Publikace vznikla v rámci projektu
Fondu rozvoje Masarykovy univerzity
(projekt MUNI/FR/0893/2019)
realizovaného v období 1/2020-12/2020

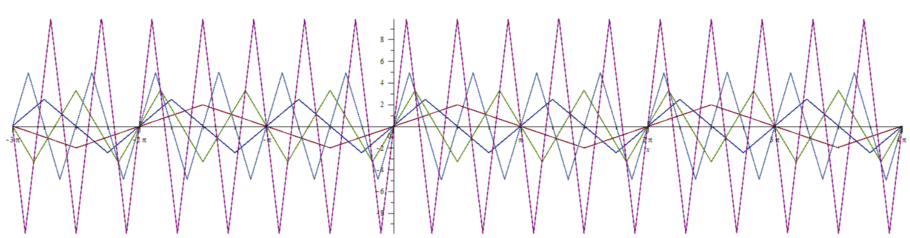
Problémy z matematické analýzy

Petr Hasil
hasil@mail.muni.cz

Jiřina Šišoláková
sisolakovaj@math.muni.cz

Michal Veselý
michal.vesely@mail.muni.cz

Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita



Úvod

Publikace Problémy z matematické analýzy vznikla z potřeby rozvíjet nadané studenty se zájmem o předměty matematické analýzy (např. M1100–M4100 nebo M1100F–M3100F na PřF MU či MB142 a MB152 na FI MU). Tento text zahrnuje řadu rozmanitých oblastí, na které při klasické hodinové dotaci nezbývá čas (máme na mysli netriviální rozvinutí zařazených témat). V reakci na to vznikla tato kniha, která přináší vedle jednoduchých úloh také problémy obtížnější, popř. zahrnující rozsáhlejší teorii než tu, která se v základních kurzech matematické analýzy standardně vyučuje. Pro lepší orientaci je publikace rozdělena do 10 oddílů (tématicky příbuzných kapitol) a celkem 50 kapitol. Řešení problémů zadaných v jednotlivých oddílech (resp. návody k jejich řešení) je možné nalézt v použité literatuře. Konkrétně se stačí omezit na zdroje přiřazené níže.

- I. SPOJITOST – [2, 7, 12]
- II. DIFERENCIÁLNÍ POČET – [7, 8, 12, 19]
- III. INTEGRÁLNÍ POČET – [10, 12, 14, 15, 19]
- IV. ŘADY – [5, 6, 8, 21]
- V. FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ – [3, 8, 10, 11]
- VI. ABSOLUTNĚ SPOJITÉ FUNKCE – [8, 10, 20]
- VII. DALŠÍ TŘÍDY FUNKCÍ – [2, 12, 16]
- VIII. KONVEXNÍ ANALÝZA – [4, 13]
- IX. TRANSCENDENCE VÝZNAMNÝCH ČÍSEL – [17]
- X. DALŠÍ TÉMATA – [7, 8, 12]

U čtenáře se předpokládá znalost alespoň jednoho kurzu matematické analýzy (např. MB142 nebo MB152); k plnému porozumění (k řešení náročnějších problémů ve většině částí) je však třeba znalost látky v rozsahu všech předmětů M1100–M4100. Zájemci zde naleznou partie rozšiřující běžně probíranou látku. Tato kniha nemá za cíl zahrnout řešení předkládaných problémů – s výjimkou jistých důkazů, které jsou (autory považované za) zajímavé (resp. návodné pro řešení dalších problémů) nebo které jsou obvykle považovány za příliš náročné pro studenty. V každé kapitole na nutnou teoretickou pasáž (částečně prohlubující základní látku) navazují úlohy lehčího a posléze těžšího rázu. Výjimkou pak nejsou problémy propojující více různých kapitol i oddílů.

Každý čtenář, který naváže na základní kurzy matematické analýzy touto knihou a zvládne její problematiku, dosáhne nadstandardní úrovně znalostí, čímž splní přání autorů.

Tato publikace vznikla v rámci projektu MUNI/FR/0893/2019 Fondu rozvoje Masarykovy univerzity.

V Brně dne 22. 12. 2020 Autoři

Obsah

I. SPOJITOST

Kapitola 1

POLOSPOJITÉ FUNKCE

Tuto kapitolu věnujeme jedné z důležitých vlastností reálných funkcí, a to tzv. *polospojitosti*. Rozlišujeme jednak funkce polospojité v bodě a dále polospojité na množině. Oba dva pojmy nyní zavedeme a budeme s nimi dále pracovat. Dle očekávání se nejedná o vlastnosti tak silné, jako je přímo spojitost funkce.

Definice 1 *Nechť funkce f je definovaná na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $c \in (a, b)$. Pokud je splněno*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\,(\forall x \in (c - \delta, c + \delta))\,(f(c) - \varepsilon < f(x))\,,$$

pak funkci f označujeme jako **polospojitou zdola v bodě** *c.*

Analogicky zavádíme:

Definice 2 *Nechť funkce f je definovaná na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $c \in (a, b)$. Pokud je*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in (c - \delta, c + \delta))(f(c) + \varepsilon > f(x)),$$

pak funkci f nazýváme **polospojitou shora v bodě** *c.*

Poznámka 1 *Zřejmě funkce f, která je zdola i shora polospojitá v c, je v tomto bodě spojitá (a pochopitelně naopak).*

Poznámka 2 *Funkce f je očividně zdola polospojitá v c, právě když je funkce $-f$ shora polospojitá v c.*

Problém 1 *Dokažte následující tvrzení. Funkce f je zdola polospojitá v bodě c právě tehdy, když*

$$\liminf_{x \to c} f(x) \geq f(c),$$

resp. shora polospojitá v bodě c právě tehdy, když

$$\limsup_{x\to c} f(x) \le f(c).$$

Definice 3 *Je-li funkce f polospojitá zdola v každém bodě intervalu (a, b), pak ji nazýváme* **polospojitou zdola na intervalu** (a, b).

Zcela analogicky:

Definice 4 *Je-li funkce f polospojitá shora v každém bodě intervalu (a, b), pak ji nazýváme* **polospojitou shora na intervalu** (a, b).

Následující problémy jsou spojené s polospojitostí funkce v bodě, resp. na intervalu.

Problém 2 *Formulujte definici funkce polospojité zdola v bodě c zleva, resp. zprava.*

Problém 3 *Vyšetřete polospojitost součtu, součinu a kompozice dvou funkcí.*

Definice 5 *Funkci χ definovanou na $\mathbb{R}$ tak, že*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1 & \textit{pro } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazýváme Dirichletovou funkcí.

Definice 6 *Funkci ζ definovanou na $\mathbb{R}$ tak, že*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,; \\ \frac{1}{q} & \textit{pro } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Z},\ \textit{kde}\, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \textit{ a } q \in \mathbb{N} \textit{ jsou nesoudělná}, \end{cases}$$

nazýváme Riemannovou funkcí.

Problém 4 *Uvažujte Dirichletovu funkci χ a Riemannovu funkci ζ. Prostudujte polospojitost těchto dvou funkcí.*

Definice 7 *Nechť $N \subseteq \mathbb{R}$. Funkci χ_N definovanou na $\mathbb{R}$ tak, že*

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \in N; \\ 1 & \textit{pro } x \notin N, \end{cases}$$

nazýváme charakteristickou funkcí množiny N.

Problém 5 *Za jaké podmínky je charakteristická funkce množiny $N \subseteq \mathbb{R}$ polospojitá zdola, resp. shora?*

Problém 6 *Za jaké podmínky je funkce, která nabývá konečně mnoha hodnot, polospojitá?*

Problém 7 *Uveďte příklad funkce f polospojité zdola na $\mathbb{R}$, která má množinu bodů nespojitosti hustou v $\mathbb{R}$; jinak řečeno, uvážíte-li všechny otevřené intervaly, v každém z nich je obsažen aspoň jeden bod nespojitosti funkce f.*

Definice 8 *Pro reálnou funkci f definovanou na okolí bodu $z \in \mathbb{R}$ nazýváme* **oscilací funkce** *f v bodě z výraz*

$$osc_f(z) = \inf_{\delta>0} \sup_{t_1,t_2 \in (z-\delta, z+\delta)} |f(t_1) - f(t_2)| . \tag{1.1}$$

Dále (také pro reálnou funkci f definovanou v okolí bodu $z \in \mathbb{R}$) klademe

$$\limsup_{x \to z} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{t \in (z-\delta, z+\delta)} f(t),$$

resp.

$$\liminf_{x \to z} f(x) = -\limsup_{x \to z}(-f(x)).$$

Problém 8 *Uvažujte libovolnou funkci f, která je ohraničená na $\mathbb{R}$. Dokažte, že pak osc_f, $\limsup f$ a $\liminf f$ jsou polospojité funkce na $\mathbb{R}$.*

Problém 9 *Pro funkci f definovanou na intervalu (a, b) dokažte ekvivalenci těchto podmínek:*

(i) *f je zdola polospojitá na (a, b);*

(ii) *množina*
$$f^{-1}((c, \infty)) = \{z \in (a, b);\ f(z) > c\}$$
je otevřená pro každé $c \in \mathbb{R}$;

(iii) *množina*
$$f^{-1}((-\infty, c]) = \{z \in (a, b);\ f(z) \le c\}$$
je uzavřená pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Vyslovte odpovídající tvrzení pro funkce spojité.

Problém 10 *S použitím tvrzení z Problému 9 dokažte, že pokud jsou funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$ na intervalu (a, b) spojité, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ pro $x \in (a, b)$, $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \to f$ pro $n \to \infty$ na (a, b), potom funkce f je zdola polospojitá na (a, b).*

Opačná implikace v tvrzení obsaženém v Problému 10 neplatí obecně. Je potřeba doplnit jistý předpoklad – viz následující tvrzení.

Věta 1 *Nechť je funkce f na intervalu (a, b) zdola polospojitá a zdola ohraničená. Pak existuje neklesající posloupnost funkcí $\{f_n\}$ spojitých na (a, b) takových, že $f_n \to f$ pro $n \to \infty$ na (a, b).*

Problém 11 *Dokažte Větu 1. Nápověda: Vezměte*

$$f_n(x) = \inf_{z \in (a,b)} f(z) + n|z - x|, \qquad x \in (a, b),\ n \in \mathbb{N}.$$

Problém 12 *Zvažte nutnost předpokladu ohraničenosti zdola funkce f ve Větě 1. Jak by znělo toto tvrzení pro funkci polospojitou shora?*

Věta 2 *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) polospojitá zdola. Pak je funkce f zdola ohraničená na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.*

Problém 13 *Dokažte Větu 2. Nápověda: Můžete použít důkaz sporem a Bolzanovu–Weierstrassovu větu o existenci hromadného bodu ohraničené posloupnosti, popř. lze vyjít z důkazu obdobné věty pro spojité funkce.*

Problém 14 *Vyslovte odpovídající větu k Větě 2 pro funkci f polospojitou shora na intervalu (a, b).*

Věta 3 *Nechť g a h jsou ohraničené funkce na (a, b). Nechť g je shora polospojitá a nechť h je zdola polospojitá. Je-li $g(x) \le h(x)$, $x \in (a, b)$, pak existuje spojitá funkce f na (a, b), pro kterou platí*

$$g(x) \le f(x) \le h(x), \qquad x \in (a, b).$$

Problém 15 *Dokažte Větu 3.*

Problém 16 *Dokažte, že polospojité funkce mají hustou množinu bodů spojitosti. (Viz také Problém 252.)*

Kapitola 2

SILNÁ A SLABÁ SPOJITOST

Vedle základní vlastnosti funkce, jako je spojitost v bodě, resp. na množině, můžeme obdobně zkoumat další druhy spojitosti. V této kapitole si všimneme pojmů silná a slabá spojitost (poté bude následovat aproximativní spojitost a symetrická spojitost).

2.1 Silná spojitost

Definice 9 *O funkci f, která je definovaná na nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, řekneme, že je* **silně spojitá v bodě** x_0*, je-li splněno:*

$$(\exists \delta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Definice 10 *Nechť funkce f je definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f je* **silně spojitá na** I*, jestliže je silně spojitá v každém bodě tohoto intervalu.*

Problém 17 *Obdobným způsobem jako v Definici 9 lze zavést silnou spojitost zleva a silnou spojitost zprava. Definujte tyto pojmy explicitně.*

Poznámka 3 *Podotkněme, že definice silně spojité funkce „vzešla“ z definice udávající „klasickou“ spojitost, a to záměnou pořadí dvou kvantifikátorů. Význam tohoto typu spojitosti je však zanedbatelný. Jedná se o skupinu funkcí, které odpovídají funkcím konstantním (viz níže).*

Problém 18 *Dokažte, že funkce f je silně spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když je v jistém okolí tohoto bodu konstantní.*

Problém 19 *Dokažte, že funkce f je silně spojitá na otevřeném intervalu I právě tehdy, když je na I konstantní.*

Nyní zobecníme pojem silné spojitosti pro obecné metrické prostory.

Definice 11 *Nechť (M, ϱ) a (N, σ) jsou metrické prostory. Nechť zobrazení $f : M \to N$ je dané. Řekneme, že f je* **silně spojité***, pokud $f(\overline{A}) \subseteq f(A)$ pro každou množinu $A \subseteq M$, kde $\overline{A}$ je uzávěr množiny A.*

Problém 20 *Nechť (M, ϱ) a (N, σ) jsou metrické prostory. Ukažte, že každé silně spojité zobrazení $f : M \to N$ je spojité.*

Problém 21 *Nechť (M, ϱ) a (N, σ) jsou metrické prostory. Dokažte, že jsou ekvivalentní následující výroky:*

(i) *zobrazení $f : M \to N$ je silně spojité;*

(ii) *platí $f(\overline{A}) = f(A)$ pro každou množinu $A \subseteq M$;*

(iii) *množina $f^{-1}(A)$ je otevřená pro každou množinu $A \subseteq N$;*

(iv) *množina $f^{-1}(A)$ je uzavřená pro každou množinu $A \subseteq N$;*

(v) *množina $f^{-1}(A)$ je obojetná pro každou množinu $A \subseteq N$.*

Věta 4 *Nechť (M, ϱ) a (N, σ) jsou metrické prostory. Nechť $f : M \to N$ je silně spojité zobrazení a nechť $A \subseteq M$ je neprázdná souvislá množina. Pak je množina $f(A)$ jednoprvková.*

Problém 22 *Dokažte Větu 4.*

Problém 23 *Udejte příklad zobrazení, které není silně spojité, ale zobrazuje každou neprázdnou souvislou množinu na jednoprvkovou množinu.*

2.2 Slabá spojitost

Nejprve doplňme, že množinou míry nula budeme nadále rozumět množinu nulové Lebesgueovy míry (srovnej s Definicí 66).

Definice 12 *O funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ řekneme, že je* **slabě spojitá***, je-li množina bodů nespojitosti funkce f míry nula.*

Problém 24 *Dokažte ekvivalentnost těchto podmínek:*

(i) *funkce f je slabě spojitá;*

(ii) *pro otevřenou množinu* $P \subset \mathbb{R}$ *existují otevřená množina* O *a množina* N *nulové míry tak, že platí*

$$f^{-1}(P) = O \cup N;$$

(iii) *pro uzavřenou množinu* $Q \subset \mathbb{R}$ *existují uzavřená množina* U *a množina* N *nulové míry tak, že platí*

$$f^{-1}(Q) = U \setminus N.$$

Problém 25 *Vyšetřete, zda je součet slabě spojitých funkcí též slabě spojitá funkce.*

Problém 26 *Je součin slabě spojitých funkcí funkce slabě spojitá?*

Problém 27 *Zjistěte, zda je kompozice slabě spojitých funkcí také slabě spojitá funkce.*

Problém 28 *Ukažte, že konvoluce (viz Kapitola 12) slabě spojitých funkcí nemusí být funkce slabě spojitá.*

Problém 29 *Dokažte, že konvoluce spojité a slabě spojité funkce je funkce slabě spojitá.*

Věta 5 *Nechť* g *je slabě spojitá funkce a* h *je slabě spojitá funkce s vlastností, že*

$$\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(h(A)) > 0,$$

kde μ *je Lebesgueova míra. Potom je konvoluce* g *a* h *slabě spojitá funkce.*

Problém 30 *Dokažte Větu 5.*

Kapitola 3

APROXIMATIVNÍ SPOJITOST

Předtím, než se podíváme na další typ spojitosti – tzv. aproximativní spojitost, je potřeba připomenout související užité pojmy.

