Cvičení z AM-DI

Petr Hasil, Ph.D.
hasil@mendelu.cz

Verze: 1. března 2017

Poznámka. Příklady označené „‡“ na cvičení dělat nebudeme, protože jsou moc dlouhé, popř. složité (jako takové, nebo pro psaní na tabuli). V seznamu je nechávám pro zájemce. U zkoušky se typově objevit mohou spíše ve zjednodušené formě, nebo nějaká jejich část. Jestliže výsledek příkladu (zejména je-li v zadání pouze v závorce navrženo, co si lze navíc procvičit), je možné ověřit např. pomocí Wolframu Alpha

http://www.wolframalpha.com/,

krátký návod formou ukázek je např. zde:

http://user.mendelu.cz/marik/wiki/doku.php?id=wolfram_alpha,

nebo pomocí Mathematical Assistant on Web

http://user.mendelu.cz/marik/maw.

V případě překlepu, nedostatečně formulovaného zadání, nebo jakékoli chyby mi prosím napište. Poznámky k teorii mají jen úlohu ‘připomínek’ a nekladou si za cíl být ani zcela korektní, ani úplné.

1 Vektory

- Skalární veličina je plně určená jediným číselným údajem, vektory jsou určeny více číselnými hodnotami.

Příklad 1. *Rozhodněte, která z následujících veličin je skalární a která vektorová.*

a) hmotnost,

b) rychlost,

c) síla,

d) poloha v prostoru.

- Vektor $\vec{v}$ z bodu $A = [a_1, a_2]$ do bodu $B = [b_1, b_2]$ je $\vec{v} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
- Násobení vektoru skalárem znamená vynásobit každou jeho složku.
- Vektory sčítáme po složkách.
- Velikost vektoru $|\vec{v}| = |(v_1, v_2)| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
- Skalární součin vektorů (výsledkem je číslo - skalár):
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$
- Vektorový součin vektorů (výsledkem je vektor):
$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$
kde $\vec{\imath} = (1, 0, 0), \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$ a determinant počítáme např. pomocí Sarrusova pravidla.

Příklad 2. *Jsou dány body $A = [1, 2], B = [3, 1], C = [2, -1]$ a označme $\vec{v}$ vektor z bodu A do bodu B a $\vec{w}$ vektor z bodu A do bodu C Určete a zakreslete:*

a) $\rho(A, B)$,

b) $\vec{v}$,

c) $|\vec{v}|$,

d) $\vec{v} + \vec{w}$,

e) $2\vec{v}$,

f) $-\frac{1}{2}\vec{v}$,

g) $\vec{v} \cdot \vec{w}$,

h) $3\vec{v} - 2\vec{w}$.

Příklad 3. *Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (-1, 0, 2)$ a $\vec{w} = (5, -4, 2)$. Určete:*

a) $\vec{u} + \vec{v}$,

b) $4\vec{u}$,

c) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$,

d) $\vec{u} \cdot \vec{v}$,

e) $\vec{u} \times \vec{v}$,

f) $(\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \times \vec{u})$,

g) $|u|$,

h) $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

2 Opakování - derivace a integrál funkce jedné proměnné

- Derivuje se kombinací vzorců.
- Vypočítat druhou derivaci znamená zderivovat funkci jednou a výsledek derivovat znovu. (Vyšší derivace podobně.) Mezivýsledky je možné vhodně upravovat.
- Určit derivaci v bodě $x = a$ znamená nejprve funkci zderivovat a poté do derivace dosadit za x hodnotu a.

Příklad 4. *Vypočtěte derivaci (derivaci druhého řádu, derivaci v bodě $x_0 = 2, \dots$) funkce* *a)* $5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$,

b) $\frac{6}{x^3}$,

c) $\sqrt{2 + 3x^2}$,

d) $3x\sqrt{7 - 2x^2}$,

e) $\frac{4}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

f) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

g) $\frac{3x^4 - 2x^3 + 5\sqrt[4]{x^3} + 2}{\sqrt{x}}$,

h) $x^3 3^x$,

i) $\frac{\sin x}{x^2+1}$,

j) $\frac{\ln \sin x}{x^2 - 3x}$,

k) $\sqrt{2x + \cos^3(2x - 5)}$,

l) $x\,\mathrm{e}^{-x}$,

Příklad 5. *Vypočtěte derivaci funkce a rozhodněte, pro jaké hodnoty reálných parametrů a, b, c má výpočet smysl.*

a) $ax^2 + bx + c$,

b) $\frac{\ln x^c}{a^b}$.

- Funkci dvou proměnných $\varphi(x, y)$ je možné zapsat jako součin dvou funkcí jedné proměnné, tedy $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ právě tehdy když je determinant

$$\begin{vmatrix} \varphi & \varphi'_x \\ \varphi'_y & \varphi''_{xy} \end{vmatrix} = 0.$$

Příklad 6. *Ověřte, že je možné danou funkci dvou proměnných zapsat jako součin dvou funkcí jedné proměnné. Pokud ano, proveďte.*

a) $\varphi(x, y) = y^2 \sin x$,

b) $\varphi(x, y) = \sin(2x - y)$,

c) $\varphi(x, y) = x^3\,\mathrm{e}^{x+2y}$,

d) $\varphi(x, y) = x - y^3$.

