Základy Vyšší Matematiky
Cvičení

Petr Hasil
hasil@mendelu.cz

Poznámka 1. Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu ⟨http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz⟩ (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Poznámka 2. Příklady označené "‡" jsou těžší (stále ale řešitelné postupy používanými u ostatních příkladů) a jsou určeny jen pro zájemce.

1 Příklady

Příklad 1. *Řešte rovnice/nerovnice*

a) $x^2 - x - 6 = 0$,

b) $x^2 - 4x + 29 = 0$,

c) $x^2 + 8x + 15 > 0$,

d) $\sqrt{x+1} > x - 1$,

e) $\frac{x+2}{x-3} \leq 0$,

f) $\frac{4}{x+1} > 2$,

g) $\frac{x^2-2x}{x+3} \leq 1 - \frac{5}{x+3}$.

Příklad 2. *Najděte průsečíky funkce* $f(x) = \frac{x-4}{x}$ *se souřadnými osami.*

Příklad 3. *Řešte rovnice*

a) $\mathrm{e}^{x-6} - 12 = 0$,

b) $2\ln(3x-7) + 8 = 0$,

c) $7^{2-x} + 5 = 8$,

d) $\ln(2x+3) - 5 = 12$.

Příklad 4. *Určete derivaci následujících funkcí.*

a) $f(x) = 0$,

b) $f(x) = -52$,

c) $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 3$,

d) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}$,

e) $f(x) = \frac{x+8}{3x^2-1}$,

f) $f(x) = 2\sin x + \operatorname{cotg} x$,

g) $f(x) = x \operatorname{tg} x$,

h) $f(x) = x^2 e^x \sin x$,

i) $f(x) = x^3 6^x$,

j) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$,

k) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$,

l) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$.

Příklad 5. *Určete derivaci funkce f v bodě x_0.*

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 8,\ x_0 = -1$,

b) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Příklad 6. *Určete funkční hodnotu a hodnotu první a druhé derivaci funkce f v bodě x_0.*

a) $f(x) = \sqrt{3x^4 + 1},\ x_0 = -1$,

b) $f(x) = x\sin(2x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Příklad 7. *Určete definiční obor funkce*

a) $f(x) = \sqrt{2x + 5}$,

b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}}$,

c) $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5) + \frac{2x^2}{\sqrt{2x+6}}$,

d) $f(x) = \arcsin \frac{x+3}{2} + \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}$.

Příklad 8. *Určete definiční obor dané funkce a zakreslete jej v rovině.*

a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{3y}$,

b) $f(x,y) = \ln(x + y)$,

c) $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$,

d) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Příklad 9. *Zakreslete a popište vrstevnice funkce*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$,

b) $f(x,y) = \frac{y}{x}$,

c) $f(x,y) = xy$.

Příklad 10. *Pomocí vrstevnic a řezů souřadnými rovinami zakreslete graf funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Příklad 11. *Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce*

a) $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$,

b) $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$,

c) $h(x) = \frac{x^2}{\ln x}$,

d) $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$,

e) $g(x) = \frac{(x+3)^2}{\mathrm{e}^x}$,

f) $h(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$,

g) $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$,

h) $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

i) $h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Příklad 12. *Určete takové nenulové reálné číslo x, že jeho rozdíl s převrácenou hodnotou druhé mocniny tohoto čísla je maximální.*

Příklad 13. *Máte za úkol vyprojektovat uprostřed pozemku tvaru čtverce o straně 1,5 km 8 sousedících parcel určených ke stavbě luxusních vil. Parcely musí být obdélníkové, ve dvou řadách po čtyřech a výměra každé z nich musí činit* 120 *arů (tj. celkem* 960 *arů). Kolem každé parcely musíte nechat postavit cesty. Přitom dlouhá spojovací cesta mezi řadami po čtyřech bude na obě strany vyvedena mimo pozemek a napojena na silniční síť oblasti. Tyto napojovací cesty budou financovány plně z fondu EU, takže jejich cenu není potřeba uvažovat. Jaké rozměry parcel zvolíte, aby se za stavbu cest co nejvíce ušetřilo?*

Příklad 14. *Síla nosníku o obdélníkovém průřezu je přímo úměrná součinu jeho šířky a kvadrátu jeho výšky (měřeno na průřezu). Určete rozměry nejsilnějšího nosníku, jaký lze vyrobit z polena o kruhovém průřezu s poloměrem* r.