Definice 13 *Nechť je množina $L \subseteq \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná a je daný bod $x_0 \in \mathbb{R}$. Položme*

$$D(L, x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mu\left(L \cap [x_0 - h, x_0 + h]\right)}{2h}, \tag{3.1}$$

kde μ je Lebesgueova míra. **Hustotu množiny** *L v bodě x_0 definujeme jako $D(L, x_0)$, jestliže limita (3.1) existuje. Bod x_0 nazveme* **bodem hustoty** *množiny L, jestliže $D(L, x_0) = 1$.*

Poznámka 4 *Očividně je $0 \leq D(L, x_0) \leq 1$.*

Poznámka 5 *Je-li x_0 vnitřním bodem množiny L, pak je bodem hustoty množiny L.*

Poznámka 6 *Jestliže je bod x_0 bodem hustoty množiny L a $O = \mathbb{R} \setminus L$, pak $D(O, x_0) = 0$. V tomto případě nazveme bod x_0* **bodem řídkosti** *množiny O.*

Problém 31 *Ukažte na příkladu, že limita (3.1) nemusí existovat.*

Problém 32 *Dokažte tvrzení: Pro lebesgueovsky měřitelnou množinu $L \subseteq \mathbb{R}$ je bod $x_0 \in \mathbb{R}$ bodem hustoty množiny L právě tehdy, když*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(L \cap (x_0, x_0 + h))}{h} = 1.$$

Věta 6 (Lebesgueova věta o hustotě) *Pro lebesgueovsky měřitelnou množinu $L \subseteq \mathbb{R}$ jsou skoro všechny body z L body hustoty množiny L. Zejména, jestliže je $\mu(L) > 0$, pak existuje bod x_0 z množiny L takový, že $D(L, x_0) = 1$.*

Problém 33 *Dokažte Lebesgueovu větu o hustotě.*

Problém 34 *Uvažujme množinu N konečné míry a definujme*

$$\gamma_N : x \mapsto \mu(N \cap (-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že platí:

(i) *funkce γ_N je neklesající na $\mathbb{R}$ a absolutně spojitá (viz Definice 71) na každém uzavřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$;*

(ii) *pokud je $\mu(N) > 0$, pak γ_N není konvexní na $\mathbb{R}$ (viz Definice 91);*

(iii) *bod $x_0 \in \mathbb{R}$ je bodem hustoty množiny N právě tehdy, když*

$$\gamma_N'(x_0) = 1.$$

Definice 14 *Nechť je funkce f definovaná na jistém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak ji nazýváme* **aproximativně spojitou v bodě** *x_0, jestliže existuje množina $N \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $D(N, x_0) = 1$ a*

$$\lim_{x \to x_0, x \in N} f(x) = f(x_0).$$

Definice 15 *Funkce f je* **aproximativně spojitá na intervalu** *(a, b), jestliže je aproximativně spojitá v každém bodě intervalu (a, b).*

Věta 7 (Denjoyova věta) *Je-li funkce f na intervalu $[a, b]$ skoro všude konečná, pak je f měřitelná právě tehdy, když je ve skoro všech bodech intervalu $[a, b]$ aproximativně spojitá.*

Problém 35 *Dokažte, že je-li funkce f spojitá v bodě x_0, pak je v tomto bodě také aproximativně spojitá.*

Problém 36 *Uvažujte funkci*

$$f(x) := \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \qquad f(0) := 0.$$

Dokažte, že funkce f není aproximativně spojitá v bodě 0.

Problém 37 *Dokažte, že k funkci f z Problému 36 existuje funkce primitivní, přestože f není aproximativně spojitá.*

Problém 38 *Uvažujte systém $\mathcal{K}$ všech měřitelných množin $K \subseteq \mathbb{R}$ takových, že pro každý bod $x \in K$ platí, že je bodem hustoty množiny K. Uvažujte libovolnou funkci f, která je konečná na $\mathbb{R}$. Dokažte, že funkce f je aproximativně spojitá právě tehdy, když pro každé $c \in \mathbb{R}$ je*

$$\{x \in \mathbb{R};\ f(x) > c\} \in \mathcal{K}, \qquad \{x \in \mathbb{R};\ f(x) < c\} \in \mathcal{K}.$$

Problém 39 *Uvažujte systém $\mathcal{K}$ měřitelných množin uvažovaný v Problému 38. Vyšetřete uzavřenost na jednotlivé množinové operace tohoto systému.*

Problém 40 *Nechť g, h jsou funkce aproximativně spojité na $\mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{R}$. Dokažte, že funkce $g + h$, $k \cdot g$ a $g \cdot h$ jsou aproximativně spojité na $\mathbb{R}$.*

Problém 41 *Uvažte stejnoměrně konvergentní posloupnost aproximativně spojitých funkcí na intervalu (a, b) a rozhodněte, jestli je její limita aproximativně spojitá funkce.*

Věta 8 *Ke každé ohraničené aproximativně spojité funkci existuje funkce primitivní.*

Problém 42 *Dokažte Větu 8 tak, že pro funkci ohraničenou a aproximativně spojitou ukážete, že je rovna derivaci svého neurčitého Lebesgueova integrálu.*

Kapitola 4

SYMETRICKÁ SPOJITOST

Nyní se podíváme na další významný typ spojitosti – tzv. symetrickou spojitost. Samotný pojem představuje analytický problém, kdy jsou zavedeny nové definice a následně se vyšetřuje, zda je možné standardní vlastnosti přenést i na tyto definice.

Definice 16 *O funkci f, která je definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, řekneme, že je* **symetricky spojitá v bodě** x_0*, pokud*

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0.$$

Je-li funkce f symetricky spojitá v každém bodě intervalu (a, b), pak řekneme, že je **symetricky spojitá na intervalu** (a, b). *Funkci f nazýváme* **symetricky spojitou na uzavřeném intervalu** $[a, b]$, *je-li symetricky spojitá na intervalu (a, b), spojitá zleva v bodě b a spojitá zprava v bodě a.*

Problém 43 *Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Případnou neplatnost implikací ukažte na protipříkladu.*

(i) *Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, pak je f symetricky spojitá v tomto bodě.*

(ii) *Je-li funkce f symetricky spojitá v bodě x_0, pak je f spojitá v tomto bodě.*

(iii) *Jsou-li funkce g a h symetricky spojité v bodě x_0 a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak je lineární kombinace $\alpha g + \beta h$ symetricky spojitá funkce v bodě x_0.*

(iv) *Jsou-li funkce g a h symetricky spojité v bodě x_0, pak je součin $g \cdot h$ symetricky spojitá funkce v bodě x_0.*

(v) *Jsou-li funkce g a h symetricky spojité v bodě x_0, pak je $\max\{g, h\}$ symetricky spojitá funkce v bodě x_0.*

(vi) *Je-li funkce g symetricky spojitá v bodě x_0 a h symetricky spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je funkce $h \circ g$ symetricky spojitá funkce v bodě x_0.*

Problém 44 *Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Případnou neplatnost implikací ukažte na protipříkladu.*

(i) *Jsou-li f_n spojité funkce v bodě x_0 a $f_n(x_0) \to f(x_0)$ pro $n \to \infty$, pak je f symetricky spojitá funkce v bodě x_0.*

(ii) *Jsou-li funkce f_n symetricky spojité na intervalu (a, b) pro $n \in \mathbb{N}$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu (a, b), pak je funkce f symetricky spojitá na intervalu (a, b).*

(iii) *Je-li funkce symetricky spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je tato funkce ohraničená na $[a, b]$.*

(iv) *Je-li funkce symetricky spojitá a ohraničená na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak tato funkce nabývá na $[a, b]$ svého maxima.*

(v) *Je-li f symetricky spojitá funkce na intervalu (a, b), pak je funkce f darbouxovská na intervalu (a, b) (viz Kapitola 36).*

(vi) *Je-li funkce f symetricky spojitá v 0 a je-li řešením funkcionální rovnice $F(x + y) = F(x) + F(y)$ na $\mathbb{R}$, potom je f lineární na $\mathbb{R}$.*

Věta 9 *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť f je funkce symetricky spojitá na J. Pak platí, že existuje hustá podmnožina intervalu J taková, že funkce f je spojitá v každém bodě této podmnožiny.*

Problém 45 *Dokažte Větu 9.*

Věta 10 *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť je na něm funkce f ohraničená a symetricky spojitá. Pak oscilace funkce f zavedená v* (1.1) *je funkce symetricky spojitá na intervalu J.*

Problém 46 *Dokažte Větu 10.*

Věta 11 *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a f je funkce symetricky spojitá na J. Pak platí, že funkce f je skoro všude spojitá na intervalu J.*

Problém 47 *Pomocí Věty 10 dokažte Větu 11, která je zesílením Věty 9.*

Poznámka 7 *Z Věty 11 plyne, že každá symetricky spojitá funkce je měřitelná.*

Problém 48 *Ukažte, že ohraničená symetricky spojitá funkce na* $[a, b]$ *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$.

Problém 49 *Ukažte, že na* $\mathbb{R}$ *existuje symetricky spojitá funkce, pro kterou platí, že je nespojitá v nespočetně mnoha bodech.*

Problém 50 *Uveďte příklad funkce* h *takové, že množina* C_h^s*, která je pro libovolnou funkci* f *zavedena jako*

$$C_f^s := \{x \in (a, b);\ f \text{ je symetricky spojitá v } x\},$$

není lebesgueovsky měřitelná.

Problém 51 *Dokažte, že pro lebesgueovsky měřitelnou funkci* f *je množina* C_f^s *lebesgueovsky měřitelná.*

Kapitola 5

BODY NESPOJITOSTI OBECNÝCH FUNKCÍ

Nejprve připomeňme známou definici.

Definice 17 *Nechť je dána funkce f.*

(i) *Nechť funkce f není spojitá v bodě x_0 a nechť existuje vlastní limita*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

tj. $f(x_0) \neq L$. Potom se bod x_0 nazývá **bodem odstranitelné nespojitosti** *funkce f.*

(ii) *Jestliže vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje, potom se bod x_0 nazývá* **bodem neodstranitelné nespojitosti** *funkce f. V tomto případě mohou nastat dvě možnosti:*

(a) *Limita zleva*

$$f\left(x_0^-\right) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

a limita zprava

$$f\left(x_0^+\right) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

existují a jsou vlastní, ovšem nerovnají se. Pak nazýváme bod x_0 **bodem nespojitosti prvního druhu** *a hodnotu $f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)$ nazýváme* **skokem** *funkce f v bodě x_0.*

(b) *Pokud některá z jednostranných limit*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

neexistuje nebo je nevlastní, potom nazýváme bod x_0 **bodem nespojitosti druhého druhu**.

Věta 12 *Pro otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a libovolnou funkci $h : I \to \mathbb{R}$ je množina bodů nespojitosti prvního druhu funkce h nejvýše spočetná.*

Problém 52 *Dokažte Větu 12.*

Řešení. Nejprve zavedeme dále používané množiny. Označme M množinu všech bodů nespojitosti prvního druhu funkce h na intervalu I a

$$M^+ := \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0+} h(x) \neq h(x_0) \right\},$$

$$M^- := \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0-} h(x) \neq h(x_0) \right\},$$

$$M_1^+ := \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0+} h(x) > h(x_0) \right\},$$

$$M_2^+ := \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0+} h(x) < h(x_0) \right\}.$$

Je zřejmé, že $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$. Dále uspořádejme do prosté posloupnosti $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ všechna racionální čísla, tj. $\mathbb{Q} = \{q_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Nechť q je zobrazení, které každému $x_0 \in M_1^+$ přiřazuje racionální číslo z intervalu

$$\left(h(x_0), \lim_{x \to x_0+} h(x) \right)$$

s nejmenším indexem v posloupnosti $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. To znamená, že $q(x_0) = q_j$ právě tehdy, když

$$q_j \in \left(h(x_0), \lim_{x \to x_0+} h(x) \right)$$

a

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}\} \cap \left(h(x_0), \lim_{x \to x_0+} h(x) \right) = \emptyset.$$

Položme

$$q^{-1}(t) := \left\{ x_0 \in M_1^+;\ q(x_0) = t \right\}.$$

Zejména

$$M_1^+ = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} q^{-1}(t). \tag{5.1}$$

Chceme ukázat, že pro $t \in \mathbb{Q}$ je každá množina $q^{-1}(t)$ nejvýše spočetná, čímž dokážeme (uvážením (5.1)) tvrzení věty pro množinu M_1^+.

Zvolme $t \in \mathbb{Q}$ libovolně. Vezmeme-li do úvahy definici množiny M_1^+ i zobrazení q, pro každé $x_0 \in q^{-1}(t)$ existuje $\delta(x_0) > 0$ takové, že

$$h(y) > q\,(x_0) = t, \qquad y \in (x_0, x_0 + \delta(x_0))\,. \tag{5.2}$$

Pokud existují body $x_1, x_2 \in q^{-1}(t)$ s vlastností, že

$$x_1 < x_2, \qquad q(x_1) = q(x_2) = t,$$

potom z (5.2) plyne

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Pro $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$ se totiž snadno přesvědčíme o vyplývajícím sporu

$$t = q(x_1) < h(x_2) < q(x_2) = t.$$

Proto je pro $x_0 \in q^{-1}(t)$ systém intervalů $(x_0, x_0 + \delta(x_0))$ disjunktní. Odtud máme, že množina $q^{-1}(t)$ je pro každé $t \in \mathbb{Q}$ nejvýše spočetná.

Zcela analogicky je možné dokázat, že je nejvýše spočetná i množina M_2^+, kterou můžeme zapsat jako

$$M_2^+ = \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0+} -h(x) > -h(x_0) \right\}.$$

Jestliže pak množinu M^- uvážíme jako sjednocení $M_1^- \cup M_2^-$, kde

$$M_1^- := \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0-} h(x) > h(x_0) \right\},$$

$$M_2^- := \left\{ x_0 \in I;\ \lim_{x \to x_0-} h(x) < h(x_0) \right\},$$

lze podobně dokázat, že je taktéž nejvýše spočetná. Množina M je sjednocením dvou nejvýše spočetných množin, a proto je nejvýše spočetná. $\square$

Věta 13 *Je-li $A \subset \mathbb{R}$ libovolná spočetná množina, potom existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že právě množina A je pro ni množinou bodů nespojitosti prvního druhu.*

Problém 53 *Dokažte Větu 13.*

II. DIFERENCIÁLNÍ POČET

Kapitola 6

ZOBECNĚNÍ ZÁKLADNÍCH VĚT DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

Definice 18 *Bod* $z \in \mathbb{R}$ *je nulovým bodem funkce* f *násobnosti* $p \in \mathbb{N}$*, pokud*

$$f(z) = f'(z) = \cdots = f^{(p-1)}(z) = 0$$

a $f^{(p)}(z) \neq 0$*.*

Začneme zobecněním Rolleovy věty.

Věta 14 *Mějte funkci* f *spojitou na intervalu* $[a, b]$ *takovou, že na* (a, b) *existuje* $f^{(n)}$ *pro dané* $n \in \mathbb{N}$*. Nechť dále* $x_1, x_2, \ldots, x_j \in \mathbb{R}$ *splňující*

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_j \leq b$$

jsou nulové body funkce f *s násobnostmi* $k_1, k_2, \ldots, k_j$*, pro které platí*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_j \geq n + 1.$$

Potom existuje bod $\nu \in (a, b)$ *takový, že* $f^{(n)}(\nu) = 0$*.*

Problém 54 *Dokažte Větu 14.*

Pokračujme zobecněními Lagrangeovy věty.

Věta 15 *Mějte libovolnou spočetnou množinu* S *a funkci* f*, která je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a její jednostranná derivace* f'_+ *existuje (jako vlastní nebo nevlastní) na množině* $U = [a, b) \setminus S$*. Potom platí*

$$m\,(b - a) < f(b) - f(a) < M(b - a),$$

kde

$$m := \inf_{x \in U} f'_+(x), \qquad M := \sup_{x \in U} f'_+(x),$$

s výjimkou situace, kdy je funkce f na $[a, b]$ lineární.