- Integrál je antiderivace.
- Základní postupy:
  1. úprava a použití vzorců;
  2. metoda per partes;
  3. substituční metoda.
- Pro výpočet určitého integrálu využíváme Newton-Leibnizovy formule – určíme primitivní funkci (neurčitý integrál), dosadíme do ní postupně horní a dolní mez a získané hodnoty odečteme.

Příklad 7. *Vypočtěte neurčitý integrál*

a) $\int 2x^3 - 5x^2 - 3x - 2\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{7}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$,

‡*d)* $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

‡*e)* $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

f) $\int x\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}\,\mathrm{d}x$,

h) $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$,

i) $\int \sin^3 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x$,

j) $\int (3x - 5)\sin x\,\mathrm{d}x$,

k) $\int (2 - x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

l) $\int (x^2 + 3x)\ln x\,\mathrm{d}x$,

m) $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

n) $\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Příklad 8. *Vypočtěte určitý integrál*

a) $\int_{-3}^{5} 3x^2 - 5x + 7\,\mathrm{d}x$,

b) $\int_0^{\pi} x + \sin x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_{-1}^{2} (2x+3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

e) $\int_1^{\mathrm{e}^8} \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\,\mathrm{d}x$,

f) $\int_0^2 \frac{5x^2}{\sqrt{2x^3+9}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 9. *Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ takové, aby platila rovnost*

a) $\int_0^a 3x + 1\,\mathrm{d}x = 4$,

b) $\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$,

c) $\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = 1$,

d) $\int_{a+1}^{3a} 2x - 3a\,\mathrm{d}x = 5$.

3 Příklady

- Platí stejná pravidla jako pro derivaci funkce jedné proměnné.
- Všechny proměnné mimo té podle které derivujeme považujeme za konstanty.

Příklad 10. *Vypočtěte parciální derivace prvního řádu (druhého řádu, d. v bodě $[-1,2]$,…) funkce*

a) $x^2y + 3xy - 4x + 5y - 7$,

b) $\frac{x}{y}$,

c) x^y,

d) $\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$,

e) $2\,\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2y}}$,

f) $\frac{xy}{y-x}$,

g) $\frac{\sqrt{y}\sin x}{x^2+1}$,

h) xyz,

i) $xyz\sin(xy)\cos z$,

j) $(\sin x)^{xy}$,

k) $\sqrt{2x+y^3}$,

l) x^{y^z}.

Příklad 11. *Vypočtěte*

a) $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$,

b) $\frac{\partial}{\partial a}(a^3)$,

c) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, *kde $m \in \mathbb{R}, v = v(t)$,*

d) sílu $F = \frac{\partial p}{\partial t}$, kde hybnost $p = mv, m \in \mathbb{R}, v = v(t)$ a víme, že $a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t}$.

- Gradient
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$
- Gradient funkce $f(x,y,z)$
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$
- Gradient je kolmý k vrstevnicím a směřuje k vyšším funkčním hodnotám.
- Totální diferenciál funkce $f(x,y,z)$
$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$
Funkce f je kmenová funkce daného diferenciálu.
- Známe-li pouze diferenciál, kmenovou funkci lze vypočítat užitím Schwarzovy věty (nezáleží na pořadí proměnných podle kterých derivujeme, jen na tom, kolikrát derivujeme podle které) a integrováním.

Příklad 12. *Určete gradient a totální diferenciál (v bodě ...) funkce*

a) $f(x,y,z) = x^2y + xz + y^3z$,

b) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$.

Příklad 13. *Rozhodněte, zda je daný výraz totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, určete ji. (A zapište gradient výsledné funkce.)*

a) $2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$,

b) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}x + 2\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y$,

c) $(x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (\sqrt{y} - 2xy)\,\mathrm{d}y$.

Příklad 14. *Je dána složená funkce $f(x,y) = x^2 + xy^2$, kde $x(u,v) = v - u$ a $y(u,v) = (u+v)^2$. Pomocí vzorce $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\star} = \nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\star}$ (kde $\star = u, v$) určete*

a) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$,

b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}$,

c) funkci f přepište na "jednoduchou" funkci proměnných u, v, určete obě parciální derivace prvního řádu a porovnejte s výsledky z předchozích bodů příkladu.

- Tečnu i normálu hledáme ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
- Tečna t a normála n funkce $f(x)$ v (tečném) bodě $[x_0, f(x_0)] = [x_0, y_0]$ mají rovnice
$$t : y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$
$$n : y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$
- K lineární aproximaci využíváme tečnu (místo počítání hodnoty funkce v bodě a určíme tečnu v blízkém bodě x_0 a bod a dosadíme do rovnice tečny).

Příklad 15. *Určete rovnici tečny funkce f v bodě x_0.*

a) $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}, \quad x_0 = -2,$ *b)* $f(x) = 2x + \sin x, \quad x_0 = \pi.$

Příklad 16. *Určete rovnici normály funkce f v bodě x_0.*

a) $f(x) = x^2 + \ln x, \quad x_0 = 1,$ *b)* $f(x) = \sqrt[3]{1-x}, \quad x_0 = 9.$

Příklad 17. *Pomocí lineární aproximace určete přibližně:*

a) 2.03^5, *b)* $\cos 59°$.

- Tečnou rovinu hledáme ve tvaru $z = ax + by + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Tečná rovina t funkce $f(x, y)$ v (tečném) bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)] = [x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$t : z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

- K lineární aproximaci využíváme tečnou rovinu podobně jako tečnu u funkce jedné proměnné.

