrazuje P_{11} na $f(P_1)$. Označme $f_2(P_i) = P_{2i}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Pokud $P_{11} = f(P_1)$ tento krok vynecháme (jako f_2 bereme identitu).

Dále pokračujeme analogicky až do $(h(f)+1)$-ního kroku, tj. pro pokud jsou body $P_{h(f),h(f)}$, $f(P_{h(f)})$ různé, zvolíme libovolnou nadrovinu $\rho_{h(f)+1}$ takovou, že $f(P_j) \in \rho_{h(f)+1}$, $j = 0, 1, \ldots, h(f) - 1$, $P_{h(f),h(f)} \notin \rho_{h(f)+1}$, $f(P_{h(f)} \notin \rho_{h(f)+1}$. Pak existuje podle Věty 2.6.3 jediná základní afinita $f_{h(f)+1}$, která má $\rho_{h(f)+1}$ za nadrovinu samodružných bodů a zobrazuje

$P_{h(f),h(f)}$ na $f(P_{h(f)})$. Označme $f_{h(f)+1}(P_i) = P_{h(f)+1,i}$, $i = h(f)+1,\dots,n$. Pokud $P_{h(f),h(f)} = f(P_{h(f)})$ tento krok vynecháme (jako $f_{h(f)+1}$ bereme identitu).

Tímto způsobem jsme dostali nejvýše $(h(f)+1)$ základních afinit, jejichž složením je afinita, která zobrazuje body $P_0, P_1, \dots, P_{h(f)}$ postupně na body $f(P_0)$, $f(P_1)$, $\dots$, $f(P_{h(f)})$ a zbývající body $P_{h(f)+1}, \dots, P_n$ zobrazí postupně na body $P_{h(f)+1,h(f)+1}$, $\dots$, $P_{h(f)+1,n}$. Pro další úvahu je podstatné, že body $f(P_0), f(P_1)$, $\dots$, $f(P_{h(f)})$, $P_{h(f)+1,h(f)+1}$, $\dots$, $P_{h(f)+1,n}$ jsou v obecné poloze, tj. žádný z bodů $P_{h(f)+1,h(f)+1}$, $\dots$, $P_{h(f)+1,n}$ neleží v $h(f)$-dimenzionálním podprostoru určeném body $f(P_0)$, $f(P_1)$, $\dots$, $f(P_{h(f)})$. Naopak, v tomto podprostoru leží všechny body $f(P_{h(f)+1})$, $\dots$, $f(P_n)$ (to vyplývá z hodnosti zobrazení).

Uvažujme nyní libovolnou nadrovinu $\rho_{h(f)+2}$, která obsahuje body $f(P_0)$, $\dots$, $f(P_{h(f)})$ a neobsahuje bod $P_{h(f)+1,h(f)+1}$. Protože $f(P_{h(f)+1}) \in \rho_{h(f)+2}$, existuje podle Věty 2.6.3 jediná projekce $f_{h(f)+2}$ prostoru $\mathcal{A}_n$ do nadroviny $\rho_{h(f)+2}$ taková, že $f_{h(f)+2}(P_{h(f)+1,h(f)+1}) = f(P_{h(f)+1})$. Označme $f_{h(f)+2}(P_i) = P_{h(f)+2,i}$, $i = h(f)+2,\dots,n$. Přitom body $P_{h(f)+2,i}$, $i = h(f)+2,\dots,n$ nemohou ležet v podprostoru určeném body $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_{h(f)})$ (to by bylo ve sporu s tím, že projekce do nadroviny má hodnost $n-1$).

Dále uvažujme nadrovinu $\rho_{h(f)+3}$, která neobsahuje bod $P_{h(f)+2,h(f)+2}$. Protože $f(P_{h(f)+2}) \in \rho_{h(f)+3}$, existuje podle Věty 2.6.3 jediná projekce $f_{h(f)+3}$ prostoru $\mathcal{A}_n$ do nadroviny $\rho_{h(f)+3}$ taková, že $f_{h(f)+3}(P_{h(f)+2,h(f)+2}) = f(P_{h(f)+2})$. Označme $f_{h(f)+3}(P_i) = P_{h(f)+3,i}$, $i = h(f)+3,\dots,n$. Přitom opět ze stejných důvodů jako v předchozím kroku nemohou body $P_{h(f)+3,i}$, $i = h(f)+3,\dots,n$ ležet v podprostoru určeném body $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_{h(f)})$.