Příklad 15. *Chceme studovat kachnu divokou během hnízdění. K tomu potřebujeme postavit obdélníkovou ohradu, která bude kachny chránit před predátory. K dispozici máme* 120 *m pletiva, kterým chceme oplotit co možná největší plochu tak, aby byl plot dvojitý s metrovým prostorem mezi, přičemž jedna strana ohrady bude u jezera – u té stačí jeden plot.*

Příklad 16. *Je dán čtverec papíru. Z každého rohu odstřihněte menší čtvereček tak, aby krabička poskládaná ze zbytku měla maximální objem.*

Příklad 17. *Letadlo dálniční hlídky letí* 3 *míle vysoko nad vozovkou rychlostí* 120 *mi/h. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu letadla a zjistí, že auto se při vzdálenosti* 5 *mil od letadla přibližuje rychlostí* 160 *mi/h. Určete rychlost auta.*

Příklad 18. *O dům je opřený žebřík dlouhý* 13 *metrů. Náhle začne základna žebříku podkluzovat. Ve chvíli, kdy je základna žebříku* 12 *m od domu, klouže rychlostí* 5 *m/s. Zjistěte:*

a) *Jakou rychlostí klesá vršek žebříku po zdi domu.*

b) *Jakou rychlostí se mění obsah trojúhelníku daného žebříkem, domem a zemí.*

c) *Jakou rychlostí se mění úhel, který svírá žebřík se zemí.*

Příklad 19. *Určete rovnici tečny a normály funkce* f *v bodě* x_0.

a) $f(x) = x^2 + \ln x, \quad x_0 = 1,$

b) $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}, \quad x_0 = -2,$

c) $f(x) = 2x + \sin x, \quad x_0 = \pi,$

d) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}, \quad x_0 = 9.$

Příklad 20. *Pomocí lineární aproximace určete přibližně:*

a) 2.03^5,

b) $\cos 59°$.

Příklad 21. *Pomocí Newton–Raphsonovy metody odhadněte* $\sqrt[3]{64}$ *– určete iterační schéma a proveďte 5 iterací s počátečním odhadem:*

a) $x_0 = 10$,

b) $x_0 = 64$.

Příklad 22. *Napište Taylorův polynom čtvrtého řádu se středem v* $x_0 = -1$ *pro funkci* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Příklad 23. *Napište Maclaurinův polynom třetího řádu pro funkci* $f(x) = \cos 3x - 3\sin x$.

Příklad ‡ 24. *Napište Maclaurinův polynom třetího řádu pro funkci* $f(x) = e^{\cos x}$.

Příklad 25. *Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce* *a)* $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y^2 + 7xy^3 - 15$,

b) $f(x,y) = 5xy\sin(7x-2y)$,

c) $f(x,y) = \frac{y}{x}$,

d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{y}+2xy}{\sqrt{x}}$.

Příklad 26. *Určete parciální derivace prvního řádu funkce*

a) $f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$,

b) $f(x,y) = \ln(x^2\,\mathrm{e}^y - 3y)$.

Příklad 27. *Určete rovnici tečné roviny funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.*

a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - xy + x, \quad [x_0,y_0] = [1,0]$,

b) $f(x,y) = \ln(x+2y), \quad [x_0,y_0] = [2,1]$.

Příklad ‡ 28. *Pomocí lineární aproximace určete přibližně:*

a) $\sqrt{0.98^2 + 2.05^3}$,

b) $\mathrm{e}^{0.04^3 - 0.01}$.