Příklad 18. *Určete rovnici tečné roviny funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.*

a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - xy + x, \quad [x_0, y_0] = [1, 0],$

b) $f(x, y) = \ln(x + 2y), \quad [x_0, y_0] = [2, 1].$

Příklad 19. *Pomocí lineární aproximace určete přibližně:*

a) $\sqrt{0.98^2 + 2.05^3}$, *b)* $e^{0.04^3 - 0.01}$.

- Vrstevnice je křivka spojující body se stejnou funkční hodnotou.

Příklad 20. *Zakreslete vrstevnice funkce f s spočtěte a zakreslete gradient této funkce v daných bodech.*

a) $f(x, y) = y - x, \quad [0, 0], [-2, 1], [1, 3]$ *b)* $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad [0, 0], [0, 1], [1, 1].$

Příklad 21. *Určete vektor kolmý k vrstevnici funkce $f(x, y) = 3xy + 2x^2\sqrt{y}$ v bodě $[1, 4]$.*

- Rovnice $f(x, y) = 0$ určuje implicitně právě jednu funkci $y = g(x)$ právě tehdy když $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
- Derivace funkce dané implicitně $f(x, y) = 0$ je rovna $-f'_x/f'_y$.
- Tečnu v bodě $[x_0, y_0]$ funkce dané implicitně $f(x, y(x)) = 0$ počítáme jako tečnu v rovině $z = 0$ k vrstevnici ve výšce nula pro funkci $f(x, y)$, tj.

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Příklad 22. *Ověřte, že rovnice $x + 2x^2y - 5xy^3 = 0$ zadává v okolí bodu $[2, 1]$ implicitně funkci $y = g(x)$. Pokud ano, určete její derivaci v tomto bodě a najděte k ní v tomto bodě tečnu.*

Příklad 23. *Najděte tečnu ke grafu funkce dané v okolí bodu $[-1, 2]$ implicitně rovnicí*

$$\frac{8x}{y} - xy^2 = 0.$$

- Divergence vektorové funkce $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y) = \nabla \cdot \vec{F} = f'_x + g'_y.$$

  Podobně pro funkci $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

- Divergence udává zřídlovitost vektorového pole. (Je-li rovna nule, je pole nezřídlové.)
- Rotace vektorové funkce $\vec{F}(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$

$$\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F} = (h'_y - g'_z, f'_z - h'_x, g'_x - f'_y).$$

- Rotace udává lokální míru rotace v daném bodě. (Je-li nulová, je pole nevírové.)
- Laplaceův operátor (skalární) funkce $f(x,y,z)$

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f.$$

Příklad 24. *Určete divergenci funkce $\vec{F}$.*

a) $\vec{F}(x,y) = (x^2 + xy - 3, xy^2 + 5x - y)$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (\cos y + \sin z, \cos z + \sin x, \cos x + \sin y)$.

Příklad 25. *Určete pro jakou hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$ je vektorové pole*

$$\vec{F}(x,y,z) = (p^2x + yz - 3x, p^4zx, (p+2)(z-x))$$

nezřídlové.

Příklad 26. *Určete rotaci funkce $\vec{F}$.*

a) $\vec{F}(x,y,z) = (xy + yz, z^2 + xy, 2x + 3y - xyz)$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (\cos y + \sin z, \cos z + \sin x, \cos x + \sin y)$.

Příklad 27. *Určete pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ je vektorové pole*

$$\vec{F}(x,y,z) = (4x^2 + ax - 2ay, (3-b)z - 4y^3, z + (2+c)x)$$

nevírové.

Příklad 28. *Je dána funkce $f(x,y,z) = xz^2 - \ln(y^2z) + \frac{y}{xz}$. Aplikujte na ni Laplaceův operátor.*

- Křivkový integrál prvního druhu $\int_C F(x,y)\,\mathrm{d}s$ = obsah svislé plochy mezi funkcí $F(x,y)$ a křivkou C (v rovině xy).
- Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na orientaci křivky.
- Je-li křivka C uzavřená, píšeme
$$\oint_C F(x,y)\,\mathrm{d}s.$$
- Má-li křivka C parametrické vyjádření
$$C = \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha,\beta], \end{cases}$$
pak
$$\int_C F(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$
- Je-li $\tau(x,y)$ lineární hustota v bodě $[x,y]$, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	délka křivky C
$\tau(x,y)$	hmotnost křivky C (m)
$y\tau(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\tau(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\tau(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\tau(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)

- Souřadnice težiště $[x_T, y_T]$:
$$x_T = \frac{U_y}{m}, \qquad y_t = \frac{U_x}{m}.$$

Příklad 29. *Vypočítejte křivkový integrál prvního druhu funkce* $F(x,y) = \frac{1}{x-y}$ *po úsečce* $|AB|$*, kde* $A = [0,-2], B = [4,0]$.

Příklad 30. *Určete souřadnice těžiště drátěného trojúhelníku, který má v rovině vrcholy v bodech* $[0,1],[0,0],[1,0]$ *a jehož lineární hustota je* $\tau(x,y) \equiv 1$.