Problém 55 *Dokažte Větu 15.*

Věta 16 *Mějte konečnou množinu N a funkci f, která je spojitá na intervalu $[a, b]$ a taková, že existuje její derivace f' na množině $(a, b) \smallsetminus N$. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(c)| \, (b - a).$$

Problém 56 *Dokažte Větu 16.*

Dále připomeňme jedno užitečné tvrzení.

Věta 17 *Je-li p polynom stupně n, který má pouze reálné kořeny, potom polynom $p^{(j)}$ pro libovolné $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ má jen reálné kořeny. Navíc, pokud všechny kořeny polynomu p náleží do intervalu $[a, b]$, potom v tomto intervalu jsou rovněž všechny kořeny polynomu $p^{(j)}$.*

Problém 57 *Dokažte, že všechny kořeny polynomu definovaného jako*

$$p : x \mapsto \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\left(x^2 - 1 \right)^n \right)$$

leží v intervalu $[-1, 1]$. Uvažte Větu 17.

Poznámka 8 *Polynom p definovaný v Problému 57 je tzv. Legendreův polynom n-tého stupně (až na multiplikativní konstantu).*

Věta 18 *Nechť O je spočetná množina. Mějte funkci f spojitou na intervalu $[a, b]$ takovou, že f'_+ existuje (jako vlastní či nevlastní) na $[a, b) \smallsetminus O$. Potom funkce f je neklesající na intervalu $[a, b]$, pokud $f'_+(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b) \smallsetminus O$.*

Problém 58 *Dokažte, že platí Věta 18.*

Problém 59 *Formulujte pro nerostoucí funkce analogické tvrzení k tvrzení uvedenému ve Větě 18.*

Nyní doplňme Větu 18.

Věta 19 *Nechť platí předpoklady uvedené ve Větě 18. Dále nechť je na husté podmnožině $[a, b]$ splněno $f'_+ > 0$. Potom je funkce f na intervalu $[a, b]$ rostoucí.*

Problém 60 *Dokažte Větu 19.*

Problém 61 *Rozhodněte, zda je možné tvrzení Věty 19 obrátit.*

Problém 62 *Nechť S je spočetná množina. Použijte Větu 19 k dokázání neexistence spojité funkce h na intervalu $[0,1]$ takové, že pro $x \in [0,1) \setminus S$ platí $h'_+(x) = +\infty$.*

Kapitola 7

FUNKCE S DERIVACEMI VŠECH ŘÁDŮ

Nejprve zavedeme třídu funkcí φ^{∞}.

Definice 19 *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce, která je definovaná v okolí tohoto bodu a má v x_0 derivace všech řádů, což zapisujeme jako $f \in \varphi^{\infty}(x_0)$. Je-li M otevřená množina, označujeme jako $\varphi^{\infty}(M)$ množinu všech funkcí, které mají v každém jejím bodě derivace všech řádů.*

Definice 20 *Nechť $f \in \varphi^{\infty}(x_0)$.* **Taylorova řada** *funkce f v bodě x_0 je definována jako*

$$T^f_{x_0}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Problém 63 *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Uveďte příklad identicky nenulové funkce h takové, že $h \in \varphi^{\infty}(x_0)$ a současně*

$$T^h_{x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} (x - x_0)^n = 0$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Problém 64 *Uvažujte funkci*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} \cos\left(n^2 x\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že Taylorova řada T^h_0 funkce h v bodě $x_0 = 0$ konverguje pouze v jednom bodě.

Problém 65 *Najděte funkci h takovou, že $h \in \varphi^\infty(x_0)$ a*

$$h \notin \varphi^\infty(\mathcal{O}(x_0, \delta)), \qquad \delta > 0,$$

kde $\mathcal{O}(x_0, \delta)$ je okolí bodu x_0 o poloměru δ.

Problém 66 *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$. Najděte funkci h takovou, že*

$$h \in \varphi^\infty((-1, 1))$$

a

(i)
$$h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(n-1)}(0) = 0, \qquad h^{(n)}(0) = 1;$$

(ii)
$$\left|h^{(k)}(x)\right| < \varepsilon, \qquad x \in (-1, 1),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\};$$

(iii)
$$\left|h^{(k)}(0)\right| > 0, \qquad k \geq n+1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Problém 67 *Uvažte libovolnou posloupnost $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reálných čísel. Dokažte, že existuje funkce $f \in \varphi^\infty(0)$ taková, že*

$$f^{(n)}(0) = r_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Problém 68 *Uveďte příklad funkce $f \in \varphi^\infty(0)$ takové, že*

$$T_0^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^n)^n}{n!}\, x^n.$$

Viz také Problém 67.

Nyní zavedeme vzdálenost prvků z množiny $\varphi^\infty([0, 1])$.

Definice 21 *Nechť $f, g \in \varphi^\infty([0, 1])$, přičemž v krajních bodech jsou uvažovány příslušné jednostranné derivace. Nechť dále*

$$\rho(f, g) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{m_i(f-g)}{1 + m_i(f-g)},$$

kde

$$m_i(h) = \max_{x \in [0,1]} \left|h^{(i)}(x)\right|, \qquad i \in \{0, 1, \ldots\}$$

pro každou funkci $h \in \varphi^\infty([0, 1])$.

Problém 69 *Ukažte, že je* $\varphi^\infty([0,1])$ *úplný metrický prostor s metrikou* ρ *(viz Definice 21).*

Definice 22 *Nechť* $t > 0$ *a* $L > 0$. *Jako* $\mathcal{M}(L,t)$ *označujeme množinu všech* $f \in \varphi^\infty([0,1])$, *pro která existuje* $x_0 \in [0,1]$ *s vlastností, že*

$$\left| f^{(n)}(x_0) \right| \leq L \cdot t^n, \qquad n \in \{0,1,\dots\}.$$

Věta 20 *Pro každé* $L > 0$ *a* $t > 0$ *je množina* $\mathcal{M}(L,t)$ *uzavřená v metrickém prostoru* $(\varphi^\infty([0,1]),\rho)$.

Problém 70 *Dokažte Větu 20.*

Věta 21 *Pro každé* $L > 0$ *a* $t > 0$ *je množina* $\varphi^\infty([0,1]) \setminus \mathcal{M}(L,t)$ *hustá v metrickém prostoru* $(\varphi^\infty([0,1]),\rho)$.

Problém 71 *Dokažte Větu 21.*

Kapitola 8

ANALYTICKÉ FUNKCE

Touto kapitolou navazujeme na Kapitolu 7. Zvláště budeme používat tam zavedené symboly a uvažovat reálné funkce jedné reálné proměnné.

Definice 23 *Funkci f nazýváme* **analytickou** *v bodě x_0, pokud:*

(i) $f \in \varphi^\infty(x_0)$*;*

(ii) *existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$T^f_{x_0}(x) = f(x)$$

pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Systém všech funkcí, které jsou analytické v bodě x_0, značíme symbolem $A(x_0)$. Dále pro otevřenou množinu M označujeme jako $A(M)$ systém všech funkcí, které jsou analytické v každém bodě této množiny M.

Je dobře známo, že

$$A(x_0) \subseteq \varphi^\infty(x_0).$$

Tato inkluze je ostrá, což je obsahem následujícího problému.

Problém 72 *Dokažte, že*

$$\varphi^\infty(x_0) \setminus A(x_0) \neq \emptyset.$$

Tj. uveďte příklad odpovídající funkce. (Viz Problém 81.)

Problém 73 *Uvažujte funkci g zadanou mocninnou řadou a poloměrem konvergence $R > 0$, tj.*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

pro $x \in (-R, R)$. Dokažte, že pak $g \in A(0)$ a pro $x \in (-R, R)$ platí

$$T_0^g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

a tedy $g \equiv T_0^g$ na intervalu $(-R, R)$.

Věta 22 (Bernsteinova věta) *Je-li funkce f nezáporná na intervalu I a pokud jsou všechny její derivace také nezáporné na tomto intervalu, potom $f \in A(I)$.*

Problém 74 *Dokažte Bernsteinovu větu. Nápověda: Využijte kupř. exponenciální funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$.*

Problém 75 *Ukažte, že pokud $g \in \varphi^\infty(\mathbb{R})$, pak je množina*

$$A_g := \{x \in \mathbb{R};\ g \text{ je analytická funkce v bodě } x\}$$

otevřená.

Problém 76 *Ukažte, že pokud $g \in A((a, b))$ a množina*

$$B = \{x \in (a, b);\ g(x) = 0\}$$

má v intervalu (a, b) hromadný bod, potom $g \equiv 0$ na intervalu (a, b).

Nyní se podíváme na obtížnější část studované teorie.

Problém 77 *Uvažujte $t > 0$ a funkci $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definována následujícím vztahem*

$$f_t(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{x^2 - t^2}}, & x \in (-t, t); \\ 0, & x \notin (-t, t). \end{cases}$$

Dokažte:

(i) *$f_t \in \varphi^\infty(\mathbb{R})$;*

(ii) *funkce f_t je analytická ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ až na $x = -t$ a $x = t$.*

Problém 78 *Uvažte prostou posloupnost všech racionálních čísel $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dále pro $t > 0$ uvažte množinu*

$$N(t) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n - t2^{-n-1}, a_n + t2^{-n-1}\right).$$

Ukažte, že množina $N(t)$ je otevřená a hustá množina v $\mathbb{R}$.

Problém 79 *Nechť* $t > 0$. *Uvažujte funkci* $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *z Problému 77 a množinu* $N(t)$ *z Problému 78. Podle Problému 78 je*

$$N(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n, \beta_n + \alpha_n),$$

přičemž $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *a intervaly* $(\beta_n - \alpha_n, \beta_n + \alpha_n)$ *jsou po dvou disjunktní. Dokažte nerovnost*

$$L_n := \sup\left\{\left|f_{\alpha_n}^{(i)}(x)\right|;\, i \in \{0,1,\dots,n\},\, x \in \mathbb{R}\right\} < \infty$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Problém 80 *Nechť* $t > 0$. *Uvažujte značení z Problému 79 a funkci*

$$g_t(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\alpha_n}(x - \beta_n)}{n^2 L_n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dokažte následující tvrzení:

(i) $g_t(x) > 0$, *právě když* $x \in N(t)$;

(ii) *funkce* g_t *není identicky nulová na žádném intervalu kladné délky;*

(iii) $g_t \in \varphi^{\infty}(\mathbb{R})$;

(iv) *Taylorova řada funkce* g_t *se středem v bodě* $x_0 \notin N(t)$ *je identicky nulová;*

(v) $g_t \in A(x_0)$, *právě když* $x_0 \in N(t)$.

Problém 81 *Pro liché přirozené číslo* $l > 1$ *položte*

$$h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(l^n x)}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že funkce h *náleží do* $\varphi^{\infty}(\mathbb{R})$, *ale není analytická v žádném bodě* $\mathbb{R}$.

Kapitola 9

DINIHO DERIVACE

Definice 24 *Nechť funkce g je definovaná v okolí bodu x_0. Klademe*

$$D^+g(x_0) := \limsup_{x\to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

$$D_+g(x_0) := \liminf_{x\to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

$$D^-g(x_0) := \limsup_{x\to x_0^-} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

$$D_-g(x_0) := \liminf_{x\to x_0^-} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Tyto hodnoty $D^+g(x_0)$, $D_+g(x_0)$, $D^-g(x_0)$ a $D_-g(x_0)$ se nazývají **Diniho derivace** *funkce g v bodě x_0.*

Poznámka 9 *Diniho derivace na intervalech se pak definují bod po bodu.*

Definice 25 *Nechť funkce g je definovaná v okolí bodu x_0. Klademe*

$$\underline{D}\, g(x_0) := \liminf_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

a

$$\overline{D}\, g(x_0) := \limsup_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Hovoří se o **dolní a horní derivaci** *funkce g v bodě x_0.*

Poznámka 10 *Zřejmě derivace $g'(x_0)$ existuje, právě když $\underline{D}\, g(x_0) = \overline{D}\, g(x_0)$.*

Poznámka 11 *Obecně platí*

$$\underline{D}\, g(x_0) = \min\{D_+g(x_0), D_-g(x_0)\}, \qquad \overline{D}\, g(x_0) = \max\{D^+g(x_0), D^-g(x_0)\}.$$

Problém 82 *Dokažte, že funkce g je spojitá v bodě x_0 zprava, pokud jsou čísla $D^+g(x_0)$ a $D_+g(x_0)$ konečná.*

Před následujícím problémem připomeňme jednu základní definici.

Definice 26 *Funkci $f : I \to \mathbb{R}$ nazýváme* **lipschitzovskou** *na intervalu I, pokud existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro všechna $t_1, t_2 \in I$ je*

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq L\,|t_2 - t_1|\,.$$

Problém 83 *Dokažte, že Diniho derivace D^+g, D_+g, D^-g a D_-g jsou ohraničené funkce na intervalu I, pokud je funkce g lipschitzovská na I.*

Problém 84 *Uvažujte libovolnou funkci $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Dokažte, že množina*

$$\{x \in (a,b);\; D^-g(x) < D_+g(x)\}$$

je nejvýše spočetná.

Problém 85 *Určete Diniho derivace pro Dirichletovu funkci (viz Definice 5).*

Problém 86 *Určete Diniho derivace pro Riemannovu funkci (viz Definice 6).*

Věta 23 (Rolleova věta pro Diniho derivace) *Uvažujte funkci g spojitou na intervalu $[a,b]$, pro kterou je $g(a) = g(b) = 0$.*

(i) *Jestliže neplatí, že na intervalu $[a,b]$ je $g \leq 0$, potom existuje nejméně jeden bod $\xi \in (a,b)$ takový, že pro Diniho derivace platí*

$$D^-g(\xi) \geq D_-g(\xi) \geq 0, \qquad D_+g(\xi) \leq D^+g(\xi) \leq 0.$$

Jestliže naopak platí, že na intervalu $[a,b]$ je $g \leq 0$, potom

$$D_+g(a) \leq D^+g(a) \leq 0, \qquad D^-g(b) \geq D_-g(b) \geq 0.$$

(ii) *Jestliže neplatí, že na intervalu $[a,b]$ je $g \geq 0$, potom existuje nejméně jeden bod $\xi \in (a,b)$ takový, že platí*

$$D_-g(\xi) \leq D^-g(\xi) \leq 0, \qquad D^+g(\xi) \geq D_+g(\xi) \geq 0.$$

Jestliže naopak platí, že na intervalu $[a,b]$ je $g \geq 0$, potom

$$D^+g(a) \geq D_+g(a) \geq 0, \qquad D_-g(b) \leq D^-g(b) \leq 0.$$

Problém 87 *Dokažte obě části Rolleovy věty pro Diniho derivace.*

Problém 88 *Předložte příklad, který ukazuje, že předpoklad spojitosti funkce g ve Větě 23 je nezbytný.*

Problém 89 *Větu 23 použijte k důkazu zobecnění Lagrangeovy věty v následujícím znění. Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje nejméně jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že*

$$D_- f(\xi) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq D^+ f(\xi)$$

nebo

$$D^- f(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq D_+ f(\xi).$$

Problém 90 *Dokažte, že pokud je funkce h spojitá na intervalu $[a, b]$ a na tomto intervalu je $D_- h \geq 0$, potom je funkce h na intervalu $[a, b]$ neklesající.*

Na závěr kapitoly uveďme pro Diniho derivace jeden velmi silný výsledek.

Věta 24 (Denjoyova–Youngova–Saksova věta) *Nechť g je libovolná funkce definovaná na intervalu I. Existuje množina $X \subset I$ nulové míry s vlastností, že pro každé $x_0 \in I \setminus X$ nastává právě jedna z možností:*

(i) *existuje vlastní derivace $g'(x_0)$;*

(ii)

$$D^+ g(x_0) = D_- g(x_0) \in \mathbb{R}, \qquad D^- g(x_0) = \infty, \qquad D_+ g(x_0) = -\infty;$$

(iii)

$$D^- g(x_0) = D_+ g(x_0) \in \mathbb{R}, \qquad D^+ g(x_0) = \infty, \qquad D_- g(x_0) = -\infty;$$

(iv)

$$D^+ g(x_0) = D^- g(x_0) = \infty, \qquad D_+ g(x_0) = D_- g(x_0) = -\infty.$$

Kapitola 10

SYMETRICKÁ A DRUHÁ SCHWARZOVA DERIVACE

10.1 Symetrická derivace

Definice 27 *Pro funkci f definovanou na intervalu (a,b) zavádíme* **symetrickou derivaci** *v bodě $x_0 \in (a,b)$ jako*

$$f^{(s)}(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

za předpokladu, že limita vpravo existuje (jako vlastní nebo nevlastní).