Příklad 29. *Integrujte.*

(a) $\int 8x^3 - 2x^2 + x - 1\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int (x+3)(2x-7)\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{2x^6 - 3x^3 + 6x - 2}{4x^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{-2}{\sqrt{5-5x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\int \frac{14^x - 5\cdot 7^x}{4\cdot 7^x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 30. *Integrujte per partes.*

(a) $\int (2x+3)\sin x\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int (x^2+3x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{x\ln x}{2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int 5\ln x\,\mathrm{d}x$,

Příklad 31. *Integrujte substitucí.*

(a) $\int \frac{7}{3x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \frac{2}{5-9x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \sqrt{3-4x}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \sqrt[5]{2x-3}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{\sqrt{x}}{2x+3}\,\mathrm{d}x, \quad$ [*subst.* $x = t^2$]

(f) $\int (12x+3)^{-4}\,\mathrm{d}x$,

(g) $\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}\,\mathrm{d}x$,

(h) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{\sqrt[20]{x} - 2\sqrt[30]{x}}{2\sqrt[15]{x} - \sqrt[12]{x}}\,\mathrm{d}x, \quad$ [*subst.* $t = x^{60}$],

(j) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{4-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 32. *Integrujte.*

(a) $\int_{-3}^{5} 3x^2 - 5x + 7\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^{\pi} x + \sin x\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_0^1 \frac{3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int_1^{\mathrm{e}^8} \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\int_0^2 \frac{5x^2}{\sqrt{2x^3+9}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 33. *Pomocí lichoběžníkového pravidla aproximujte* $\int_{-2}^{3} x^2 - 2x + 3$. *Interval* $[-2,3]$ *rozdělte na pět subintervalů.*

Příklad 34. *V rovině je dána množina ohraničená křivkami*

$$x = 1, \quad y = 2x, \quad y = 3x.$$

(a) Znázorněte tuto množinu na obrázku.

(b) Napište obě možnosti pořadí integrace funkce $f(x, y)$ přes tuto množinu.

(c) Pomocí dvojnásobného integrálu určete plochu této množiny.

Příklad 35. *Převeďte dvojný integrál*

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

na integrál dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace), je-li množina A ohraničena

$$y = x, \quad y = x - 3, \quad y = 2, \quad y = 4.$$

Příklad 36. *Vypočtěte integrál*

$$\iint_A x + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \ \textit{kde } A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq x\}.$$

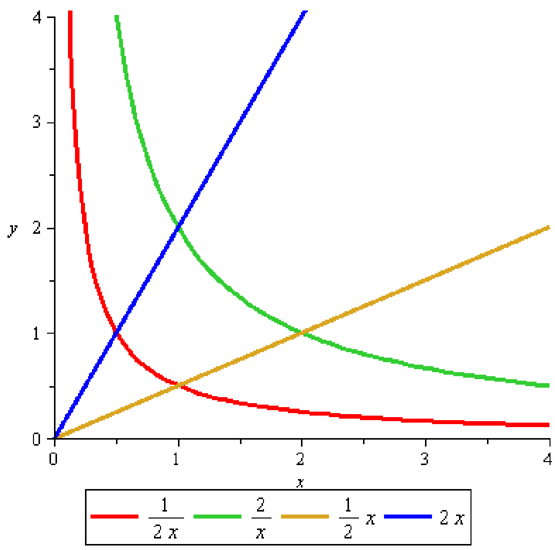
Příklad 37. *Zaměňte meze a vypočtěte integrál*

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Příklad ‡ 38. *Vypočtěte integrál*

$$\iint_A x^2 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina A je znázorněna na následujícím obrázku.



Příklad 39. *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint\limits_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x, \text{ kde } A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x, y \geq -x\}.$$

Příklad 40. *Vypočtěte plochu množiny*

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9, y \leq x, y \geq 0\}.$$

Příklad 41. *Je dána množina*

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3x\}.$$

Určete souřadnice jejího těžiště.