Příklad 31. *Vypočítejte křivkový integrál prvního druhu funkce* $F(x,y) = xy$ *po čtvrtině kružnice nacházející se v prvním kvadrantu, mající poloměr* 2 *a střed v počátku.*

Příklad 32. *Pomocí křivkového integrálu prvního druhu určete souřadnice těžiště a momenty setrvačnosti drátěné konstrukce, skládající se z čtvrtiny kružnice nacházející se v prvním kvadrantu, mající poloměr* 1 *a střed v počátku, jejíž koncové body jsou úsečkami spojeny s počátkem a lineární hustota je konstantní a rovna jedné.*

Příklad 33. *Vypočítejte hmotnost jednoho závitu šroubovice*
$$C = \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 4t, \end{cases}$$
jejíž hustota v bodě $[x,y]$ *je* $\frac{\sqrt{z}}{x^2+y^2}$.

Příklad 34. *Určete hmotnost paraboly* $y = x^2$ *pro* $x \in [-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$*, jejíž hustota je rovna vzdálenosti daného bodu od osy* y.

Příklad 35. *Je dána čtvrtina asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ v prvním kvadrantu. Určete její moment setrvačnosti vůči ose x, víte-li, že $\tau(x, y) = \frac{x}{\sqrt[3]{2|xy|}}$ a parametrické vyjádření této asteroidy je*

$$C = \begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t. \end{cases}$$

- Křivkový integrál druhého druhu:

$$\int_C \vec{F}(x, y)\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

  Na těleso působí síla $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\vec{\imath} + Q(x, y)\vec{\jmath}$ a to se pohybuje podél křivky C dané polohovým vektorem $\vec{r}$ (práce vykonaná silou $\vec{F}$).

- Křivkový integrál druhého druhu závisí na orientaci křivky.
- Má-li křivka C parametrické vyjádření

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

  pak

$$\int_C \vec{F}(x, y)\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\Big]\,\mathrm{d}t.$$

- Je-li křivka C uzavřená, píšeme

$$\oint_C \vec{F}(x, y)\,\mathrm{d}\vec{r}$$

  = práce vykonaná silou $\vec{F}$ při přemístění tělesa po uzavřené křivce C
  = cirkulace vektorového pole po křivce C.

- Tok vektorového pole křivkou C (použijeme normálovou složku):

$$\int_C -Q(x, y)\,\mathrm{d}x + P(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

- Platí:

Integrál nezávisí na integrační cestě.
$\Updownarrow$
Lze zavést potenciální energii. (Existuje kmenová funkce = − potenciál.)
$\Updownarrow$
Integrál po každé uzavřené křivce = 0.
$\Updownarrow$
Rotace vektorového pole = 0.
$\Updownarrow$
Integrál závisí jen na počátečním a koncovém bodě a je roven $\varphi(B) - \varphi(A)$, kde A je počáteční bod, B je koncový bod a φ je kmenová funkce.

Příklad 36. *Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\int_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (2xy + y^2)\,\mathrm{d}y$, kde křivka C je parabola $y = x^2$ z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 1]$.*

Příklad 37. *Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\int_C \vec{F}(x, y)\,\mathrm{d}\vec{r}$, kde* *a)* $\vec{F}(x,y) = (x^3 + y^2, 0)$ *a křivka* C *je parabola* $y = x^2$ *z bodu* $[-1,1]$ *do bodu* $[2,4]$,

b) $\vec{F}(x,y) = (y, -x)$ *a křivka* C *má parametrické vyjádření* $x = 2\cos t, y = 3\sin t, t \in [0,\pi]$,

c) $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, x+y-1)$ *a křivka* C *je úsečka z bodu* $[1,1,1]$ *do bodu* $[2,3,4]$,

d) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ *a křivka* C *je jeden závit šroubovice*

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, a, b \in \mathbb{R}.$$

Příklad 38. *Nechť křivka* C *je osa I. a III. kvadrantu od bodu* $[1,1]$ *do bodu* $[2,2]$. *Vypočítejte*

$$\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

Příklad 39. *Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu funkce* $\vec{F}(x,y) = (3x^2y, x^3+1)$, *kde křivka* C *je*

a) úsečka $[0,0] \to [1,1]$,

b) parabola $y = x^2, \quad [0,0] \to [1,1]$,

c) lomená čára $[0,0] \to [1,0] \to [1,1]$.

Závisí tento integrál na integrační cestě? Pokud ne, určete kmenovou funkci vektorového pole $\vec{F}$.

- Dvojný integrál přes množinu M
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
převedeme na dvojnásobý integrál
$$\int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \qquad \text{nebo} \qquad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$
kde meze vnitřního integrálu mohou být výrazy obsahující vnější proměnnou.
- Vnější meze získéme jako čísla odkud kam množina M sahá (nekonečný pruh – je-li vnější proměnná x, tak svislý; pokud y, tak vodorovný). Vnitřní meze pak musí množinu z tohoto pruhu přesně “vykrojit”. Není-li možné mez zapsat jako jediný výraz, nekonečný pruh rozdělíme na nekolik užších pruhů tak, aby to na každém z nich možné bylo.
- Integrujeme pak postupne zevnitř. Integrujeme-li přes x, chováme se k y jako ke konstantě a naopak.
- Polární souřadnice:
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi,$$
kde r je vzdálenost bodu od počátku (poloměr) a φ je odklon průvodiče bodu od kladné poloosy x. (Tedy $x^2+y^2=r^2$.)