Problém 91 *Předložte důkaz toho, že pro symetrickou derivaci a symetrickou spojitost (viz Kapitola 4) neplatí Rolleova věta.*

Lemma 1 *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[t_1, t_2]$, pro niž na (t_1, t_2) existuje $f^{(s)}$ a $f(t_1) > f(t_2)$, pak existuje nespočetně mnoho takových bodů $x \in (t_1, t_2)$, že $f^s(x) \geq 0$.*

Problém 92 *Dokažte Lemma 1.*

Věta 25 *Mějte funkci f, která je spojitá na intervalu $[a,b]$ a pro niž*

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Nechť dále na (a,b) existuje symetrická derivace $f^{(s)}$. Pak existují též body c_1 a c_2 z intervalu (a,b) takové, že platí

$$f^{(s)}(c_1) \leq 0 \leq f^s(c_2).$$

Problém 93 *Pomocí Lemmatu 1 dokažte Větu 25.*

Problém 94 *Využijte Větu 25 k odvození verze Lagrangeovy věty pro symetrickou derivaci.*

Problém 95 *Mějte funkci h spojitou na intervalu (a, b), v němž má nezápornou symetrickou derivaci $h^{(s)}$. Dokažte, že potom je funkce h na (a, b) neklesající. Nezbytnost předpokladu spojitosti funkce h také dokažte.*

Problém 96 *Dokažte, že pro funkci h spojitou na intervalu (a, b), která má na tomto intervalu symetrickou derivaci, platí, že je na (a, b) lipschitzovská (viz Definice 26) právě tehdy, když $h^{(s)}$ je omezená funkce na intervalu (a, b).*

Problém 97 *Udejte příklad funkce f, pro kterou je $f^{(s)} \equiv 0$ na intervalu (a, b), ale která není na (a, b) konstantní. Zamyslete se nad tím, zda-li pro funkci f s těmito vlastnostmi existuje podinterval intervalu (a, b) takový, že f je na něm konstantní. Případně zvažte, co způsobí navíc přidaný předpoklad spojitosti funkce f.*

Podkapitolu zakončíme náročnějším tvrzením bez důkazu.

Věta 26 *Pokud $f^{(s)}$ existuje skoro všude na (a, b), pak f' také existuje skoro všude na (a, b).*

10.2 Druhá Schwarzova derivace

Definice 28 *Pro funkci f definovanou na intervalu (a, b) zavádíme* **druhou Schwarzovu derivaci** *v bodě $x_0 \in (a, b)$ jako limitu*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2},$$

pokud (jako vlastní nebo nevlastní) existuje. Druhá Schwarzova derivace funkce f v bodě x_0 se značí $f^{('')}(x_0)$.

Problém 98 *Dokažte, že z existence druhé derivace $f''(x_0)$ plyne existence druhé Schwarzovy derivace $f^{('')}(x_0)$. Navíc pak platí rovnost*

$$f''(x_0) = f^{('')}(x_0).$$

Problém 99 *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastností, že $f^{('')}(x_0)$ existuje, avšak $f''(x_0)$ neexistuje.*

Věta 27 (Schwarzova věta) *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a*

$$f^{('')}(x) = 0, \qquad x \in (a, b),$$

potom existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = \alpha x + \beta$ pro $x \in [a, b]$.

Problém 100 *Dokažte Schwarzovu větu, tj. Větu 27.*

Definice 29 *Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že číslo $S \in \mathbb{R}$ je* **druhým Schwarzovým číslem** *funkce f v bodě x_0, pokud existuje posloupnost $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ splňující $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ taková, že*

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - 2f(x_0) + f(x_0 - h_n)}{h_n^2}.$$

Problém 101 *Dokažte, že množina všech druhých Schwarzových čísel dané funkce v daném bodě je vždy uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$.*

Problém 102 *Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$, ale každé reálné číslo je jejím druhým Schwarzovým číslem v bodě $x_0 = 0$.*

Kapitola 11

LAPLACEOVA ROVNICE A HARMONICKÉ FUNKCE

V této kapitole budeme uvažovat funkce n proměnných. Nejprve vyslovme základní definice. Klademe

$$\Delta u(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}$$

pro $u\colon U \to \mathbb{R}$, kde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ a $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

Definice 30 **Laplaceova rovnice** *je*

$$\Delta u = 0 \qquad \text{na } U, \tag{11.1}$$

kde $u\colon \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je neznámá funkce. Laplaceova rovnice se doplňuje (při ohraničenosti množiny* U*)* **Dirichletovou podmínkou***, kdy pro* $g\colon \partial U \to \mathbb{R}$ *se uvažuje*

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial U.$$

Problém 103 *Ve skalárním případě* $n = 1$ *popište všechna řešení* (11.1)*.*

Věta 28 *Nechť* $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *je řešením rovnice* (11.1)*. Pro libovolnou ortogonální matici* $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ *funkce* $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *definovaná jako*

$$v(x) = u(Rx), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

je také řešením rovnice (11.1)*.*

Problém 104 *Dokažte Větu 28.*

Problém 105 *Nechť $U \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Uvažujte holomorfní funkci komplexní proměnné $f\colon U \to \mathbb{C}$. Při identifikaci $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lze vyjádřit $z \in \mathbb{C}$ jako $z = x + \mathrm{i}y$, tj.*

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

kde u je reálná část, v imaginární část funkce f, přičemž $u, v\colon U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte, že u a v na otevřené množině U vyhovují rovnici (11.1)*, tj.*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \text{na } U.$$

Definice 31 *Nechť* $\log$ *označuje přirozený logaritmus a nechť α označuje objem jednotkové koule v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkce $\Phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem*

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2; \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

se nazývá **fundamentální řešení** (11.1) *na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, kde $0 = (0, \ldots, 0)$.*

Problém 106 *Ověřte, že fundamentální řešení Φ je skutečně řešením Laplaceovy rovnice* (11.1) *na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Definice 32 *Každá funkce $u \in C^2(U)$ splňující Laplaceovu rovnici* (11.1) *se nazývá* **harmonická** *na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Definice 33 **Objemový průměr** *funkce f přes kouli $B(x, r)$ je*

$$\fint_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y := \frac{1}{\alpha r^n} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

a **plošný průměr** *funkce f přes sféru $\partial B(x, r)$ je*

$$\fint_{\partial B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}S := \frac{1}{n\alpha r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}S,$$

přičemž α je objem jednotkové koule a $B(x, r)$ je otevřená koule se středem v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ a poloměrem $r > 0$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$.

Věta 29 *Je-li u harmonická funkce na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$, pak platí*

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S$$

pro každou uzavřenou kouli $B[x, r] \subset U$ se středem v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ a poloměrem $r > 0$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$.

Problém 107 *Dokažte Větu 29.*

Věta 30 *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Pokud funkce $u \in C^2(U)$ splňuje podmínku*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S$$

pro každou uzavřenou kouli $B[x,r] \subset U$ se středem v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ a poloměrem $r > 0$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, potom je funkce u harmonická na U.

Problém 108 *Dokažte Větu 30.*

Věta 31 (Princip maxima) *Nechť je množina $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a ohraničená a funkce $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ je harmonická na U. Potom:*

(i) *platí*

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x);$$

(ii) *je-li množina U navíc souvislá, pak existence bodu $x_0 \in U$ s vlastností*

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$$

implikuje konstantnost funkce u na U.

Problém 109 *Dokažte Princip maxima.*

Věta 32 *Je-li otevřená a ohraničená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ také souvislá a $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ je řešením okrajového problému $\Delta u = 0$ na U, $u = g$ na ∂U, přičemž $g \geq 0$, potom je $u > 0$ na U, pokud je funkce g kladná aspoň v jednom bodě ∂U.*

Problém 110 *Pomocí Principu maxima, tj. Věty 31, dokažte Větu 32.*

Věta 33 *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina a $g \in C(\partial U)$. Potom existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ Dirichletova problému*

$$\Delta u = 0 \qquad \text{na } U,$$

$$u = g \qquad \text{na } \partial U.$$

Problém 111 *Pomocí Principu maxima, tj. Věty 31, dokažte Větu 33.*

Na závěr uvádíme další charakteristické vlastnosti harmonických funkcí.

Věta 34 (Liouvilleova věta) *Každá harmonická a ohraničená funkce na* $\mathbb{R}^n$ *je konstantní.*

Věta 35 *Nechť* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina. Každá funkce, která je harmonická na* U*, je také analytická na* U *(viz Definice 23).*

Definice 34 *Nechť* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina a* V *je otevřená množina splňující* $V \subset \overline{V} \subset U$*, přičemž* $\overline{V}$ *je kompaktní množina. V tomto případě se říká, že množina* V *je* **kompaktně vnořena** *do* U*, což se zapisuje jako* $V \subset\subset U$*.*

Věta 36 (Harnackova nerovnost) *Nechť* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *je libovolná otevřená množina a nechť* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *je souvislá a otevřená množina, přičemž* $V \subset\subset U$*. Potom existuje* $c > 0$ *závisející pouze na* V *a* U *takové, že pro každou kladnou harmonickou funkci* u *na* U *je*

$$\sup_{x \in V} u(x) \leq c \cdot \inf_{x \in V} u(x),$$

tj.

$$\frac{1}{c}\, u(y) \leq u(x) \leq c\, u(y), \qquad x, y \in V.$$

Problém 112 *Dokažte Větu 36.*

III. INTEGRÁLNÍ POČET

Kapitola 12

KONVOLUCE FUNKCÍ

Nejprve připomeneme základní definice z teorie míry a integrálu.

Definice 35 *Pro měřitelnou množinu $N \subseteq \mathbb{R}^n$ a $1 \leq p < \infty$ označujeme symbolem $\mathcal{L}_p(N)$ množinu všech (komplexních) měřitelných funkcí na N, pro které konverguje Lebesgueův integrál*

$$\int_N |f(x)|^p \, \mathrm{d}x.$$

V případě, kdy $N = \mathbb{R}$, pak zapisujeme jen $\mathcal{L}_p$.

Definice 36 *Pro $f \in \mathcal{L}_p(N)$ klademe*

$$||f||_p := \left(\int_N |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Poznámka 12 *O prostoru $\mathcal{L}_p(N)$ je známo, že je lineární. Navíc je také známo, že zobrazení $f \mapsto ||f||_p$ má následující vlastnosti:*

(i)

$$f = 0 \text{ s.v., právě když } ||f||_p = 0;$$

(ii)

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p, \qquad f, g \in \mathcal{L}_p(N);$$

(iii)

$$||c \cdot f||_p = |c| \cdot ||f||_p, \qquad f \in \mathcal{L}_p(N),\ c \in \mathbb{C}.$$

To znamená, že prostor $\mathcal{L}_p(N)$ je normovaný, pokud ztotožníme funkce, které se liší na množině míry nula.

Problém 113 *V Poznámce 12 je uvedeno, že prostor $\mathcal{L}_p(N)$ je normovaný. Je tento prostor Banachův (tj. úplný)?*

Problém 114 *Uveďte dvě funkce z prostoru $\mathcal{L}_p(N)$, pro které jejich součin do $\mathcal{L}_p(N)$ už nenáleží.*

Problém 115 *Nechť $g \in \mathcal{L}_p(N)$ a $h \in \mathcal{L}_q(N)$, přičemž $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$. Ukažte, že*

(i)
$$g \cdot h \in \mathcal{L}_1(N);$$

(ii)
$$||g \cdot h||_1 \leq ||g||_p \cdot ||h||_q.$$

Věta 37 *Jestliže $g, h \in \mathcal{L}_1$, pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ náleží funkce*

$$z \mapsto g(x-z)h(z), \qquad z \in \mathbb{R}$$

do prostoru $\mathcal{L}_1$.

Problém 116 *Dokažte tvrzení Věty 37.*

Definice 37 *Nechť $g, h \in \mathcal{L}_1$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkci $g \otimes h$ vztahem*

$$(g \otimes h)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(x-z)h(z)\,\mathrm{d}z,$$

pokud integrál vpravo konverguje. V bodech $x \in \mathbb{R}$, kde ji takto nelze definovat, ji dodefinováváme hodnotou 0. Tuto funkci $g \otimes h$ nazýváme **konvolucí funkcí** *g a h.*

Problém 117 *Nechť $g, h \in \mathcal{L}_1$. Ukažte, že $g \otimes h \in \mathcal{L}_1$ a že*

$$||g \otimes h||_1 \leq ||g||_1 \cdot ||h||_1.$$

Problém 118 *Pro všechna $f, g, h \in \mathcal{L}_1$, $a, b \in \mathbb{C}$ dokažte následující vlastnosti konvoluce:*

(i) $f \otimes g = g \otimes f$;

(ii) $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$;

(iii) $(af + bg) \otimes h = a(f \otimes h) + b(g \otimes h)$.

Problém 119 *Zjistěte, zda existuje funkce $f \in \mathcal{L}_1$ s vlastností, že $f \otimes g = g$ pro všechna $g \in \mathcal{L}_1$.*

Věta 38 *Je-li funkce h ohraničená a měřitelná na $\mathbb{R}$ a funkce $g \in \mathcal{L}_1$, pak konvoluce $g \otimes h$ je na $\mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá a platí*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(g \otimes h)(x)| \leq ||g||_1 \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|.$$

Problém 120 *Dokažte Větu 38.*

Kapitola 13

FOURIEROVA TRANSFORMACE

V této kapitole budeme používat značení z Kapitoly 12.

Definice 38 *Pro funkci $f \in \mathcal{L}_1$ zavádíme funkci $\hat{f}$ na $\mathbb{R}$ vztahem*

$$\hat{f}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\, \mathrm{d}x, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Zobrazení $f \mapsto \hat{f}$ se nazývá **Fourierova transformace**.

Problém 121 *Ukažte, že definice Fourierovy transformace je korektní.*

Problém 122 *Uvážením identity*

$$\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{a}(\cos b + \mathrm{i} \sin b), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

objasněte vztah mezi Fourierovými řadami a Fourierovou transformací.

Věta 39 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma) *Je-li $f \in \mathcal{L}_1$, pak je funkce $\hat{f}$ stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$ a platí*

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \hat{f}(z) \right| = 0,$$

tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists z_0 > 0)\, (\forall z;\ |z| > z_0) \left(\left| \hat{f}(z) \right| < \varepsilon \right).$$

Problém 123 *Dokažte Riemannovo–Lebesgueovo lemma, tj. Větu 39.*

Poznámka 13 *Nechť C_0 je systém všech spojitých funkcí h na $\mathbb{R}$, pro které je*

$$\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = 0.$$

Fourierova transformace, která funkci h přiřazuje funkci $\hat{h}$, je zobrazení prostoru $\mathcal{L}_1$ do C_0.

Problém 124 *Uvažte zobrazení z Poznámky 13 a dokažte, že se jedná o zobrazení lineární a ohraničené, konkrétně dokažte nerovnost*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\hat{h}(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot ||h||_1$$

pro každé $h \in \mathcal{L}_1$.

Problém 125 *Ukažte, že Fourierova transformace je injektivní zobrazení prostoru $\mathcal{L}_1$ do C_0.*

Problém 126 *Nalezněte podmínku, která je nutná a postačující k tomu, aby $\hat{h}$ byla lichá funkce.*

Problém 127 *Dokažte, že pokud $g, h \in \mathcal{L}_1$, potom*

$$\widehat{g \otimes h} \equiv \hat{g} \cdot \hat{h}$$

na $\mathbb{R}$.

Problém 128 *Dokažte, že pro $g, h \in \mathcal{L}_1$ je*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\hat{h}(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. dokažte tzv. základní identitu pro Fourierovu transformaci.

Věta 40 *Nechť $g \in \mathcal{L}_1$ a nechť funkce*

$$h : x \mapsto -\mathrm{i}x\, g(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

také náleží do $\mathcal{L}_1$. Pak platí $(\hat{g})' = \hat{h}$.