Postupně tak dostaneme právě $(n-h(f))$ projekcí do nadrovin, které spolu s předtím sestrojenými základními afinitami vyhovují tvrzení naší věty. □

Důsledek 2.6.1. Nechť f je afinita na $\mathcal{A}_n$, pak existuje nejvýše $(n+1)$ základních afinit takových, že f je jejich složením.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem předchozí Věty 2.6.6. □

Poznámka 2.6.6. Postup popsaný ve Větě 2.6.6 je dobré zachytit do přehledné tabulky, kde jako P_i' značíme $f(P_i)$.

$$\begin{array}{lllllllllll}
 & \overset{f_1}{} & & \overset{f_2}{} & & \overset{f_3}{} & & \overset{f_n}{} & & \overset{f_{n+1}}{} & \\
P_0 & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0'; \\
P_1 & \longrightarrow & P_{11} & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & P_1'; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-1,1} & \longrightarrow & P_{n-1,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n-1}' & \longrightarrow & P_{n-1}'; \\
P_n & \longrightarrow & P_{n,1} & \longrightarrow & P_{n,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n,n} & \longrightarrow & P_n.
\end{array}$$

Všimněme si, že rozklad afinních zobrazení na základní afinní zobrazení není jednoznačný. V podstatní míře závisí na zvolených bodech, a také v jednotlivých krocích je možno volit různé nadroviny základních afinit. Dokonce i počet základních afinit v rozkladu není jednoznačný. Pro praktický výpočet je dobré si uvědomit, že například volbou samodružných bodů zobrazení mezi vybrané body, si můžeme ušetřit tolik kroků v rozkladu, kolik samodružných bodů v obecné poloze můžeme zvolit. ♢

Uvažujme nyní na $\mathcal{A}_n$ afinní repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ a vyjádřeme rovnice základních afinních zobrazení vzhledem k tomuto repéru.

Věta 2.6.7. *Nechť je dána nadrovina $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ a nenulový vektor $\mathbf{s} = (s_1; \dots; s_n)$, $\mathbf{s} \notin Z(\rho)$. Pak rovnoběžná projekce prostoru $\mathcal{A}_n$ na nadrovinu ρ ve směru určeném vektorem* $\mathbf{s}$ *má souřadnicové vyjádření*

$$x_i' = x_i - \frac{s_i}{\sum_{j=1}^n a_j s_j}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a), \quad i = 1, \dots, n\,. \tag{2.6.1}$$

Důkaz. Rovnoběžná projekce $r(\mathbf{s}, \rho)$ zobrazí bod $X = [x_1; \dots; x_n]$ na bod $f(X) = [x_1'; \dots; x_n']$ takový, že $f(X) \in \rho$ a $\overrightarrow{Xf(X)} = \lambda\mathbf{s}$. Je tedy

$$x_i' - x_i = \lambda s_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.6.2}$$

a

$$a_1x_1' + \cdots + a_nx_n' + a = 0\,. \tag{2.6.3}$$

Dosazením (2.6.2) do (2.6.3) dostaneme

$$-(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = \lambda(a_1s_1 + \cdots + a_ns_n)\,.$$

Protože $\mathbf{s} \notin Z(\rho)$, je $\sum_{j=1}^n a_j s_j \neq 0$ a máme

$$\lambda = -\frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a}{\sum_{j=1}^n a_j s_j} \tag{2.6.4}$$

odkud, dosazením do (2.6.2), dostaneme (2.6.1). □

Věta 2.6.8. *Nechť je dána nadrovina* $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ *a body* $B = [b_1; \ldots; b_n]$, $B' = [b'_1; \ldots; b'_n]$ *takové, že* $B \notin Z(\rho)$. *Pak základní afinní zobrazení pro které je* ρ *silně samodružná a zobrazuje bod* B *na bod* B', *má souřadnicové vyjádření*

$$x'_i = x_i + \lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a), \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{2.6.5}$$

kde

$$\lambda_i = \frac{b'_i - b_i}{\sum_{j=1}^n a_jb_j + a}\,. \tag{2.6.6}$$

Důkaz. Předpokládejme, že pro zobrazení f se souřadnicovými rovnicemi

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{2.6.7}$$

je nadrovina ρ silně samodružná. Potom musí existovat čísla λ_i, $i = 1 \ldots, n$, taková, že

$$a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii} - 1)x_i + \cdots + a_{in}x_n + b_i = \lambda_i(\sum_{j=1}^n a_jx_j + a)\,. \tag{2.6.8}$$