Příklad 40. *V rovině je dána množina ohraničená křivkami*

$$x = 1, \quad y = 2x, \quad y = 3x.$$

(a) *Znázorněte tuto množinu na obrázku.*

(b) *Napište obě možnosti pořadí integrace funkce $f(x, y)$ přes tuto množinu.*

(c) *Pomocí dvojnásobného integrálu určete plochu této množiny.*

Příklad 41. *Převeďte dvojný integrál*

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

na integrál dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace), je-li množina A ohraničena

$$y = x, \quad y = x - 3, \quad y = 2, \quad y = 4.$$

Příklad 42. *Vypočtěte integrál*

$$\iint\limits_A x + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \ \textit{kde } A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq x\}.$$

Příklad 43. *Vypočtěte integrál*

$$\iint\limits_A 4x^3 + 3y^2 + 2x - y + 12\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina A je obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami a dva z jeho vrcholů mají souřadnice $[0, 1]$ a $[3, 2]$.

Příklad 44. *Určete plochu množiny A ohraničené křivkami $5x - y - 1 = 0$ a $x^2 - y + 3 = 0$.*

Příklad 45. *Vypočtěte integrál*

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina A je trojúhelník s vrcholy o souřadnicích $[1, 1], [3, 1]$ a $[3, 5]$ a funkce $f(x, y)$ je

a) $\frac{y}{x}$, b) $\frac{y}{x^2}$.

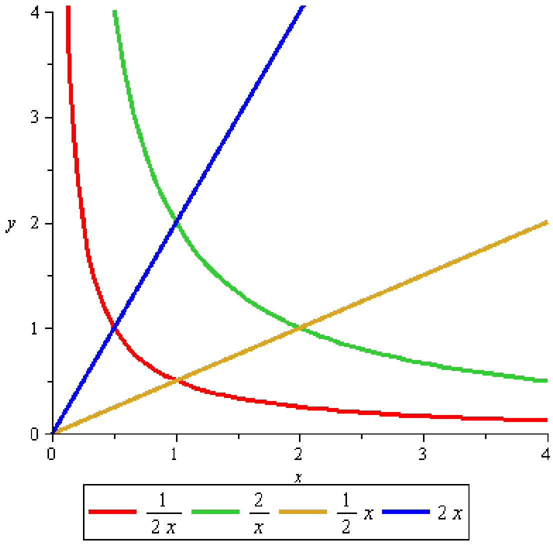
Příklad 46 (‡)**.** *Zaměňte meze a vypočtěte integrál*

$$\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int\limits_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 47 (‡)**.** *Vypočtěte integrál*

$$\iint\limits_A x^2 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina A je znázorněna na následujícím obrázku.



Příklad 48. *Vypočtěte dvojný integrál*

$$\iint_A x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \ \textit{kde } A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x, y \geq -x\}.$$

- Střední hodnota:

$$S_H = \frac{\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x}{b-a}, \qquad S_H = \frac{\iint_A f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{S_A}.$$

- Uvažujme $\iint_A F(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$. Je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota v bodě $[x,y]$ a $\rho(x,y)$ vzdálenost bodu $[x,y]$ od osy otáčení o, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	Obsah množiny A (S)
$\sigma(x,y)$	hmotnost množiny A (m)
$y\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)
$\rho^2(x,y)\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose o (J_o)
y^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose x (I_x)
x^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose y (I_y)
$\rho^2(x,y)$	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose o (I_o)

- Souřadnice težiště průřezu $[x_T, y_T]$ ($\sigma(x,y) = 1$):

$$x_T = \frac{\iint_A x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{S}, \qquad y_t = \frac{\iint_A y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{S}.$$

- $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ hladká v oblasti obsahující množinu Ω a její hranici $\partial\Omega$ (při obíhání po hranici je množina vlevo), pak (Greenova věta):

  1. Cirkulace po hranici $\partial\Omega$ je (viz třetí složku $\operatorname{rot}\vec{F}$)
  $$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
  2. Tok přez hranici $\partial\Omega$ je (viz $\operatorname{div}\vec{F}$)
  $$\oint_{\partial\Omega} -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega P'_x(x,y) + Q'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 49. *Vypočtěte plochu množiny*
$$A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2 \leq 9, y \leq x, y \geq 0\}.$$

Příklad 50. *Je dána množina*
$$A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3x\}.$$
Určete souřadnice jejího těžiště.

Příklad 51. *Určete kvadratický moment průřezu množiny*
$$A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, y \leq 0, y \geq x\}$$
vzhledem k ose procházející kolmo počátkem.

Příklad 52. *Určete moment setrvačnosti množiny*
$$A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3x\},$$
jejíž hustota je v každém bodě dána součtem jeho souřadnic, vzhledem

a) k ose x, *b) k ose y.*

Příklad 53. *Je dáno vektorové pole*
$$\vec{F}(x,y) = (x-2y)\vec{\imath} + (5+4xy)\vec{\jmath},$$
a kladně orientovaná uzavřená křivka C, složená z lomené čáry spojující body $[0,0]$, $[1,1]$ a $[-1,1]$ a části grafu funkce $y = x^2$ pro $x \in [-1,0]$. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

a) cirkulaci vektorového pole $\vec{F}$ po křivce C, *b) tok vektorového pole $\vec{F}$ křivkou C.*

Příklad 54. *Je dáno vektorové pole*
$$\vec{F}(x,y) = (x^2+y)\vec{\imath} + (3x^2y-5)\vec{\jmath},$$
a kladně orientovaná uzavřená křivka C, složená z lomené čáry spojující body $[2,4]$, $[0,4]$ a $[-1,1]$ a části grafu funkce $y = x^2$ pro $x \in [-1,2]$. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

a) cirkulaci vektorového pole $\vec{F}$ po křivce C, *b) tok vektorového pole $\vec{F}$ křivkou C.*

Příklad 55. *Pomocí Greenovy věty vypočítejte cirkulaci vektorového pole*
$$\vec{F}(x,y) = (\mathrm{e}^x - 7y)\vec{\imath} + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\vec{\jmath},$$
po křivce C, kterou je kladně orientovaná hranice čtvrtkruhu se středem v počátku a poloměrem 2, splňujícím $y \geq |x|$.