Příklad 42. *Určete kvadratický moment průřezu množiny*

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0, y \geq x\}$$

vzhledem k ose procházející kolmo počátkem.

Příklad 43. *Určete moment setrvačnosti množiny*

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3x\},$$

jejíž hustota je v každém bodě dána součtem jeho souřadnic, vzhledem

(a) *k ose* x, *(b)* *k ose* y.

Příklad 44. *Vyřešte diferenciální rovnici:*

(a) $y' - \sin x = 5$, *(b)* $y' = \frac{y \ln y}{x}$.

Příklad 45. *Vyřešte počáteční úlohu:*

$$x + y' = 2, \quad y(2) = 5.$$

2 Výsledky některých příkladů

Příklad 1:

(a) $-2, 3$,
(b) $2 \pm 5i$,
(c) $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$,
(d) $[-1, 3)$,
(e) $[-2, 3)$,
(f) $(-1, 1)$,
(g) $(-\infty, -3) \cup [1, 2]$.

Příklad 2: $P_x = [4, 0]$.

Příklad 3:

(a) $6 + \ln 12$,
(b) $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-4} + 7)$,
(c) $2 - \log_7 3$,
(d) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{17} - 3)$.

Příklad 4:

a) 0,
b) 0,
c) $-6x^2 + 2x - 4$,
d) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{5x^3} + \frac{18}{5\sqrt[5]{x^2}}$,
e) $-\frac{3x^2+48x+1}{(3x^2-1)^2}$,
f) $2\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$,
g) $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$,
h) $x\,\mathrm{e}^x(2\sin x + x\sin x + x\cos x)$,
i) $f(x) = x^2 6^x(3 + x\ln 6)$,
j) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,
k) $\frac{-1}{x\ln^2 x}$,
l) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$.

Příklad 5:

a) -4,
b) 2.

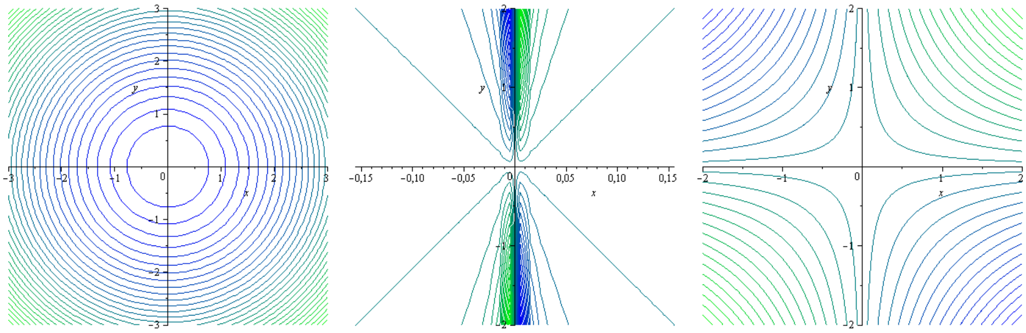
Příklad 6:

a) $2, -3, \frac{9}{2}$,
b) $\frac{\pi}{4}, 1, -4$.

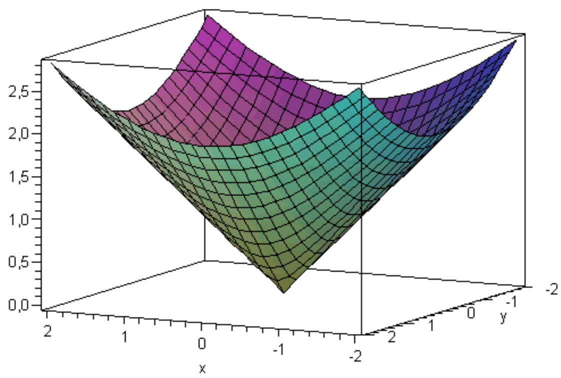
Příklad 7:

(a) $[-\frac{5}{2}, \infty)$,
(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(c) $(1, \infty)$,
(d) $[-5, -4]$.