Pomocí (2.6.7) upravíme (2.6.8) na

$$x'_i - x_i = \lambda_i(\sum_{j=1}^n a_jx_j + a)\,.$$

Protože $B \notin Z(\rho)$, je $(\sum_{j=1}^n a_jb_j + a) \neq 0$ a dosazením souřadnic bodů B za x_i a bodu B' za x'_i máme

$$\lambda_i = \frac{b'_i - b_i}{\sum_{j=1}^n a_jb_j + a}\,,$$

což dokazuje tvrzení věty. □

Předchozí úvahy shrňme do následující věty.

Věta 2.6.9. *Nechť je dána nadrovina* $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$. *Pak základní afinní zobrazení, pro které je* ρ *silně samodružná, má souřadnicové vyjádření*

$$x'_i = x_i + \lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a), \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.6.9}$$

Přitom:

1. *Je-li* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, *jedná se i identitu na* $\mathcal{A}_n$.

2. *Je-li* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -1$, *jedná se o rovnoběžnou projekci* $\mathcal{A}_n$ *do nadroviny* ρ *ve směru vektoru* $\mathbf{s} = (\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$.

3. *Je-li alespoň jeden koeficient* λ_i *nenulový a* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \neq -1$, *jedná se o základní afinitu, která je*

   (a) *elací pro* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = 0$,

   (b) *základní afinitou s charakteristikou*

   $$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + 1}$$

   pro $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \neq 0$. *Navíc, pro* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -2$ *se jedná o symetrii* $\mathcal{A}_n$ *podle nadroviny* ρ *ve směru určeném vektorem* $\mathbf{s} = (\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$.

Důkaz. Podle Věty 2.6.9 má základní afinní zobrazení f, pro které je ρ silně samodružná, souřadnicové vyjádření (2.6.9).

1. f je identitou právě tehdy, když $x_i' = x_i$, tj. právě tehdy, když $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, v rovnicích (2.6.9).

2. Je-li f rovnoběžnou projekcí $\mathcal{A}_n$ do nadroviny ρ ve směru $L(\mathbf{s})$, má podle Věty 2.6.7 f souřadnicové vyjádření (2.6.9), kde

$$\lambda_i = -\frac{s_i}{\sum_{j=1}^n a_j s_j}\,, \quad i = 1\ldots, n\,.$$

Odtud dostaneme okamžitě $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -1$.

Naopak, je-li $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -1$ ve vyjádření (2.6.6), dostaneme

$$\begin{aligned} a_1x_1' + \cdots + a_nx_n' + a &= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)(1 + \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

tj. $f(X) \in \rho$ pro každé $X \in \mathcal{A}_n$. Podle Věty 2.6.3 se jedná o rovnoběžnou projekci $\mathcal{A}_n$ do ρ. Porovnání (2.6.1) a (2.6.9) dostaneme, že směr projekce je určen právě vektorem $\mathbf{s} = (\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$.

3. Podle Věty 2.6.3 základní afinní zobrazení, které vyhovuje podmínkám naší věty a není ani identita, ani projekce do nadroviny, je základní afinita. Je-li tedy alespoň jeden koeficien λ_i nenulový a $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \neq -1$,

je zobrazení (2.6.9) základní afinita. Potom z Věty 2.6.8 pro nějaký bod $B = [b_1; \dots ; b_n] \notin \rho$ platí

$$\lambda_i = \frac{b'_i - b_i}{\sum_{i=1}^n a_i b_i + a}.$$

a) Zobrazení je elací právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{Bf(B)} = (b'_1 - b_1; \dots ; b'_n - b_n)$ leží v zaměření nadroviny ρ, tj. právě tehdy, když $\sum_{i=1}^n a_i(b'_i - b_i) = 0$, což je ekvivalentní $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = 0$.