Příklad 56. *Pomocí Greenovy věty vypočítejte tok vektorového pole*

$$\vec{F}(x,y) = (xy^2 - 2\sin y)\vec{\imath} + \left(\frac{\sqrt{x^7}+3y\sqrt{x^5}}{3\sqrt{x}} + 8y\right)\vec{\jmath},$$

křivkou C, kterou je kladně orientovaná hranice čtvrtkruhu se středem v počátku a poloměrem 2, splňujícím $y \geq |x|$.

Příklad 57. *Určete střední hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy$ na množině*

$$A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5 - x^2, y \geq 1\}.$$

Příklad 58. *Vyřešte diferenciální rovnici*

a) $y' - \sin x = 5$, *b)* $y' = \frac{y \ln y}{x}$, *c)* $\frac{x-1}{2y} = \mathrm{e}^{-x}\, y'$.

Příklad 59. *Vyřešte počáteční úlohu*

a) $x + y' = 2, \quad y(2) = 5$,

b) $(1 + \mathrm{e}^x)\frac{y'}{y} + \mathrm{e}^x = 0, \quad y(0) = 1$,

c) $y' \sin x \sin y = \cos x \cos y, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Příklad 60. *Vyřešte diferenciální rovnici*

a) $y' + 3y = x$,

b) $y' - y \operatorname{tg} x - \sin x = 0$,

c) $y' - 3x^2 y = (x+2)\,\mathrm{e}^{x^3}$,

d) $y'\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\,\mathrm{e}^{x^2} = \cos x$.

Příklad 61. *Vyřešte diferenciální rovnici*

a) $y'' + y' - 2y = 0$,

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$,

c) $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Příklad 62. *Vyřešte diferenciální rovnici*

a) $y'' - 3y' + 2y = x^2$,

b) $y'' - y = x^3$,

c) $y'' + 9y = 18x^2 - 3x - 5$.

Příklad 63. *Vyřešte diferenciální rovnici*

$$y'' - 8y' + 16y = P(x),$$

kde

a) $P(x) = 32$, *b)* $P(x) = 12x - 3$, *c)* $P(x) = -x^2 + 2x + 5$.

Příklad 64. *V 13 hodin 28 minut byla v hotelovém pokoji, vytopeném na $18{,}3\,^\circ\mathrm{C}$ nalezena mrtvola, jejíž teplota byla $26{,}6\,^\circ\mathrm{C}$. O tři hodiny později je její teplota $21{,}1\,^\circ\mathrm{C}$. Určete čas úmrtí za předpokladu teploty živého těla $37\,^\circ\mathrm{C}$.*

Příklad 65. *Do vodní nádrže o objemu* $V = 1000$ *litrů, která v počátečním čase* $t_0 = 0$ *minut obsahuje* $Q_0 = 0$ *gramů soli, přitéká rychlostí* $v = 20$ *litrů za minutu roztok s koncentrací soli* $c = 50$ *gramů na litr. Roztok se s vodou promíchá a výsledná směs z nádrže vytéká opět rychlostí* v*. Najděte vzotec pro výpočet množství a koncentrace soli v nádrži v libovolném časovém okamžiku od počátečního času.*

Poznámka. Příklady na sestavování diferenciálních rovnic popisujících jistou situaci (jev) jsou k dispozici na strankách doc. Maříka, předmět Vyšší matematika (kombi), diferenciální rovnice, příklad 2. Přímý odkaz je zde:

http://user.mendelu.cz/marik/wiki/doku.php?id=vyssi_matematika_zapocet#diferencialni_rovnice

Zápisky z přednásky, kde byly tyto příklady řešeny jsou zde (strana 7 a dál):

http://user.mendelu.cz/marik/wiki/inzmat/prednasky/vyssi_matematika_2013_02_14.pdf

4 Výsledky některých příkladů

Příklad 1:

a) skalární,
b) vektorová,
c) vektorová,
d) vektorová.

Příklad 2:

a) $\sqrt{5}$,
b) $(2, -1)$,
c) $\sqrt{5}$,
d) $(3, -4)$,
e) $(4, -2)$,
f) $(-1, \frac{1}{2})$,
g) 5,
h) $(4, 3)$.

Příklad 3:

a) $(0, 2, 5)$,
b) $(4, 8, 12)$,
c) $(10, 0, 2)$,
d) 5,
e) $(4, -5, 2)$,
f) $(-12, 15, -6)$,
g) $\sqrt{14}$,
h) $3\sqrt{5}$.