Příklad 9:



Příklad 10:



Příklad 11:

(a) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty):\nearrow,\quad (-1,2):\searrow,$
lokální maximum v $x=-1$, lokální minimum v $x=2$,

(b) $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty):\searrow,\quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}):\nearrow,$
lokální maximum v $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, lokální minimum v $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

(c) $(0,\sqrt{\mathrm{e}}):\searrow,\quad (\sqrt{\mathrm{e}},\infty):\nearrow,$
lokální maximum v $x=\sqrt{\mathrm{e}}$,

(d) $(0,\mathrm{e}):\searrow,\quad (\mathrm{e},\infty):\nearrow,$
lokální minimum v $x=\mathrm{e}$,

(e) $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty):\searrow,\quad (-3,-1):\nearrow,$
lokální maximum v $x=-1$, lokální minimum v $x=-3$,

(f) $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty):\nearrow,\quad (-\sqrt{3},\sqrt{3})\setminus\{\pm1\}:\searrow,$
lokální maximum v $x=-\sqrt{3}$, lokální minimum v $x=\sqrt{3}$,

(g) $(-\infty,-2)\cup(0,\infty):\searrow,\quad (-2,-1)\cup(-1,0):\nearrow,$
lokální maximum v $x=0$, lokální minimum v $x=-2$,

(h) $(-\infty,-1)\cup(-1,0):\nearrow,\quad (0,1)\cup(1,\infty):\searrow,$
lokální maximum v $x=0$,

(i) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty):\nearrow,\quad (-1,0)\cup(0,1):\searrow,$
lokální maximum v $x=-1$, lokální minimum v $x=1$.

Příklad 12: $-\sqrt[3]{2}$.

Příklad 13: 100×120 metrů, přičemž větší rozměr je ze strany, ze které jsou vedle sebe dva pozemky.

Příklad 14: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r\times\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Příklad 15: Prostor pro kachny bude mít rozměry 14.25×19 metrů, přičemž u vody je delší strana.

Příklad 16: Odstřižený čtvereček bude mít stranu o délce 1/6 délky strany papíru.

Příklad 17: $-80mi/h$.

Příklad 18: $(a)-12m/s,\quad (b)-59.5m^2/s,\quad (c)-1rad/s.$

Příklad 19:

(a) $t: y=1+3(x-1),\quad n: y=1-\frac{1}{3}(x-1),$

(b) $t: y=3+11(x+2),\quad n: y=3-\frac{1}{11}(x+2),$

(c) $t: y=+x+\pi,\quad n: y=3\pi-x,$

(d) $t: y=-2-\frac{1}{12}(x-9),$
$n: y=-2+12(x-9).$

Příklad 20:

(a) 34.4,

(b) 0.5151.

Příklad 21: $x_{k+1}=\frac{1}{3}(2x_k+\frac{64}{x_k^2}),\quad (a)8.615329,\quad (b)4.000021.$

Příklad 22: $-x^4-5x^3-10x^2-10x-5$.

Příklad 23: $1-3x-\frac{9x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$.

Příklad 24: $1-\frac{x^2}{2}$.

Příklad 25:

a) $f'_x(x,y)=6x^2-6xy^2+7y^3,$
$f'_y(x,y)=-6x^2y+21xy^2,$
$f''_{xx}(x,y)=12x-6y^2,$
$f''_{yy}(x,y)=-6x^2+42xy,$
$f''_{xy}(x,y)=-12xy+21y^2.$

b) $f'_x(x,y)=5y\sin(7x-2y)+35xy\cos(7x-2y),$
$f'_y(x,y)=5x\sin(7x-2y)-10xy\cos(7x-2y),$
$f''_{xx}(x,y)=70y\cos(7x-2y)-245xy\sin(7x-2y),$
$f''_{yy}(x,y)=-20x\cos(7x-2y)-20xy\sin(7x-2y),$
$f''_{xy}(x,y)=5\sin(7x-2y)+35x\cos(7x-2y)-10y\cos(7x-2y)+70xy\sin(7x-2y).$