b) Není-li f elací, je $\overrightarrow{Bf(B)} \notin Z(\rho)$ a musí existovat bod B_0, který je průnikem ρ a přímky $Bf(B)$. Máme tedy $B_0 = B + t\overrightarrow{Bf(B)}$ a z podmínky $B_0 \in \rho$ je $t = -\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i}$. Potom

$$\overrightarrow{BB_0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + 1}\overrightarrow{f(B)B_0}\,,$$

což znamená, že charakteristika f je

$$k = (B_0; B, f(B)) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + 1}.$$

Podle Věty 2.6.5 je f involutorní právě tehdy, je-li $k = -1$, tj. právě tehdy, je-li $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -2$. □

Úloha 2.6.1. Určete rovnici rovnoběžné projekce afinního prostoru $\mathcal{A}_3$ do roviny $\rho \equiv 2x + y - z + 2 = 0$ ve směru určeném vektorem $\mathbf{s} = (0; 1; 0)$.

Řešení: I. metoda: Využijeme souřadnicového vyjádření z Věty 2.6.7. Pak dostaneme přímo rovnice projekce ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -2x + z - 2\ . \\ z' &= z \end{aligned}$$

II. metoda: V rovině ρ vybereme tři body v obecné poloze, například $A = [1; 0; 4], B = [0; 1, ;], C = [0; 0; 2]$. Určíme projekci počátku afinního repéru do roviny ρ, tj. průnik ρ a přímky $X = P + t\mathbf{s}$. Dostaneme $f(P) = [0; -2; 0]$. Potom některou z metod popsaných v Úloze 2.2.1 nebo 2.2.2 určíme rovnice projekce. △

Úloha 2.6.2. Určete rovnice základní afinity f v $\mathcal{A}_3$, pro kterou je rovina $\rho \equiv x + y - z = 0$ rovinou samodružných bodů a bod $B = [1; 0; 2]$ se zobrazuje na $B' = [2; 0; 1]$. Je afinita f elací ?

Řešení: Vektor $\overrightarrow{BB'} = (1; 0; -1)$ nepatří do zaměření roviny ρ, a tedy afinita f není elace.

Rovnice afinity: I. metoda: Podle Věty 2.6.8 má základní afinita rovnice

$$x' = x + \lambda_1(x + y - z)$$
$$y' = y + \lambda_2(x + y - z)$$
$$z' = z + \lambda_3(x + y - z)$$

Dosazením souřadnic bodů B a B' určíme $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$, a tedy dostaneme rovnice základní afinity ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \quad -y \ +z\,; \\ y' &= \quad y\,; \\ z' &= x \ +y\,. \end{aligned}$$

II. metoda: Zvolíme v ρ tři body v obecné poloze, např. $A = [0; 0; 0]$, $C = [1; 0; 1]$, $D = [0; 1; 1]$. Jsou to body samodružné, tedy $f(A) = A$, $f(C) = C$, $f(D) = D$. Čtvrtým bodem pro určení afinity je bod B. Potom některou z metod popsaných v Úloze 2.2.1 nebo 2.2.2 určíme rovnice základní afinity. △

Úloha 2.6.3. V afinní rovině $\mathcal{A}_2$ s repérem $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ je dána afinita f rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 1; \\ y' &= x + y + 3. \end{aligned}$$

Rozložte f na osové afinity.

Řešení: Zvolme v $\mathcal{A}_2$ tři body v obecné poloze, a to např. $A = [0; 0]$, $B = [1; 0]$, $C = [0; 1]$; jejich obrazy v afinitě f jsou body $A' = [1; 3]$, $B' = [3; 4]$, $C' = [0; 4]$. Při hledání základních afinit budeme postupovat obdobně jako v důkazu Věty 2.6.6. Při praktickém hledání osových afinit můžeme postupovat dvojím způsobem.

1. způsob: Jednotlivé osové afinity volíme tak, aby jejich osy měly jednoduché rovnice. Osovou afinitu f_1 zvolíme tak, aby bod A zobrazila do bodu A'. Osu o_1 můžeme volit libovolně, jen nesmí procházet body A a A'. Zvolme tedy za osu přímku o rovnici $o_1 \equiv y = 1$. Užitím Věty 2.6.8 snadno určíme rovnice f_1 ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x - y + 1\,; \\ y' &= -2y + 3\,. \end{aligned}$$

Obrazy bodů B a C v afinitě f_1 jsou $B_1 = [2; 3], C_1 = C = [0; 1]$.