Příklad 4:

a) $20x^3 - 6x^2 + 8x - 5$,
b) $-\frac{18}{x^4}$,
c) $\frac{3x}{\sqrt{2+3x^2}}$,
d) $3\sqrt{7 - 2x^2} - \frac{6x^2}{\sqrt{7-2x^2}}$,
e) $-\frac{12x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$,
f) $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,
g) $\frac{21}{2}x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} - x^{-\frac{3}{2}}$,
h) $x^2 3^x (3 + x \ln 3)$,
i) $\frac{(x^2+1)\cos x - 2x \sin x}{(x^2+1)^2}$,
j) $\frac{(x^2-3x)\operatorname{cotg} x - (2x-3)\ln \sin x}{(x^2-3x)^2}$,
k) $\frac{1-3\sin(2x-5)\cos^2(2x-5)}{\sqrt{2x+\cos^3(2x-5)}}$,
l) $\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

Příklad 5:

a) $2ax + b, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$,
b) $\frac{c}{a^b x}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Příklad 6:

a) ano, $\varphi(x, y) = (y^2) \cdot (\sin x)$,
b) ne,
c) ano, $\varphi(x, y) = (x^3\,\mathrm{e}^x) \cdot (\mathrm{e}^{2y})$,
d) ne.

Příklad 7:

a) $\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$,

b) $21\sqrt[3]{x} + c$,

c) $-\frac{e^{-3x}}{3} + c$,

d) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$,

e) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$,

f) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$,

g) $-\sqrt{3-x^2} + c$,

h) $\frac{\sin^3 x}{3} + c$,

i) podle volby substituce
$\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\sin^8 x}{8} + c_1$,
nebo $\frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + c_2$, kde $c_1 = c_2 - \frac{1}{24}$

j) $3\sin x - (3x-5)\cos x + c$,

k) $(2-x)\sin x - \cos x + c$,

l) $(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2})\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{3x^2}{4} + c$,

m) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$,

n) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c$.

Příklad 8

a) 168,

b) $2 + \frac{\pi^2}{2}$,

c) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{12}\pi$,

d) $5\,e^2 + \frac{1}{e}$,

e) 4,

f) $\frac{10}{3}$.

Příklad 9

a) $\frac{4}{3}, -2$

b) 1,

c) 0,

d) $\frac{3}{2}, -2$.

Příklad 10:

a) $f'_x = 2xy + 3y - 4$, $f'_y = x^2 + 3x + 5$,

b) $f'_x = \frac{1}{y}$, $f'_y = -\frac{x}{y^2}$,

c) $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$,

d) $f'_x = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$,
$f'_y = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$,

e) $f'_x = -\frac{3}{y}\,e^{-\frac{3x}{2y}}$, $f'_y = \frac{3x}{y^2}\,e^{-\frac{3x}{2y}}$,

f) $f'_x = \frac{y^2}{(y-x)^2}$, $f'_y = \frac{-x^2}{(y-x)^2}$,

g) $f'_x = \sqrt{y}\frac{(x^2+1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$,
$f'_y = \frac{\sin x}{2\sqrt{y}(x^2+1)}$,

h) $f'_x = yz$, $f'_y = xz$, $f'_z = xy$,

i) $f'_x = yz\cos z[\sin(xy) + xy\cos(xy)]$,
$f'_y = xz\cos z[\sin(xy) + xy\cos(xy)]$,
$f'_z = xy\sin(xy)(\cos z - z\sin z)$,

j) $f'_x = y(\sin x)^{xy}(\ln\sin x + x\operatorname{cotg} x)$,
$f'_y = x(\sin x)^{xy}\ln\sin x$,

k) $f'_x = \frac{1}{\sqrt{2x+y^3}}$, $f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{2x+y^3}}$,

l) $f'_x = y^z x^{y^z-1}$,
$f'_y = x^{y^z} z y^{z-1}\ln x$,
$f'_z = x^{y^z} y^z \ln x \ln y$.

Příklad 11:

a) $4\pi r^2$,

b) $3a^2$,

c) mva,

d) $F = ma$.

Příklad 12

a) $\nabla f = (2xy + z, x^2 + 3y^2 z, x + y^3), \mathrm{d}f = (2xy + z)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 3y^2 z)\,\mathrm{d}y + (x + y^3)\,\mathrm{d}z$,

b) $\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}, \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}\right), \mathrm{d}f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}\right)\mathrm{d}y.$

Příklad 13

a) ano, $f(x, y) = x^2 + y^2 + c$,

b) ano, $f(x, y) = x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{2y} + c$,

c) ano, $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{2}{3}y\sqrt{y} + c$.

Příklad 14

a) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = 2u - 2v - (u + v)^4 + 4(v - u)(u + v)^3$,

b) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = 2v - 2u + (u + v)^4 + 4(v - u)(u + v)^3$,

c) stejně jako a), b).

Příklad 15

a) $y = 11x + 25$,

b) $x - y + \pi = 0$.

Příklad 16

a) $y = \frac{4-x}{3}$,

b) $y = 12x - 110$.

Příklad 17

a) 34.4,

b) 0.5151.

Příklad 18:

a) $4x - y - z - 2 = 0$,

b) $x + 2y - 4z + 4(\ln 4 - 1) = 0$.