Problém 129 *Dokažte Větu 40.*

Věta 41 *Pokud $h \in \mathcal{L}_1$ je absolutně spojitá (viz Definice 71) funkce na $\mathbb{R}$ a $h' \in \mathcal{L}_1$, pak*

$$\widehat{(h')}(x) = \mathrm{i}x\, \hat{h}(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Problém 130 *Dokažte Větu 41.*

Problém 131 *Nechť je dána funkce*

$$h : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že pro tuto funkci je $\hat{h} \equiv h$ *na* $\mathbb{R}$.

Nyní stručně zavedeme zobecnění Fourierovy transformace pro funkce nabývající komplexních hodnot definované na $\mathbb{R}^n$.

Definice 39 *Pro funkci* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ *definujeme její* **Fourierovu transformaci** *jako*

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

kde xy *je eukleidovský skalární součin vektorů* $x, y \in \mathbb{R}^n$. **Inverzní Fourierovou transformací** *funkce* f *pak rozumíme*

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Problém 132 *Ukažte, že Definice 39 je korektní.*

Fourierovu transformaci je v aplikacích třeba definovat na celém prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$, což je Hilbertův prostor, jak je známo ze základních kurzů matematické analýzy. Ovšem $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ netvoří podmnožinu $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Proto nejprve uveďme následující větu.

Věta 42 (Plancherelova věta) *Pokud* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$, *pak* $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ *a*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\check{f}\right\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Problém 133 *Dokažte Plancherelovu větu.*

Problém 134 *Pomocí Plancherelovy věty, tj. Věty 42, zaveďte Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci na prostoru* $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Věta 43 *Pro každé funkce* $g, h \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ *je*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot \overline{h}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x) \cdot \overline{\hat{h}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problém 135 *Dokažte Větu 43.*

Věta 44 *Pro každou funkci* $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ *je* $f = \left(\hat{f}\right)^{\check{}}$ *v* $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Problém 136 *Dokažte Větu 44.*

Kapitola 14

ZAVEDENÍ HENSTOCKOVA–KURZWEILOVA INTEGRÁLU

Nejprve připomeneme definici dělení intervalu.

Definice 40 *Nechť $a < b$ a $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval. Konečnou posloupnost bodů $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ z intervalu $[a,b]$ takovou, že*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

nazýváme **dělení** *D intervalu $[a,b]$, přičemž* **normou dělení** *D rozumíme*

$$\max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)\,.$$

Jestliže doplníme body $\nu_i, i \in \{1,\dots,n\}$, pro které platí $x_{i-1} \le \nu_i \le x_i$, potom o množině

$$D = \{(\nu_i, [x_{i-1}, x_i]);\, i \in \{1,\dots,n\}\}$$

říkáme, že jde o **dělení s význačnými body** *$\nu_1, \dots, \nu_n$.*

Definice 41 *Pro $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je libovolná funkce $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ nazývána* **kalibrem** *na intervalu $[a,b]$.*

Definice 42 *Pro kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ na intervalu $[a,b]$ definujeme* **δ-jemné dělení** *intervalu $[a,b]$ jako dělení intervalu $[a,b]$ s význačnými body*

$$D = \{(\nu_i, [x_{i-1}, x_i])\,;\, i \in \{1,\dots,n\}\}\,,$$

pro které

$$\nu_i - \delta(\nu_i) < x_{i-1} \leq \nu_i \leq x_i < \nu_i + \delta(\nu_i), \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Symbolem $A(\delta, [a,b])$ potom označujeme množinu všech δ-jemných dělení intervalu $[a,b]$.

Problém 137 *Dokažte tzv. Cousinovo lemma, které říká, že pro každý kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ je $A(\delta, [a,b]) \neq \emptyset$, tedy pro každý kalibr existuje δ-jemné dělení.*

Definice 43 *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $D = \{(\nu_i, [x_{i-1}, x_i]) ; i \in \{1, \ldots, n\}\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ s význačnými body. Zavádíme* **integrální součet** *příslušný dělení D a funkci f následovně*

$$\sigma(f; D) := \sum_{i=1}^{n} f(\nu_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definice 44 *Pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme její* **Henstockův–Kurzweilův integrál** *na intervalu $[a,b]$ jako číslo $J \in \mathbb{R}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ tak, že je pro každé δ-jemné dělení D splněna nerovnost*

$$|\sigma(f; D) - J| < \varepsilon. \tag{14.1}$$

Tento integrál značíme

$$(HK) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Jestliže existuje, pak o funkci f říkáme, že je **integrovatelná v Henstockově–Kurzweilově smyslu***, což zapisujeme zkráceně jako HK integrovatelná. Symbolem $HK[a,b]$ značíme množinu všech HK integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$.*

Definice 45 *Pro $a < b$ dále definujeme:*

(i)

$$(HK) \int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x = -(HK) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x;$$

(ii)

$$(HK) \int_a^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Problém 138 *Dokažte, že hodnotu Henstockova–Kurzweilova integrálu*

$$J = (HK) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

určuje podmínka (14.1) *v Definici 44 jednoznačně.*

Problém 139 *Uvažte funkci definovanou jako*

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Určete Henstockův–Kurzweilův integrál této funkce na $[0, 1]$ *přímo z definice, resp. ukažte, že*

$$(HK) \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x = 2.$$

Věta 45 (Bolzanova–Cauchyova podmínka) *Funkce* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je HK integrovatelná na intervalu* $[a, b]$ *tehdy a jenom tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje na* $[a, b]$ *kalibr* $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ *tak, že je splněna nerovnost*

$$|\sigma (g; D_1) - \sigma (g; D_2)| < \varepsilon$$

pro každá dvě δ*-jemná dělení* D_1, D_2 *intervalu* $[a, b]$.

Problém 140 *Dokažte Větu 45.*

Řešení. Nejdříve předpokládejme, že

$$(HK) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = J.$$

Z Definice 44 víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta\colon [a, b] \to (0, \infty)$ s vlastností, že pro každé δ-jemné dělení D je

$$|\sigma (g; D) - J| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.2}$$

Když (14.2) dále využijeme pro libovolná δ-jemná dělení D_1 a D_2 intervalu $[a, b]$, obdržíme

$$|\sigma (g; D_1) - \sigma (g; D_2)| \le |\sigma (g; D_1) - J| + |\sigma (g; D_2) - J| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

K důkazu druhé implikace mějme dané $\varepsilon > 0$ a zvolme kalibr δ na $[a, b]$ tak, aby pro každá δ-jemná dělení D_1 a D_2 intervalu $[a, b]$ platilo

$$|\sigma(g; D_1) - \sigma(g; D_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.3}$$

Nyní nechť P je množina čísel $r \in \mathbb{R}$ takových, že pro ně existuje kalibr δ a nerovnost $r \leq \sigma(g; D)$ je splněna pro každé δ-jemné dělení D. Zvolme dále δ-jemné dělení $\tilde{D}$ intervalu $[a, b]$. Použijeme-li (14.3), pro všechna δ-jemná dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\sigma\left(g; \tilde{D}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(g; D) < \sigma\left(g; \tilde{D}\right) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.4}$$

Odtud

$$\left(-\infty, \sigma\left(g; \tilde{D}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq P$$

a

$$P \subseteq \left(-\infty, \sigma\left(g; \tilde{D}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Zejména množina P je neprázdná a shora ohraničená. Tedy

$$\sigma\left(g; \tilde{D}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup P \leq \sigma\left(g; \tilde{D}\right) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.5}$$

Uvážíme-li (14.4) a (14.5), pak pro každé δ-jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\sigma(g; D) - \sup P| \leq \left|\sigma(g; D) - \sigma\left(g; \tilde{D}\right)\right| + \left|\sigma\left(g; \tilde{D}\right) - \sup P\right| < \varepsilon.$$

Definice 44 pak již dává

$$(HK)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \sup P.$$

$\square$

Kapitola 15

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI HENSTOCKOVA–KURZWEILOVA INTEGRÁLU

Problém 141 *Ukažte, že jsou-li funkce g, h z množiny $HK[a, b]$, potom i součet $g + h \in HK[a, b]$ a platí rovnost*

$$(HK)\int\limits_a^b g(x) + h(x)\,\mathrm{d}x = (HK)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + (HK)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problém 142 *Dokažte, že pro funkci $g \in HK[a, b]$ a reálnou konstantu c je $c \cdot g \in HK[a, b]$ a že*

$$(HK)\int\limits_a^b c \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = c\left((HK)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Problém 143 *Dokažte, že jsou-li $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkce HK integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a $g(x) \leq h(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$, pak platí*

$$(HK)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq (HK)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Problému 143 ihned dostáváme důsledek níže.

Důsledek 1 *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná, HK integrovatelná funkce na* *intervalu* $[a, b]$. *Potom platí*

$$(HK) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Věta 46 *Jsou-li* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a* $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funkce HK integrovatelné na intervalu* $[a, b]$, *pak platí nerovnost*

$$\left|(HK) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (HK) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{15.1}$$

Problém 144 *Dokažte Větu 46.*

Řešení. Věta 46 plyne uvážením nerovností

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \qquad x \in [a, b]$$

a Problému 143, který dává

$$-(HK) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (HK) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (HK) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{15.2}$$

Z (15.2) totiž ihned plyne (15.1). □

Problém 145 *Dokažte, že je-li funkce* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *spojitá, potom funkce* h *je HK integrovatelná na intervalu* $[a, b]$.

Řešení. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Dle stejnoměrné spojitosti funkce h na intervalu $[a, b]$ existuje kalibr $\delta > 0$ s vlastností, že

$$|h(y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta), \, x \in [a, b].$$

Uvažme pevně dané δ-jemné dělení

$$D = \{a = a_0 \leq \omega_1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq \omega_n \leq a_n = b\}$$

intervalu $[a, b]$ s význačnými body $\omega_1, \ldots, \omega_n$ a funkci $k\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definujme jako

$$k(x) := h(\omega_j), \qquad x \in [a_{j-1}, a_j), \, j \in \{1, \ldots, n\}$$

a $k(a_n) := h(\omega_n)$. Funkce k zjevně splňuje

$$|k(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad x \in [a, b].$$

Snadno lze ověřit, že funkce k je HK integrovatelná na $[a, b]$ (mj. to vyplyne z Důsledku 2 v následující kapitole). Nechť dále je δ kalibr na intervalu $[a, b]$ takový, že pro každé δ-jemné dělení D intervalu $[a, b]$ platí

$$\left| \sigma\,(k; D) - (HK) \int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li

$$D = \{(\tau_j, [x_{j-1}, x_j])\,;\, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

libovolné δ-jemné dělení, pak platí

$$\begin{aligned}
\left| \sigma\,(h; D) - (HK) \int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x \right| &\leq |\sigma\,(h; D) - \sigma\,(k; D)| + \\
&\quad + \left| \sigma\,(k; D) - (HK) \int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x \right| < \\
&< \sum_{j=1}^{n} |h\,(\tau_j) - k\,(\tau_j)|\,(x_j - x_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \\
&< \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pro libovolná δ-jemná dělení D_1 a D_2 intervalu $[a, b]$ odtud odvodíme

$$|\sigma\,(h; D_2) - \sigma\,(h; D_1)| < 2\varepsilon.$$

Existenci

$$(HK) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$$

pak dává Věta 45. $\square$

Kapitola 16

HENSTOCKŮV–KURZWEILŮV INTEGRÁL NA PODINTERVALECH

Problém 146 *Dokažte, že pro funkci* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *HK integrovatelnou na intervalu* $[a, b]$ *a pro každý podinterval* $[c, d] \subset [a, b]$ *rovněž existuje*

$$(HK) \int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme Větu 45 a zvolíme pro dané $\varepsilon > 0$ kalibr δ na $[a, b]$ tak, aby

$$\left|\sigma\left(g; \tilde{D}\right) - \sigma\left(g; \hat{D}\right)\right| < \varepsilon$$

pro každá δ-jemná dělení $\tilde{D}$ a $\hat{D}$ intervalu $[a, b]$. Protože je $[c, d] \subset [a, b]$, interval $[a, b]$ obsahuje intervaly

$$[r_1, s_1], [r_2, s_2], \dots, [r_n, s_n],$$

které se nepřekrývají, a každá z množin

$$[c, d] \cap [r_j, s_j], \qquad j \in \{1, \dots, n\}$$

je nejvýše jednoprvková, přičemž

$$[a, b] = [c, d] \cup \bigcup_{j=1}^{n} [r_j, s_j].$$

Nyní každému $j \in \{1, \dots, n\}$ přiřaďme δ-jemné dělení D_j intervalu $[r_j, s_j]$. Nechť $\tilde{D}_1$ a $\hat{D}_1$ jsou δ-jemná dělení intervalu $[c, d]$. Potom zřejmě

$$\tilde{D}_1 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n, \qquad \hat{D}_1 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$$

jsou δ-jemnými děleními intervalu $[a, b]$. Odsud

$$\begin{aligned} &\left|\sigma\left(g; \tilde{D}_1\right) - \sigma\left(g; \hat{D}_1\right)\right| = \\ &= \left|\sigma\left(g; \tilde{D}_1\right) + \sum_{j=1}^{n} \sigma\left(g; D_j\right) - \sigma\left(g; \hat{D}_1\right) - \sum_{j=1}^{n} \sigma\left(g; D_j\right)\right| = \\ &= \left|\sigma\left(g; \tilde{D}_1 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n\right) - \sigma\left(g; \hat{D}_1 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n\right)\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Existence integrálu

$$(HK) \int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x$$

pak vyplývá z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky (tj. z Věty 45). □

Věta 47 *Je-li $a \le c < d \le b$ a $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkce taková, že je $h(x) = 0$ pro $x \in [a, b] \setminus [c, d]$, potom platí, že pokud existuje*

$$(HK) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$$

anebo

$$(HK) \int_c^d h(x)\,\mathrm{d}x,$$

existuje také ten druhý integrál a

$$(HK) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = (HK) \int_c^d h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16.1}$$

Problém 147 *Dokažte Větu 47.*

Řešení. Z Problému 146 víme, že pokud existuje integrál $(HK) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$, pak existuje také integrál $(HK) \int_c^d h(x)\,\mathrm{d}x$. Dále ukážeme opačnou implikaci a rovnost (16.1) pro $a = c < d < b$. Ostatní případy, kdy $a < c < d = b$ a $a < c < d < b$, lze dokázat zcela analogicky.