Osovou afinitu f_2 budeme volit tak, aby $f_2(A') = A'$ a $f_2(B_1) = B'$. Tedy osa o_2 musí procházet bodem A' a nesmí procházet body B_1 a B'. Zvolme za o_2 přímku o rovnici $o_2 \equiv x = 1$. Opět užitím Věty 2.6.8 snadno určíme rovnice f_2 ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 1\,; \\ y' &= x + y - 1\,. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočteme $f_2(C) = C_2 = [-1, 0]$.

Pro afinitu f_3 musí platit $f_3(A') = A', f_3(B') = B', f_3(C_2) = C'$. Přímka $A'B'$ je přímkou samodružných bodů f_3, tedy osou o_3, jejíž rovnice je $o_3 \equiv x - 2y + 5 = 0$. Rovnice f_3 jsou potom:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}\,; \\ y' &= x - y + 5\,. \end{aligned}$$

Výsledný rozklad můžeme shrnout do tabulky

$$\begin{array}{ccccccc} & f_1 & & f_2 & & f_3 & \\ [0;0] & \longrightarrow & [1;3] & \longrightarrow & [1;3] & \longrightarrow & [1;3]; \\ [1;0] & \longrightarrow & [2;3] & \longrightarrow & [3;4] & \longrightarrow & [3;4]; \\ [0;1] & \longrightarrow & [0;1] & \longrightarrow & [-1;0] & \longrightarrow & [0;4], \end{array}$$

odkud je vidět, že složením $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ dostaneme původní afinitu f.

2. způsob: Osy jednotlivých základních afinit volíme tak, abychom nemuseli určovat obrazy B_1, C_1, C_2 bodů B a C. Osa $o_1 = BC \equiv x + y - 1 = 0$. Potom určíme rovnice f_1 zobrazující A na A' ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \quad -y + 1\,; \\ y' &= -x \qquad\;\; + 1\,. \end{aligned}$$

Základní afinitu f_2 volíme s osou $o_2 = A'C \equiv 2x - y + 1 = 0$ tak, aby zobrazila B na B'. Dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\,; \\ y' &= \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}\,. \end{aligned}$$

Konečně afinitu f_3 volíme s osou $o_3 = A'B' \equiv x - 2y + 5 = 0$ tak, aby zobrazila C na C'. Dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= x\,; \\ y' &= \qquad -\frac{1}{2}y + \frac{9}{2}\,. \end{aligned}$$

Výsledný rozklad můžeme opět shrnout do tabulky

$$\begin{array}{ccccccc} & f_1 & & f_2 & & f_3 & \\ [0;0] & \longrightarrow & [1;3] & \longrightarrow & [1;3] & \longrightarrow & [1;3]\,; \\ [1;0] & \longrightarrow & [1;0] & \longrightarrow & [3;4] & \longrightarrow & [3;4]\,; \\ [0;1] & \longrightarrow & [0;1] & \longrightarrow & [0;1] & \longrightarrow & [0;4]\,. \end{array} \qquad \triangle$$

2.7 Klasifikace afinit v rovině

Na závěr této kapitoly budeme klasifikovat (třídit) všechny afinity v rovině podle počtu samodružných bodů a vlastních směrů. Připomeňme, že je-li afinní zobrazení zadáno v souřadnicích maticemi A a B jsou samodružné body řešením nehomogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)\,x + a_{12}\,y + b_1 &= 0\,, \\ a_{21}\,x + (a_{22}-1)\,y + b_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

t.j. zobrazení buďto nemá žádný samodružný bod, nebo má právě jeden samodružný bod, přímku samodružných bodů a konečně může být každý bod roviny samodružný. V případě, že má zobrazení alespoň jeden samodružný bod, můžeme ho zvolit jako počátek afinního repéru a $(b_1; b_2) = (0; 0)$. V tabulce všech afinit v rovině tedy máme čtyři řádky podle počtu samodružných bodů.

Dále je charakteristická rovnice afinity v rovině kvadratická rovnice. Nemá-li charakteristická rovnice reálný kořen, nemá afinita žádný vlastní směr. Má-li charakteristické rovnice dva reálné různé kořeny, má afinita podle Věty 2.4.5 dva lineárně neyávislé vlastní směry. Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen, mohou nastat dva případy - prostor vlastních vektorů má dimenzi jedna nebo dva (každý směr je vlastní). Máme tedy v tabulce 4 sloupce s možnými počty vlastních směrů.