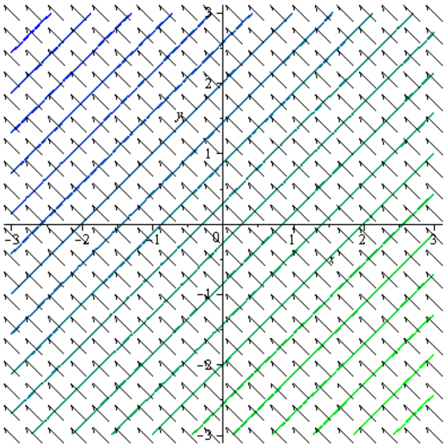
Příklad 19:

a) $\frac{928}{300}$,

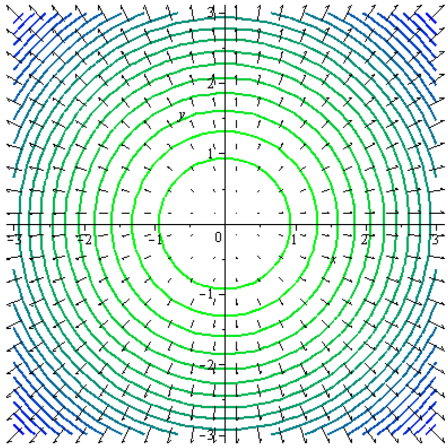
b) $\frac{99}{100}$.

Příklad 20:

a) $\nabla f(x, y) = (-1, 1)$,



b) $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$.



Příklad 21: $(20, 7/2)$.

Příklad 22: ano; $\frac{2}{11}$; $4x - 22y + 14 = 0$.

Příklad 23: $y = 2$.

Příklad 24:

a) $\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = 2x + y + 2xy - 1$,

b) $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0$.

Příklad 25: $p = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Příklad 26:

a) $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) =$
$= (3 - xz - 2z, y - 2 + yz, y - x - z)$,

b) $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$.

Příklad 27: $a = 0, b = 3, c = -2$.

Příklad 28: $\Delta f(x, y, z) = \frac{2y}{x^3 z} + \frac{2}{y^2} + 2x + \frac{1}{z^2} + \frac{2y}{xz^3}$.

Příklad 29: $\sqrt{5} \ln 2$.

Příklad 30: $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

Příklad 31: 4.

Příklad 32: $T = \left[\frac{3}{4+\pi}, \frac{3}{4+\pi}\right], \quad J_x = \frac{4+3\pi}{12} = J_y$.

Příklad 33: $\frac{20}{27}(2\pi)^{\frac{3}{2}} \quad (t \in [0, 2\pi])$.

Příklad 34: $\frac{92}{3}, \quad (\tau(x, y) = |x|)$.

Příklad 35: $\frac{16}{21}, \quad (t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right])$.

Příklad 36: $\frac{29}{30}$.

Příklad 37: $a)\frac{207}{20}$, $b) -6\pi$ $c)13$, $d) -a^2\pi$ $(t \in [0, 2\pi])$.

Příklad 38: $\ln 2$.

Příklad 39: $a, b, c)2$. Nezávisí, $\varphi(x, y) = x^3y + y + c$.

Příklad 40: $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^3 \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, plocha $\frac{1}{2}$.

Příklad 41: $\int_2^4 \int_y^{y+3} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^4 \int_2^x f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_4^5 \int_2^4 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_5^7 \int_{x-3}^4 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Příklad 42: $\frac{3}{20}$.

Příklad 43: $\frac{285}{2}$.

Příklad 44: $\frac{9}{2}$.

Příklad 45: $a)4$, $b)4 - 2\ln 3$.

Příklad 46: $\frac{1}{6}$.

Příklad 47: $\frac{63}{24}\ln 2$.

Příklad 48: 2π.

Příklad 49: π.

Příklad 50: $T = [\frac{2}{3}, \frac{5}{3}]$.

Příklad 51: π.

Příklad 52: $a)\frac{271}{60}$, $b)\frac{7}{10}$.

Příklad 53: $a)\frac{79}{15}$, $b)\frac{5}{6}$.

Příklad 54: $a)\frac{201}{4}$, $b)\frac{409}{20}$.

Příklad 55: 9π.

Příklad 56: 10π.

Příklad 57: $-\frac{16}{5}$.

Příklad 58: $a)y = 5x - \cos x + c$, $b)y = \mathrm{e}^{cx}$, $c)y^2 = (x - 2)\,\mathrm{e}^x + c$.

Příklad 59: $a)y = 2x - \frac{x^2}{2} + 3$, $b)y = \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}$, $c) \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2\sin x}$.

Příklad 60: $a)y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + c\,\mathrm{e}^{-3x}$, $b)y = \frac{c}{\cos x} - \frac{\cos x}{2}$,
$c)y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + c\right)\mathrm{e}^{x^3}$, $d)y = (\sin x + c)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Příklad 61: $a)y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}$, $b)y = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2x\,\mathrm{e}^{-2x}$, $c)y = c_1\,\mathrm{e}^{2x}\cos(5x) + c_2\,\mathrm{e}^{2x}\sin(5x)$.

Příklad 62: $a)y = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$,
$b)y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^3 - 6x$,
$c)y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + 2x^2 - \frac{x}{3} - 1$.

Příklad 63: $a)y = c_1\,\mathrm{e}^{4x} + c_2x\,\mathrm{e}^{4x} + 2$,
$b)y = c_1\,\mathrm{e}^{4x} + c_2x\,\mathrm{e}^{4x} + 3x + \frac{3}{16}$,
$c)y = c_1\,\mathrm{e}^{4x} + c_2x\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{16} + \frac{45}{128}$.

Příklad 64: Rovnice $y' = -k(y - 18{,}3)$, čas úmrtí cca 11:13.

Příklad 65: Rovnice $Q' = 1000 - \frac{Q}{50}$,
množství $Q(t) = 50000(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{50}})$,
koncentrace $c(t) = 50(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{50}})$.