Předpokládejme, že existuje $(HK)\int_c^d h(x)\,\mathrm{d}x$, a mějme libovolné předem dané $\varepsilon > 0$. Nechť $\delta_1 : [c,d] \to (0,+\infty)$ je takový kalibr, že platí

$$\left|\sigma\,(h;D) - (HK)\int\limits_c^d h(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{16.2}$$

pro každé dělení $D \in A\,(\delta_1,[c,d])$. Zaveďme nyní kalibr $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ vztahem

$$\delta(x) := \begin{cases} \min\left\{\delta_1(x), \frac{d-x}{2}\right\}, & x < d; \\ \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+|h(d)|}, \delta_1(d)\right\}, & x = d; \\ \frac{x-d}{2}, & x > d. \end{cases}$$

Dále mějme dělení

$$D = \{(\omega_j, [x_{j-1}, x_j])\,;\, j \in \{1,\ldots,n\}\} \in A\,(\delta;[a,b])$$

takové, že existuje index $j \in \{1,\ldots,n\}$ splňující $\omega_j = d$. Potom

$$D_1 = \{x_0, \omega_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, \omega_j, d\}$$

je δ-jemné dělení intervalu $[a,d]$. Protože

$$|x_j - d| = |x_j - \omega_j| < \delta\,(\omega_j) = \delta\,(d) \le \frac{\varepsilon}{1+|h(d)|},$$

máme

$$|\sigma\,(h;D) - \sigma\,(h;D_1)| = |h(d)\,(x_j - d)| < \varepsilon. \tag{16.3}$$

Z nerovností (16.2) a (16.3) dostáváme

$$|\sigma\,(h;D) - \sigma\,(h;D_1)| + \left|\sigma\,(h;D_1) - \int\limits_c^d h(x)\,\mathrm{d}x\right| < 2\varepsilon,$$

a proto platí (16.1). □

Věta 48 *Pro funkci $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $c \in (a,b)$ je existence Henstockova–Kurzweilova integrálu $(HK)\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ ekvivalentní současné existenci integrálů*

$$(HK)\int\limits_a^c h(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (HK)\int\limits_c^b h(x)\,\mathrm{d}x,$$

přičemž platí

$$(HK)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = (HK)\int\limits_a^c h(x)\,\mathrm{d}x + (HK)\int\limits_c^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problém 148 *Dokažte Větu 48.*

Řešení. Uvažme nejprve Problém 146. Mějme $\varepsilon > 0$ dané libovolně. Nechť funkce $h \in HK\,[a, c]$ a současně $h \in HK\,[c, b]$. Proto existuje kalibr δ_1 na intervalu $[a, c]$ s vlastností, že pro každé δ_1-jemné dělení D_1 intervalu $[a, c]$ je

$$\left| \sigma\,(h; D_1) - (HK) \int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a dále existuje také kalibr δ_2 na intervalu $[c, b]$ takový, že pro každé δ_2-jemné dělení D_2 intervalu $[c, b]$ je

$$\left| \sigma\,(h; D_2) - (HK) \int_c^b h(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť δ je kalibr na intervalu $[a, b]$ zavedený předpisem

$$\delta(x) := \begin{cases} \min\{\delta_1(x), c - x\}, & a \le x < c; \\ \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}, & x = c; \\ \min\{\delta_2(x), x - c\}, & c < x \le b. \end{cases}$$

Je evidentní, že existuje δ-jemné dělení

$$D = \{(\nu_1, [r_1, s_1]), \ldots, (\nu_n, [r_n, s_n])\}$$

intervalu $[a, b]$ s vlastností, že $c = s_j = r_{j+1}$ pro určité $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pro jistá δ-jemná dělení D_1 intervalu $[a, c]$ a D_2 intervalu $[c, b]$ je $D = D_1 \cup D_2$, a proto platí

$$\begin{aligned} &\left| \sigma\,(h; D) - \left((HK) \int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x + (HK) \int_c^b h(x)\,\mathrm{d}x \right) \right| = \\ &= \left| \sigma\,(h; D_1) + \sigma\,(h; D_2) - \left((HK) \int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x + (HK) \int_c^b h(x)\,\mathrm{d}x \right) \right| \le \\ &\le \left| \sigma\,(h; D_1) - (HK) \int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \sigma\,(h; D_2) - (HK) \int_c^b h(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Z Věty 48 lze snadno obdržet následující důsledek.

Důsledek 2 *Jsou-li* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

pak $(HK) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje, právě když existuje každý z integrálů*

$$(HK) \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} h(x)\,\mathrm{d}x, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Potom je

$$(HK) \int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = (HK) \int\limits_{t_0}^{t_1} h(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + (HK) \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kapitola 17

DALŠÍ VLASTNOSTI HENSTOCKOVA–KURZWEILOVA INTEGRÁLU

Věta 49 *Jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$, kde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a F je funkce diferencovatelná na $[a, b]$, pak*

$$(HK) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Problém 149 *Dokažte Větu 49.*

Věta 50 *Je-li $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkce spojitá a funkce F, která je definovaná jako*

$$F(x) := (HK) \int_a^x f(s)\, \mathrm{d}s, \qquad x \in [a, b],$$

je diferencovatelná, potom platí

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in (a, b).$$

Problém 150 *Dokažte Větu 50.*

Problém 151 *Dokažte, že pro HK integrovatelnou funkci $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ a HK integrovatelné funkce $h_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ pro $j \in \mathbb{N}$ tvořící monotonní posloupnost $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ takovou, že*

$$\lim_{j \to \infty} h_j(x) = h(x), \qquad x \in [a, b],$$

platí

$$\lim_{j\to\infty}(HK)\int\limits_a^b h_j(x)\,\mathrm{d}x = (HK)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.1}$$

Řešení. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Ukažme nejdříve, že existuje

$$I := \lim_{j\to\infty}(HK)\int\limits_a^b h_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Využitím monotonie $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uvažme kalibr δ na $[a,b]$ s vlastností, že nerovnost

$$\left|\sigma\left(h_j; D\right) - (HK)\int\limits_a^b h_j(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad j \in \mathbb{N}$$

platí pro každé δ-jemné dělení D. Uvažme konvergenci posloupnosti $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a zvolme takové δ-jemné dělení $\tilde{D}$ a $n \in \mathbb{N}$, aby platilo

$$\left|\sigma\left(h_p; \tilde{D}\right) - \sigma\left(h_q; \tilde{D}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad p, q \geq n.$$

Pro $p, q \geq n$ pak obdržíme existenci I, neboť

$$\begin{aligned}\left|(HK)\int\limits_a^b h_p(x)\,\mathrm{d}x - (HK)\int\limits_a^b h_q(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \\ \leq \left|(HK)\int\limits_a^b h_p(x)\,\mathrm{d}x - \sigma\left(h_p; \tilde{D}\right)\right| &+ \\ + \left|\sigma\left(h_p; \tilde{D}\right) - \sigma\left(h_q; \tilde{D}\right)\right| &+ \\ + \left|\sigma\left(h_q; \tilde{D}\right) - (HK)\int\limits_a^b h_q(x)\,\mathrm{d}x\right| &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že D je δ-jemné dělení $[a,b]$ a že

$$\left|\sigma\left(h_n; D\right) - \sigma\left(h; D\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a

$$\left|I - (HK)\int\limits_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pak obdržíme

$$
\begin{aligned}
|\sigma\,(h;D)-I| \le |\sigma\,(h;D)-\sigma\,(h_n;D)| &+ \\
&+ \left|\sigma\,(h_n;D)-(HK)\int\limits_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x\right| + \\
&+ \left|(HK)\int\limits_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x - I\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Poslední nerovnost dává dle Definice 44 existenci integrálu $(HK)\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ a také (17.1). $\square$

Kapitola 18

HAKEOVA VĚTA

Lemma 2 (Saksovo–Henstockovo lemma) *Je dána funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, která je HK integrovatelná na $[a, b]$, a $\varepsilon > 0$, kterému odpovídá kalibr δ na intervalu $[a, b]$ v tom smyslu, že pro každé δ-jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je*

$$\left| \sigma\,(f; D) - (HK) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Pak pro každý systém

$$\{(\lambda_k, [u_k, v_k])\,;\, k \in \{1, \dots, n\}\}\,, \tag{18.1}$$

pro který je

$$\begin{aligned} a \le u_1 \le \lambda_1 \le v_1 \le u_2 \le \lambda_2 \le \cdots \le v_{n-1} \le u_n \le \lambda_n \le v_n \le b, \\ \lambda_k - \delta\,(\lambda_k) < u_k \le \lambda_k \le v_k < \lambda_k + \delta(\lambda_k), \qquad k \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{18.2}$$

platí

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(f\,(\lambda_k)\,(v_k - u_k) - (HK) \int\limits_{u_k}^{v_k} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \right| \le \varepsilon. \tag{18.3}$$

Problém 152 *Dokažte Lemma 2.*

Řešení. Budeme předpokládat, že je dán systém (18.1), pro který platí nerovnosti (18.2). Nechť $v_0 = a$ a $u_{n+1} = b$ a nechť $\xi > 0$ je libovolné. Pokud pro $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $v_i < u_{i+1}$, potom existuje na intervalu $[v_i, u_{i+1}]$ kalibr δ_i takový, že pro každé $x \in [v_i, u_{i+1}]$ je $\delta_i(x) \le \delta(x)$ a pro každé δ_i-jemné dělení D_i intervalu $[v_i, u_{i+1}]$ platí

$$\left| \sigma\,(f; D_i) - (HK) \int\limits_{v_i}^{u_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\xi}{n+1}. \tag{18.4}$$

Dále je

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\lambda_k\right)\left(v_k-u_k\right)+\sum_{i=0}^{n} \sigma\left(f ; D_i\right)$$

integrální součet pro $[a, b]$. Z předpokladu lemmatu tak víme, že

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\lambda_k\right)\left(v_k-u_k\right)+\sum_{i=0}^{n} \sigma\left(f ; D_i\right)-(H K) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d} x\right|<\varepsilon . \tag{18.5}$$

Uvážíme-li nyní nerovnosti (18.4) a (18.5), dostáváme

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\lambda_k\right)\left(v_k-u_k\right)-(H K) \int_{u_k}^{v_k} f(x) \,\mathrm{d} x\right]\right| \leq \\
&\leq\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\lambda_k\right)\left(v_k-u_k\right)+\sum_{i=0}^{n} \sigma\left(f ; D_i\right)-(H K) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d} x\right|+ \\
&\qquad+\left|\sum_{i=0}^{n}\left[(H K) \int_{v_i}^{u_{i+1}} f(x) \,\mathrm{d} x-\sigma\left(f ; D_i\right)\right]\right|< \\
&<\varepsilon+(n+1) \frac{\xi}{n+1}=\varepsilon+\xi .
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\xi>0$ bylo zvoleno libovolně, platí (18.3). □

Nyní zobecníme pojem δ-jemného dělení.

Definice 46 *Pokud je $\delta:[a, b] \rightarrow(0,+\infty)$ kalibr a daná soustava bodů z* (18.1) *splňuje nerovnosti* (18.2) *v Lemmatu 2, pak mluvíme o **δ-jemném systému** na intervalu $[a, b]$.*

Věta 51 (Hakeova věta) *Je-li funkce $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ HK integrovatelná na intervalu $[c, b]$ pro $c \in(a, b)$, pak integrál $(H K) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d} x$ existuje tehdy a jenom tehdy, když existuje vlastní limita*

$$\lim_{c \rightarrow a+}(H K) \int_c^b f(x) \,\mathrm{d} x . \tag{18.6}$$

V takovém případě platí

$$(H K) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d} x=\lim_{c \rightarrow a+}(H K) \int_c^b f(x) \,\mathrm{d} x . \tag{18.7}$$

Problém 153 *Dokažte Hakeovu větu, tj. Větu 51.*

Řešení. Předpokládejme, že $f \in HK\,[a,b]$ a $\varepsilon > 0$ je dáno libovolně. Nechť δ a $\tilde{\delta}$ jsou kalibry zvolené tak, aby pro každá dělení D a $\tilde{D}$ intervalů $[a,b]$ a $[t,b]$ pro $t \in [a,b)$, která jsou δ-jemná a $\tilde{\delta}$-jemná, platilo

$$\left|\sigma\,(f;D) - (HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\sigma\left(f;\tilde{D}\right) - (HK)\int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dále předpokládejme, že $\tilde{\delta}$ je zúžení δ a zvolme $c \in (a,b)$ tak, aby

$$|f\,(a)|\,(c-a) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nechť $t \in [a,c]$ a $\hat{D}$ je $\tilde{\delta}$-jemné dělení intervalu $[t,b]$. Položme

$$D = \hat{D} \cup \{(a,[a,t])\}\,.$$

Je zřejmé, že D je δ-jemné dělení intervalu $[a,b]$ a

$$\begin{aligned}&\left|(HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (HK)\int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \\ &\le \left|(HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma\,(f;D)\right| + \\ &\qquad + \left|\sigma\left(f;\hat{D}\right) - (HK)\int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |f\,(a)|\,(t-a) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme existenci vlastní limity (18.6). Nechť je dána posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [a,b]$, přičemž $c_0 = b$, $c_{n+1} < c_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $c_n \to a$ pro $n \to \infty$. Nechť δ_n je kalibr na intervalu $[c_n, c_{n-2}]$ pro $n > 1$ s vlastností, že pro každé δ_n-jemné dělení D intervalu $[c_n, c_{n-2}]$ je

$$\left|\sigma\,(f;D) - (HK)\int\limits_{c_n}^{c_{n-2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Následně vybereme $N \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo

$$\left|(HK)\int_t^{c_0} f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{c\to a+}(HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \qquad t\in(a,c_N]$$

a zároveň

$$|f(a)|\,(c_N - a) < \varepsilon.$$

Na intervalu $[a,b]$ definujme kalibr δ jako

$$\delta(x) = \begin{cases} c_N - a, & x = a;\\ c_0 - c_1, & x\in(c_1,c_0];\\ \min\{\delta_n(x), c_{n-2}-c_n\}, & x\in(c_n,c_{n-1}],\ n\ge 2.\end{cases}$$

Nyní uvažujme jednak δ-jemné dělení D intervalu $[a,b]$ a také dělení $D_n \subseteq D$ nejmenšího intervalu obsahujícího $[c_n, c_{n-1}]$. Označme jako I_n sjednocení dělících podintervalů v D_n. Tedy D_n je δ_n-jemné dělení na I_n, přičemž $I_1 \subseteq [c_1, c_0]$ a $I_n \subseteq [c_n, c_{n-2})$. Ze Saksova–Henstockova lemmatu (tj. Lemmatu 2) pak obdržíme nerovnost

$$\left|(HK)\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f;D_n)\right| \le \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Protože platí

$$\begin{aligned}&\left|\lim_{c\to a+}(HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f;D)\right| \le\\ &\le |f(a)|\,(c_N-a) + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[(HK)\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f;D_n)\right]\right| +\\ &\quad + \left|\lim_{c\to a+}(HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - (HK)\int_{c_N}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon = 3\varepsilon,\end{aligned}$$

funkce f je HK integrovatelná a platí (18.7). $\square$

Problém 154 *Dokažte analogicky jako Větu 51, že pro HK integrovatelnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,c]$ pro $c \in (a,b)$ platí následující tvrzení. Integrál $(HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje právě tehdy, když existuje vlastní limita*

$$\lim_{c\to b-}(HK)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě pak platí identita

$$(HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b-}(HK)\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problém 155 *Uvažujte funkci*

$$h(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & x \in [0,1); \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Ukažte s využitím Problému 154, že tato funkce je HK integrovatelná na intervalu $[0,1]$, resp. určete příslušnou hodnotu Henstockova–Kurzweilova integrálu.

Problém 156 *Dokažte, že pro funkci $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, která je HK integrovatelná na $[a,b]$, platí*

$$\lim_{x\to v}\left((HK)\int\limits_a^x h(t)\,\mathrm{d}t + h(v)\,(v-x)\right) = (HK)\int\limits_a^v h(x)\,\mathrm{d}x$$

pro $v \in (a,b)$.

Problém 157 *Uvažte funkci*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(-1)^n}{x}, & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ n \in \mathbb{N}; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Určete, čemu je roven integrál

$$(HK)\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Pro každé $x > 0$ máme jako primitivní funkci k $y = 1/x$ funkci $F(x) = \log x$, tj. přirozený logaritmus. Dále platí

$$(HK)\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n (HK)\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\left(\log\frac{1}{n} - \log\frac{1}{n+1}\right).$$

Vezmeme-li v úvahu Důsledek 2, potom pro $m \geq 3$, $m \in \mathbb{N}$ obdržíme

$$(HK)\int_{\frac{1}{m}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = (HK)\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m-1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + (HK)\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{m-1} (HK)\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{m-1} (-1)^n \left(\log\frac{1}{n} - \log\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m-1} (-1)^n \log\frac{n+1}{n}.$$

Integrál

$$\int_{c}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

má pro

$$\frac{1}{m+1} < c < \frac{1}{m}$$

hodnotu mezi čísly

$$(HK)\int_{\frac{1}{m+1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (HK)\int_{\frac{1}{m}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

neboť funkce f je na intervalu $[1/(m+1), 1/m]$ monotónní. Z rovnosti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\frac{n+1}{n} = -\log\frac{\pi}{2}$$

proto dostáváme

$$\lim_{c\to 0+} (HK)\int_{c}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\log\frac{\pi}{2}.$$

Z Hakeovy věty pak máme

$$(HK)\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\log\frac{\pi}{2}.$$

Poznamenejme, že pro $x \in (0,1]$ je $|f(x)| = 1/x$, $|f(0)| = 0$ a integrál

$$(HK)\int\limits_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = (HK)\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

neexistuje (jako reálné číslo), neboť

$$\lim_{c\to 0+}(HK)\int\limits_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log 1 - \lim_{c\to 0+}\log c = \infty.$$

$\square$

Kapitola 19

PRIMITIVNÍ FUNKCE PRO HENSTOCKŮV–KURZWEILŮV INTEGRÁL

V návaznosti na Věty 49 a 50 modifikujme pojem primitivní funkce.