c) $f'_x(x,y)=-\frac{y}{x^2},$
$f'_y(x,y)=\frac{1}{x},$
$f''_{xx}(x,y)=\frac{2y}{x^3},$
$f''_{yy}(x,y)=0,$
$f''_{xy}(x,y)=-\frac{1}{x^2}.$

d) $f'_x(x,y) = \frac{2xy-\sqrt{y}}{2x^{\frac{3}{2}}}$,
$f'_y(x,y) = \frac{1+4x\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}$,
$f''_{xx}(x,y) = \frac{3\sqrt{y}-2xy}{4x^{\frac{5}{2}}}$,
$f''_{yy}(x,y) = \frac{-1}{4y^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}$,
$f''_{xy}(x,y) = \frac{4x\sqrt{y}-1}{4x^{\frac{3}{2}}\sqrt{y}}$.

Příklad 26:

a) $f'_x(x,y) = \frac{x^2\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+y^2\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}}{x^2y}$, $f'_y(x,y) = -\frac{x^2\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+y^2\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}}{x^2y}$.

b) $f'_x(x,y) = \frac{2x\,\mathrm{e}^y}{x^2\,\mathrm{e}^y-3y}$, $f'_y(x,y) = \frac{x^2\,\mathrm{e}^y-3}{x^2\,\mathrm{e}^y-3y}$.

Příklad 27:

(a) $4x-y-z-2=0$,

(b) $x+2y-4z+4(\ln 4-1)=0$.

Příklad 28:

(a) $\frac{928}{300}$,

(b) $\frac{99}{100}$.

Příklad 29:

(a) $2x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-x+c$,

(b) $\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-21x+c$,

(c) $\frac{x^5}{10}-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{1}{2x}+c$,

(d) $\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}}-\frac{40}{17}\sqrt[20]{x^{17}}+c$,

(e) $-\frac{2}{\sqrt{5}}\arcsin x+c$,

(f) $\frac{2^x}{4\ln 2}-\frac{5}{4}x+c$.

Příklad 30:

(a) $2\sin x-(2x+3)\cos x+c$,

(b) $\mathrm{e}^x(x^2+x-2)+c$,

(c) $\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{8}+c$,

(d) $5x(\ln x-1)+c$.

Příklad 31:

(a) $\frac{7}{3}\ln|x|+c$,

(b) $-\frac{2}{9}\ln|5-9x|+c$,

(c) $-\frac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3}+c$,

(d) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2x-3)^6}+c$,

(e) $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x}{3}}+c$,

(f) $\frac{-1}{36(12x+3)^3}+c$,

(g) $\sqrt{3x^2-5}+c$,

(h) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+c$,

(i) $-\frac{30}{29}\sqrt[30]{x^{29}}+c$,

(j) $-\ln|4-\mathrm{e}^x|+c$.

Příklad 32:

(a) 168,

(b) $2+\frac{\pi^2}{2}$,

(c) $\frac{3}{4}\pi$,

(d) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi$,

(e) 4,

(f) $\frac{10}{3}$.

Příklad 33: $\frac{45}{2}$.

Příklad 34: $\int_0^1\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^3\int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, plocha $\frac{1}{2}$.

Příklad 35: $\int_2^4\int_y^{y+3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^4\int_2^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_4^5\int_2^4 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_5^7\int_{x-3}^4 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Příklad 36: $\frac{3}{20}$.

Příklad 37: $\frac{1}{6}$.

Příklad 38: $\frac{63}{24}\ln 2$.

Příklad 39: 2π.

Příklad 40: π.

Příklad 41: $T=[\frac{2}{3},\frac{5}{3}]$.

Příklad 42: π.

Příklad 43: $(a)\,\frac{271}{60}$, $\quad(b)\,\frac{7}{10}$.

Příklad 44: $(a) y = 5x - \cos x + c$, $\quad(b) y = \mathrm{e}^{cx}$.

Příklad 45: $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 3$.