Připomeňme ještě Větu 2.4.4, která říká, že není-li kořenem charakteristické rovnice 1, má zobrazení právě jeden samodružný bod. Negací tohoto výroku tak dostaneme, že pokud je 1 vlastní hodnotou zobrazení, nemá buďto zobrazení žádný samodružný bod nebo má nejméně přímku samodružných bodů.

Nyní si může zachytit jednotlivé možnosti. Je zřejmé, že jsou-li všechny body samodružné, musí se jednat o identitu, která má i všechny směry vlastní a v posledním řádku tabulky je jediná možnost.

Jestliže nemá charakteristická rovnice žádný reálný kořen, má podle Věty 2.4.4 právě jeden samodružný bod a matice zobrazení je dána reálnou a imaginární složkou komplexního kořene, viz Část 1.3. Je tady v 1. sloupci tabulky jediná možnost.

Pokud má charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny, dělíme situaci ještě na případ, kdy je jeden z nich roven jedné nebo jsou oba různé od jedné. Ve druhém případě máme právě jeden samodružný bod a rovnice zobrazení ve 2. řádku 3. sloupci je dána Větou 2.4.6. V prvním případě máme buďto přímku samodružných bodů (osová afinita - jeden vlastní směr je směr osy odpovídající jedničce jako vlastní hodnotě a druhý vlastní směr je směr osové afinity) nebo není žádný bod samodružný (osová afinita složená s posunutím ve směru osy). V obou případech dostáváme rovnice zobrazení z Věty 2.4.6.

Konečně nechť má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen. Je-li navíc tento kořen různý od jedné, má afinita právě jeden samodružný bod a doplňujeme tabulku ve druhém řádku. Vlastní směry potom tvoří buďto podprostor dimenze jedna (druhý sloupec) nebo dva (poslední sloupec). V prvním případě má matice zobrazení horní trojúhelníkový tvar s vlastní hodnotou na diagonále a s nenulovým koeficientem nad diagonálou (viz Část 1.3), ve druhém případě je matice diagonální s vlastní hodnotou na diagonále a jedná se o stejnolehlost.

Konečně poslední možnost je, že jednička je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice. Opět, pokud má prostor vlastních vektorů dimenzi jedna, může mít zobrazení přímku samodružných bodů (jedná se o elaci, směr osy je jediný vlastní směr) nebo nemá žádný samodružný směr (elace složená s posunutím o nenulový vektor ve směru osy). Matice zobrazení je opět horní trojúhelníková matice s jedničkou na diagonále a nenulovým koeficientem nad diagonálou. Pokud má prostor vlastních vektorů dimenzi dva, může nastat pouze situace, kdy zobrazení nemá žádný samodružný bod a jedná se o posunutí.

Výsledná tabulka tedy vypadá takto:

	Žadný vlastní směr	Jeden vlastní směr	Dva nezávislé směry	Každý směr vlastní
Žádný samodružný bod	—	$x' = x + a\,y$ $y' = \quad y + b$ $a \neq 0,\, b \neq 0$ Posunutá elace	$x' = x \quad + b$ $y' = \quad \lambda_2\,y$ $0 \neq \lambda_2$ $b \neq 0$ Posunutá o. a.	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y + b_2$ $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$ Posunutí
Jeden samodružný bod	$x' = \alpha\,x + \beta\,y$ $y' = -\beta\,x + \alpha\,y$ $\beta \neq 0$	$x' = \lambda_1\,x + b\,y$ $y' = \quad \lambda_1\,y$ $0 \neq \lambda_1 \neq 0$ $b \neq 0$	$x' = \lambda_1\,x$ $y' = \quad \lambda_2\,y$ $0 \neq \lambda_1 \neq 0$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$x' = \lambda_1\,x$ $y' = \quad \lambda_1\,y$ $0 \neq \lambda_1 \neq 1$ Stejnolehlost
Přímka samodružných bodů	—	$x' = x + ay$ $y' = \quad y$ $a \neq 0$ Elace	$x' = x$ $y' = \quad \lambda_2\,y$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ Osová afinita	—
Všechny body samodružné	—	—	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ Identita