Definice 47 *Řekneme, že funkce $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ je* **primitivní funkce** *k funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$* **na otevřeném intervalu** (a,b) *v Henstockově–Kurzweilově smyslu, pokud platí*

$$(HK)\int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d)-F(c) \tag{19.1}$$

pro každé $c,d\in(a,b)$. Obdobně o funkci $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ řekneme, že je **primitivní funkce** *k funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$* **na uzavřeném intervalu** $[a,b]$ *v Henstockově–Kurzweilově smyslu, pokud pro každé $c,d\in[a,b]$ platí* (19.1).

Věta 52 *Je-li funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ taková, že k ní na intervalu (a,b) existuje primitivní funkce $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ v Henstockově–Kurzweilově smyslu, pak $(HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když existují obě vlastní limity $\lim_{x\to a+}F(x)$ a $\lim_{x\to b-}F(x)$. Dále v tomto případě platí rovnost*

$$(HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x)\,.$$

Problém 158 *Dokažte Větu 52.*

Řešení. Předpokládejme existenci integrálu

$$(HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

S pomocí Problému 146 a Věty 48 obdržíme pro každé $c \in (a,b)$ a $d \in (a,b)$ identitu

$$F(d) - F(c) = (HK)\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = (HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - (HK)\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zjevně

$$\lim_{d\to b-}(HK)\int_d^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Pak ale

$$\lim_{d\to b-} F(d) = (HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + F(c) - \lim_{d\to b-}(HK)\int_d^b f(x)\ \mathrm{d}x =$$
$$= (HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + F(c).$$

Podobně můžeme ukázat, že v levém krajním bodě existuje vlastní limita zprava

$$\lim_{d\to a+} F(d) = -(HK)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + F(c).$$

Úpravami získáme

$$\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) =$$
$$= (HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + F(c) - \left(-(HK)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + F(c)\right) =$$
$$= (HK)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + (HK)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = (HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

K důkazu opačné implikace předpokládejme, že existují vlastní limity

$$\lim_{x\to a+} F(x)\,, \qquad \lim_{x\to b-} F(x)\,.$$

Z existence $\lim_{x\to a+} F(x)$ plyne existence limity

$$\lim_{d\to a+} (HK)\int_d^c f(x)\ \mathrm{d}x = F(c) - \lim_{d\to a+} F(d)\,.$$

Z Věty 51 pak máme

$$(HK)\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = F(c) - \lim_{d\to a+} F(d)\,.$$

Analogicky obdržíme totéž pro limitu $\lim_{x\to b-} F(x)$, když uvážíme Problém 154. Nyní už jen stačí užít pravidlo návaznosti (tj. Větu 48) a získáme

$$\begin{aligned}(HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (HK)\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + (HK)\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x = \\ &= F(c) - \lim_{d\to a+} F(d) + \lim_{d\to b-} F(d) - F(c) = \\ &= \lim_{d\to b-} F(d) - \lim_{d\to a+} F(d)\,.\end{aligned}$$

□

Kapitola 20

INTEGRAČNÍ METODY PRO HENSTOCKŮV–KURZWEILŮV INTEGRÁL

Začneme metodou per partes (a využijeme Definici 47).

Věta 53 *Jsou-li funkce $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitivní funkce k funkcím $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ v Henstockově–Kurzweilově smyslu, pak platí, že $F \cdot g + f \cdot G : [a, b] \to \mathbb{R}$ je HK integrovatelná funkce a*

$$(HK)\int\limits_a^b [F(x)g(x) + f(x)G(x)]\,\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Problém 159 *Dokažte Větu 53.*

Řešení. Mějme $\varepsilon > 0$ libovolně zvolené. Věta 51 a Problém 154 implikují spojitost funkcí F a G na intervalu $[a, b]$. Odtud máme, že existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in [a, b]$ je $|F(x)| \leq K$ a $|G(x)| \leq K$. Dále Věta 52 zajišťuje existenci kalibru $\tilde{\delta}$ na intervalu $[a, b]$ takového, že je

$$\left| \sigma\left(f; D\right) - (HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

a

$$\left| \sigma\left(g; D\right) - (HK)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

pro každé $\tilde{\delta}$-jemné dělení D intervalu $[a,b]$. Nyní zvolíme takový kalibr δ, pro který bude platit

$$0 < \delta(x) < \min\left\{\tilde{\delta}(x), \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+|f(x)|+|g(x)|+|f(x)|\,|g(x)|}\right\}$$

pro všechna $x \in [a,b]$. Pokud uvážíme dělení

$$D = \{(\omega_j, [x_{j-1}, x_j])\,;\ j \in \{1,\dots,n\}\}$$

intervalu $[a,b]$, dostaneme pro něj odhad

$$\begin{aligned}
&|\sigma\left(Fg+fG; D\right) - [F(b)G(b) - F(a)G(a)]| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |[F\left(\omega_j\right) g\left(\omega_j\right) + f\left(\omega_j\right) G\left(\omega_j\right)]\left(x_j - x_{j-1}\right) - \\
&\qquad\qquad - [F\left(x_j\right) G\left(x_j\right) - F\left(x_{j-1}\right) G\left(x_{j-1}\right)]|\,.
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že je $\omega_j = x_j$ pro všechna $j \in \{1,\dots,n\}$ a uvažme

$$\begin{aligned}
X_j := |\,&[F\left(\omega_j\right) g\left(\omega_j\right) + f\left(\omega_j\right) G\left(\omega_j\right)]\left(x_j - x_{j-1}\right) - \\
&- [F\left(x_j\right) G\left(x_j\right) - F\left(x_{j-1}\right) G\left(x_{j-1}\right)]\,|,
\end{aligned}$$

tj. j-tý člen součtu, který se vyskytuje u výše uvedené nerovnosti na pravé straně. Z

$$F\left(x_j\right) - F\left(x_{j-1}\right) = (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x$$

plyne

$$\begin{aligned}
F\left(x_{j-1}\right) = {} & F\left(\omega_j\right) + f\left(\omega_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right) - \\
& - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\omega_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right)
\end{aligned}$$

a obdobně

$$\begin{aligned}
G\left(x_{j-1}\right) = {} & G\left(\omega_j\right) + g\left(\omega_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right) - \\
& - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x - g\left(\omega_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right).
\end{aligned}$$

Pokud nyní opět dosadíme do výrazu, který se vyskytuje u výše uvedené nerovnosti na pravé straně, obdržíme

$$\begin{aligned} X_j \leq{} & |F(\omega_j)\, g(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})| + |f(\omega_j)\, G(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})| - \\ & - |F(\omega_j)\, G(\omega_j)| + \\ & + \left(|F(\omega_j)| + \left| f(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1}) - (HK)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \right. \\ & \left. + |f(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})| \right) \times \\ & \times \left(|G(\omega_j)| + \left| g(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1}) - (HK)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| + \right. \\ & \left. + |g(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})| \right). \end{aligned}$$

Odsud máme

$$\begin{aligned} X_j \leq{} & \left| f(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1}) - (HK)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \times \\ & \qquad \times \left| g(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1}) - (HK)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| + \\ & + \left(|F(\omega_j)| + |f(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})|\right) \times \\ & \qquad \times \left| g(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1}) - (HK)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| + \\ & + \left(|G(\omega_j)| + |g(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})|\right) \times \\ & \qquad \times \left| f(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1}) - (HK)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \\ & + |f(\omega_j)|\,|g(\omega_j)|\,(x_j - x_{j-1})^2 . \end{aligned}$$

Pro všechna $x \in [a,b]$ máme $|F(x)| \leq K$, $|G(x)| \leq K$. Z volby kalibru δ pak máme rovněž

$$|f(\omega_j)\,(x_j - x_{j-1})| < |f(\omega_j)|\, 2\delta(\omega_j) < \varepsilon,$$

$$|g(\omega_j)(x_j - x_{j-1})| < |g(\omega_j)| \, 2\delta(\omega_j) < \varepsilon,$$
$$|f(\omega_j)| \, |g(\omega_j)(x_j - x_{j-1})| < |f(\omega_j)| \, |g(\omega_j)| \, 2\delta(\omega_j) < \varepsilon.$$

Nyní použijeme všechny tyto nerovnosti a Lemma 2 a získáme

$$X_j < [\varepsilon + (K+\varepsilon)] \left| g(\omega_j)(x_j - x_{j-1}) - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| +$$
$$+ (K+\varepsilon) \left| f(\omega_j)(x_j - x_{j-1}) - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Součet přes $j \in \{1, \ldots, n\}$ dává

$$|\sigma(Fg + fG; D) - [F(b)G(b) - F(a)G(a)]| <$$
$$< (K + 2\varepsilon) \sum_{j=1}^{n} \left| g(\omega_j)(x_j - x_{j-1}) - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| +$$
$$+ (K+\varepsilon) \sum_{j=1}^{n} \left| f(\omega_j)(x_j - x_{j-1}) - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \varepsilon(b-a).$$

Pokud

$$\sum_{j=1}^{n} \left| f(\omega_j)(x_j - x_{j-1}) - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^{n} \left| g(\omega_j)(x_j - x_{j-1}) - (HK) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \varepsilon,$$

pak obdržíme

$$|\sigma(Fg + fG; D) - [F(b)G(b) - F(a)G(a)]| <$$
$$< (K + 2\varepsilon)\varepsilon + (K+\varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(b-a) = (2K + 3\varepsilon + b - a)\varepsilon.$$

Tím jsme větu dokázali, neboť $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně. □

Kapitolu zakončíme verzí substituční metody pro Henstockův–Kurzweilův integrál.

Věta 54 *Nechť je dána funkce $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, která je spojitá a neklesající na intervalu $[a, b]$, a dále funkce $f : [\gamma(a), \gamma(b)] \to \mathbb{R}$. Jestliže má funkce γ na intervalu $[a, b]$ konečnou derivaci, pak existuje-li jeden z integrálů*

$$(HK) \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (HK) \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$(HK) \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = (HK) \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kapitola 21

SROVNÁNÍ RŮZNÝCH TYPŮ INTEGRÁLŮ

V této kapitole se zaměříme na srovnání Henstockova–Kurzweilova integrálu s dalšími typy integrálů. V kontextu také připomeneme definice integrálů ze základních kurzů matematické analýzy.

21.1 Riemannův integrál

Definice 48 *Pro ohraničenou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení s význačnými body*

$$D = \{(\nu_i, [x_{i-1}, x_i])\,;\, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

nazýváme **Riemannovým integrálním součtem** *příslušným funkci f a dělení D číslo*

$$\rho\,(f; D) = \sum_{i=1}^{n} f\,(\nu_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Dále $J \in \mathbb{R}$ nazýváme **Riemannovým integrálem** *funkce f na intervalu $[a, b]$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\vartheta > 0$ tak, že pro všechna dělení D intervalu $[a, b]$ s normou menší než ϑ je*

$$|\rho(f; D) - J| < \varepsilon.$$

Riemannův integrál funkce f na $[a, b]$ značíme jako

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = J.$$

Množinu všech funkcí integrovatelných v Riemannově smyslu na $[a, b]$ potom značíme $\mathcal{R}[a, b]$.

Poznámka 14 *Riemannův integrál se liší od Henstockova–Kurzweilova integrálu v tom smyslu, že u Henstockova–Kurzweilova integrálu musí být dělení tak jemné, jak to vyžaduje kalibr (nikoli jenom dle normy dělení). Tento „nepatrný“ rozdíl však implikuje, že množina HK integrovatelných funkcí je podstatně větší než množina riemannovsky integrovatelných funkcí.*

Věta 55 *Nechť existuje* $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*, tj. Riemannův integrál na intervalu* $[a,b]$ *funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*. Pak existuje rovněž* $(HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$(HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problém 160 *Dokažte Větu 55.*

Problém 161 *Uveďte příklad funkce, která je HK integrovatelná na* $[0,1]$*, ale není integrovatelná v Riemannově smyslu na* $[a,b]$*.*

21.2 Newtonův integrál

Definice 49 *Pro funkci* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*, k níž existuje funkce* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *taková, že* $F'(x)=f(x)$*,* $x\in[a,b]$*, definujeme* **Newtonův integrál** *této funkce jako*

$$(N)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a). \tag{21.1}$$

Množinu všech funkcí integrovatelných v Newtonově smyslu na $[a,b]$ *značíme jako* $\mathcal{N}[a,b]$*.*

Věta 56 *Má-li funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *Newtonův integrál* $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*, pak existuje rovněž Henstockův–Kurzweilův integrál* $(HK)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$(HK)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{21.2}$$

Problém 162 *Dokažte Větu 56.*

Řešení. Nechť $\varepsilon>0$ je libovolné a existuje Newtonův integrál (21.1). Využijeme přímo definici derivace. Pro každé $\omega\in[a,b]$ existuje $\delta(\omega)>0$, pro které

$$\left|\frac{F(x)-F(\omega)}{x-\omega}-f(\omega)\right|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\qquad x\in[a,b],$$

pokud

$$0 < |x - \omega| < \delta(\omega),$$

a tedy

$$|F(x) - F(\omega) - f(\omega)(x - \omega)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - \omega|, \qquad x \in [a, b],$$

když $0 \leq |x - \omega| < \delta(\omega)$. Je-li

$$\omega - \delta(\omega) < x \leq \omega \leq y < \omega + \delta(\omega),$$

potom

$$\begin{aligned}
&|F(y) - F(x) - f(\omega)(y - x)| \leq \\
&\leq |F(y) - F(\omega) - f(\omega)(y - \omega)| + \\
&\qquad + |F(\omega) - F(x) - f(\omega)(\omega - x)| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (|y - \omega| + |\omega - x|) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (y - x).
\end{aligned}$$

Pokud je

$$D = \{(\nu_j, [x_{j-1}, x_j])); j \in \{1, \dots, n\}\}$$

libovolné δ-jemné dělení intervalu $[a, b]$, obdržíme

$$\begin{aligned}
\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f; D)\right| &= \left|F(b) - F(a) - \sum_{j=1}^{n} f(\nu_j)(x_j - x_{j-1})\right| = \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} [F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(\nu_j)(x_j - x_{j-1})]\right| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proto Henstockův–Kurzweilův integrál existuje a platí (21.2). Poznamenejme, že důkaz lze provést také s pomocí Věty 49. □

Problém 163 *Uveďte příklad funkce, která je HK integrovatelná na* $[0, 1]$*, ale není integrovatelná v Newtonově smyslu na* $[0, 1]$.

21.3 Lebesgueův integrál

Nejprve připomeneme zavedení Lebesgueova integrálu, což je možné provést mnoha ekvivalentními způsoby (je tedy možné, že zde prezentovaná výstavba je odlišná od té, která je prováděna ve většině základních kurzů matematické analýzy). Pojem lebesgueovsky měřitelné množiny však již nepřipomínáme (jeho zavedení je standardizované). Podobně integrál jednoduché funkce nepřipomínáme (jeho hodnota je zřejmá).

Definice 50 *O funkci* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *řekneme, že je na intervalu* $[a, b]$ **měřitelná v Lebesgueově smyslu**, *jestliže pro všechna* $c < d$ *je množina*

$$h^{-1}\left([c, d]\right) = \{x \in [a, b];\, h(x) \in [c, d]\}$$

lebesgueovsky měřitelná.

Definice 51 *Řekneme, že funkce* h *je* **jednoduchá** *na* $[a, b]$, *pokud lze interval* $[a, b]$ *vyjádřit jako sjednocení konečného počtu navzájem disjunktních měřitelných množin a funkce* h *je na každé z těchto množin konstantní.*

V souvislosti s Definicí 52 níže připomeňme následující větu.

Věta 57 *Každá měřitelná a nezáporná funkce* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je limitou určité monotonní posloupnosti funkcí, které jsou jednoduché.*

Definice 52 *Pro nezápornou funkci* h, *která je na intervalu* $[a, b]$ *měřitelná, a pro monotonní posloupnost jednoduchých funkcí* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *takovou, že*

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x), \qquad x \in [a, b],$$

definujeme **Lebesgueův integrál nezáporné funkce** h *na* $[a, b]$ *jako*

$$(L)\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Definice 53 *Nechť* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$. **Nezápornou část** *funkce* h *definujeme jako*

$$h_+(x) := \max\{0, h(x)\}, \qquad x \in [a, b]$$

a **nekladnou část** *funkce* h *jako*

$$h_-(x) := \max\{0, -h(x)\}, \qquad x \in [a, b].$$

Definice 54 *Je-li h měřitelná funkce na $[a,b]$ a platí-li*

$$(L)\int\limits_a^b h_+(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \qquad (L)\int\limits_a^b h_-(x)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

pak **Lebesgueův integrál měřitelné funkce** *h na intervalu $[a,b]$ definujeme jako*

$$(L)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x := (L)\int\limits_a^b h_+(x)\,\mathrm{d}x - (L)\int\limits_a^b h_-(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množinu všech funkcí, které jsou integrovatelné v Lebesgueově smyslu na intervalu $[a,b]$, značíme symbolem $\mathcal{L}[a,b]$.

Lemma 3 *Pro každé $\varepsilon > 0$ a pro libovolnou funkci $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, která má na intervalu $[a,b]$ Lebesgueův integrál, existují zdola polospojitá funkce $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ a shora polospojitá funkce $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ (viz Kapitola 1), pro které je*

$$u(x) > h(x), \qquad v(x) < h(x), \qquad x \in [a,b]$$

a

$$(L)\int\limits_a^b u(x)\,\mathrm{d}x - (L)\int\limits_a^b v(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Problém 164 *Pomocí Lemmatu 3 dokažte, že pokud má funkce $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ Lebesgueův integrál, pak je na $[a,b]$ HK integrovatelná a platí*

$$(HK)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 15 *Doplňme, že pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a < b$ existují funkce, které jsou HK integrovatelné na intervalu $[a,b]$, ale nejsou lebesgueovsky integrovatelné na $[a,b]$.*

Připomeňme ještě dobře známý vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu.

Věta 58 *Jestliže pro funkci $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ existuje na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál $(R)\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$, pak existuje také Lebesgueův integrál $(L)\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ a platí*

$$(R)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 16 *V základních kurzech matematické analýzy je uváděn příklad funkce, která má Lebesgueův integrál na obecném nedegenerovaném intervalu* $[a, b]$*, ale není integrovatelná v Riemannově smyslu na* $[a, b]$*. Viz mj. Definice 5.*

Jádrem této kapitoly byly tedy ostré inkluze

$$\mathcal{N}[a, b] \subset HK[a, b], \qquad \mathcal{R}[a, b] \subset \mathcal{L}[a, b] \subset HK[a, b].$$

IV. ŘADY

Kapitola 22

KRITÉRIA KONVERGENCE ŘAD S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Vedle základních kritérií konvergence nekonečných číselných řad s nezápornými členy (např. (limitní) srovnávací, podílové, odmocninové či integrální) existují další méně využívaná, avšak užitečná, kritéria pro rozhodování o konvergenci, resp. divergenci číselných řad. Text této kapitoly vychází ze sbírky [6].

Věta 59 (Raabeovo kritérium) *Nechť je $a_n > 0$ pro všechna dostatečně velká n a nechť existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Potom platí:

(i) *jestliže $L > 1$, řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje;*

(ii) *jestliže $L < 1$, řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Poznámka 17 *Podotkněme, že Raabeovo kritérium je silnější než hojně využívané limitní podílové kritérium. Pokud tedy odvodíme konvergenci (nebo divergenci) pomocí limitního podílového kritéria, lze ji obdržet rovněž užitím Raabeova kritéria. To neplatí naopak, jak ukazují příklady níže.*

Problém 165 *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Řešení. Raabeovo kritérium dává

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+1}{2(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1,$$

a tedy zadaná řada diverguje. Snadno lze ověřit, že aplikováním limitního podílového kritéria nic nezjistíme, protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = 1.$$

□

Problém 166 *Užitím Raabeova kritéria určete, zda řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+2\right)\cdots\left(\sqrt{2}+n\right)}$$

konverguje, nebo diverguje. Dále ukažte, že nelze použít limitní podílové kritérium.

Věta 60 (Cauchyovo kondenzační kritérium) *Nechť* $\{a_n\}_{n=2^N}^{\infty}\subset[0,\infty)$ *je nerostoucí posloupnost. Potom platí, že řada* $\sum_{n=2^N}^{\infty}a_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{k=N}^{\infty}2^k a_{2^k}$*.*

Problém 167 *Aplikováním Cauchyova kondenzačního kritéria vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n},$$

kde log *je přirozený logaritmus.*

Poznámka 18 *Dodejme, že příklad v Problému 167 je řešitelný také např. pomocí integrálního kritéria.*

Věta 61 (Gaussovo kritérium) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$ *a nechť*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},\qquad n\in\mathbb{N},$$

přičemž $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená posloupnost. Potom platí:*

(i) *jestliže* $\alpha\geq 1$ *a* $\beta>1$*, řada* $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ *konverguje;*

(ii) *jestliže* $\alpha \le 1$ *a* $\beta \le 1$, *řada* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Problém 168 *Aplikováním Gaussova kritéria při volbě* $\alpha = 1$ *ukažte, že řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^2$$

diverguje.

Věta 62 (Kummerovo kritérium) *Nechť* $a_n > 0$ *pro všechna dostatečně velká* n. *Potom platí:*

(i) *řada* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *je konvergentní, právě když existuje* $A > 0$ *a* $\{p_n\}_{n=N}^{\infty} \subset (0, \infty)$ *tak, že*

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \ge A, \qquad n \ge N,\, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) *řada* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *je divergentní, právě když existuje* $\{p_n\}_{n=N}^{\infty} \subset (0, \infty)$ *splňující*

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$$

a

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \le 0, \qquad n \ge N,\, n \in \mathbb{N}.$$

Problém 169 *Na základě Kummerova kritéria rozhodněte o konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + k \log k}{\sqrt{2} + (k+1) \log (k+1)},$$

kde log *je přirozený logaritmus.*

Věta 63 (Ermakovo kritérium) *Nechť funkce* $f : [N, \infty) \to (0, \infty)$ *je nerostoucí a*

$$a_n = f(n), \qquad n \ge N,\, n \in \mathbb{N}.$$

Nechť dále existuje (jako vlastní či nevlastní) limita

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}.$$

Potom platí:

(i) *jestliže* $L < 1$, *řada* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

(ii) *jestliže* $L > 1$, *řada* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Problém 170 *Užitím Ermakova kritéria v závislosti na kladném parametru* α *rozhodněte o konvergenci řady*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n},$$

kde log *je přirozený logaritmus.*

Problém 171 *Rozhodněte, zda konverguje řada*

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} + \cdots$$

v závislosti na kladných parametrech α, β, γ.

Problém 172 *Zjistěte, zda konverguje řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^{\alpha}$$

v závislosti na reálném parametru α.

Problém 173 *V závislosti na kladných parametrech* α, β *rozhodněte o konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + k \log k}{\beta + (k+1) \log (k+1)},$$

kde log *je přirozený logaritmus.*

Kapitola 23

CESÀROVA SOUČTOVÁ METODA

V této a následujících 2 kapitolách se zaměříme na přiřazování reálných součtů i jistým nekonvergentním řadám.

Definice 55 *Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s částečnými součty*

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \qquad k \in \mathbb{N}$$

se zavádí **Cesàrův součet** *jako*

$$S := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

Poznámka 19 *Je třeba doplnit předchozí definici. Cesàrův součet představuje konvergenci posloupnosti průměrů částečných součtů. Tato konvergence ale nemusí nastat. Je tak třeba hledat limitu posloupnosti složenou z průměrů již uvažovaných průměrů. Tento krok však nemusí stačit, ale lze pokračovat stejným způsobem dál. Dodejme, že konvergence nemusí nastat v žádném konečném kroku.*

Definice 56 *Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *položme*

$$K_n^0 := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$
$$K_n^1 := K_1^0 + K_2^0 + K_3^0 + \cdots + K_n^0,$$
$$K_n^2 := K_1^1 + K_2^1 + K_3^1 + \cdots + K_n^1,$$
$$\vdots$$

$$K_n^j := K_1^{j-1} + K_2^{j-1} + K_3^{j-1} + \cdots + K_n^{j-1},$$
$$\vdots$$

přičemž K_n^0 *značí* n*-tý částečný součet,* K_n^1 *značí* n*-tý částečný součet částečných součtů a tak dále. Nechť dále* $b_1 = 1$ *a* $b_j = 0$ *pro* $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$*. Pro tuto konkrétní číselnou posloupnost označíme odpovídající hodnoty* K_n^j *jako* L_n^j*, tj. klademe*

$$L_n^0 := 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = \binom{n-1}{0},$$

$$L_n^1 := L_1^0 + L_2^0 + L_3^0 + \cdots + L_n^0 = \binom{n+0}{1},$$

$$L_n^2 := L_1^1 + L_2^1 + L_3^1 + \cdots + L_n^1 = \binom{n+1}{2},$$

$$\vdots$$

$$L_n^j := L_1^{j-1} + L_2^{j-1} + L_3^{j-1} + \cdots + L_n^{j-1} = \binom{n+j-1}{j},$$

$$\vdots$$

Nechť $n, j \in \mathbb{N}$*. Definujeme* **Cesàrův** n**-tý částečný součet pro** j**-tou posloupnost průměrů** *jako podíl*

$$S_n^j := \frac{K_n^j}{L_n^j}$$

a **Cesàrův součet pro** j**-tou posloupnost průměrů** *jako limitu*

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n^j = \lim_{n\to\infty} \frac{K_n^j}{L_n^j}.$$

Poznámka 20 *Pro Cesàrův součet se rovněž používá zápis součtu ve tvaru* $(K, j)S$*, kde* $j \in \mathbb{N}$ *udává, v pořadí která posloupnost daných průměrů konverguje k příslušnému součtu.*

Problém 174 *Dokažte, že konvergentní řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se součtem* S *má zároveň Cesàrův součet, který je také roven* S*, tj.* $(K, 1)S = S$*.*

Řešení. Předpokladem je to, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní se součtem S, což znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Ukážeme, že Cesàrův součet je roven také S, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k = S.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolně dané. Uvažme v absolutní hodnotě rozdíl n-tého členu Cesàrova součtu a součtu dané konvergentní řady, tj.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k - S\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k - S)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k - S| = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|s_k - S| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|s_k - S|,\end{aligned}$$

přičemž provedeme volbu p tak, aby pro každé $k > p$ platilo

$$|s_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Možnost zvolit takto p vychází z předpokladu konvergence posloupnosti částečných součtů k S. V dalším nechť je $N \in \mathbb{N}$ dostatečně velké tak, aby

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|s_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro všechna $n > N$. Celkem pak dostáváme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|s_k - S| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|s_k - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}(n-p)\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$

Poznámka 21 *Tvrzení uvedené v Problému 174 se v literatuře označuje pod pojmem* **regularita Cesàrovy součtové metody.**

Problém 175 *Dokažte, že Cesàrův součet je lineární.*

Problém 176 *Stanovte Cesàrův součet Grandiho řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Problém 177 *Uvažte nekonvergentní nekonečnou řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots$$

Zjistěte, jestli má tato řada Cesàrův součet. Příp. ho určete.

Kapitola 24

ÁBELOVA SOUČTOVÁ METODA

V této kapitole jsou využívány následující pojmy a znalosti z teorie komplexních mocninných řad.

Definice 57 **Komplexní mocninnou řadou** *se středem* $c \in \mathbb{C}$ *a koeficienty* $a_n \in \mathbb{C}$ *rozumíme nekonečnou řadu tvaru*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

přičemž $z \in \mathbb{C}$ *je proměnná.*

Než se dostaneme k problémům týkajících se Ábelovy součtové metody, shrneme základní tvrzení platná pro konvergenci komplexních mocninných řad.

Lemma 4 *Buď* $z_0 \neq c$ *bod, v němž mocninná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n$ *konverguje. Pak tato řada absolutně konverguje pro každé* $z \in \mathbb{C}$*, které splňuje nerovnost*

$$|z-c| \leq R,$$

kde $R < |z_0 - c|$*.*

Problém 178 *Dokažte Lemma 4.*

Poznámka 22 *Podle Lemmatu 4 mocninná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n$ *konverguje na množině, která je složena z vnitřku kruhu a části jeho hraniční kružnice. Tento konvergenční kruh je určen středem* c *a poloměrem* r*, kterému se říká* **poloměr konvergence***.*

Věta 64 *Nechť je*

$$0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty.$$

Potom pro poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n$ *platí*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Je-li

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

pak $r = \infty$. *Pokud*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty,$$

je $r = 0$.

Problém 179 *Dokažte Větu 64.*

Problém 180 *Určete poloměr konvergence (příp. obor konvergence) pro komplexní mocninnou řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n^2+3n+2}\, z^n.$$

Až nyní se dostáváme k Ábelově součtové metodě.

Definice 58 *Pro komplexní řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *definujeme její* **Ábelův součet** *jako limitu*

$$\lim_{z\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

kde $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *a limita pro* $z \to 1$ *je uvažována na části otevřeného jednotkového kruhu dané nerovností*

$$|1-z| \le L(1-|z|)$$

pro jistou konstantu L, *tj. ve* **Stolzově prostoru**.

Poznámka 23 *Ábelův součet tedy dle Definice 58 existuje za předpokladu existence součtu řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, *resp. limity tohoto součtu pro* $z \to 1$ *ve Stolzově prostoru.*

Poznámka 24 *Nutná podmínka pro existenci Ábelova součtu je zřejmě to, aby pro koeficienty mocninné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *platila nerovnost*

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \ge 1.$$

Věta 65 (Ábelova věta) *Je-li nekonečná komplexní řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, potom pro*

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1,\, z \in \mathbb{C}$$

platí, že řada napravo konverguje pro $|z| < 1$ *a*

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

přičemž limita pro $z \to 1$ *je uvažována ve Stolzově prostoru.*

Problém 181 *Ověřte linearitu Ábelovy součtové metody.*

Problém 182 *Uvažujte Grandiho řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$. *Jaký je Ábelův součet této řady?*

Problém 183 *Uvažujte řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}.$$

Určete její součet pomocí Ábelovy součtové metody.

Kapitola 25

BORELOVY SOUČTOVÉ METODY

Definice 59 *Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *definujeme její součet získaný* **Borelovou exponenciální metodou** *jako limitu*

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} s_n,$$

kde

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Definice 60 *Pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *definujeme její součet získaný* **Borelovou integrální metodou** *jako*

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} a_n \,\mathrm{d}x.$$

Problém 184 *Dokažte, že Borelova exponenciální metoda a Borelova integrální metoda jsou lineární.*

Problém 185 *Dokažte, že Borelova exponenciální metoda je regulární, tj. dokažte, že v případě konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dává stejný součet také Borelova exponenciální metoda.*

Řešení. Je třeba dokázat, že pokud

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,$$

potom
$$s = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, s_n.$$
Předně je
$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, s_n = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \sum_{i=1}^{n} a_i \right).$$
Dále vyjádříme
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \sum_{i=1}^{n} a_i \right) =$$
$$= \frac{x}{1!}\, a_1 + \frac{x^2}{2!}\,(a_1 + a_2) + \frac{x^3}{3!}\,(a_1 + a_2 + a_3) + \frac{x^4}{4!}\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \cdots$$
Následně provedeme vytýkání a_n se ziskem
$$a_1 \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right) + a_2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right) +$$
$$+ a_3 \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right) + \cdots$$
První závorka odpovídá nekonečnému rozvoji funkce e^x a každá další závorka část tohoto rozvoje postrádá. My tuto chybějící část nyní do příslušné závorky doplníme. Získáme tak
$$a_1\mathrm{e}^x + a_2 \left(\mathrm{e}^x - \frac{x}{1!} \right) + a_3 \left(\mathrm{e}^x - \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \right) \right) + a_4 \left(\mathrm{e}^x - \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \right) + \cdots$$
Tento výsledek zjednodušíme do tvaru
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\mathrm{e}^x - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \right) \right).$$
Dostáváme tak přepis původní mocninné řady v Borelově exponenciální metodě, kde se vyskytuje funkce e^x, a to
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\mathrm{e}^x - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \right) \right).$$
Odtud ihned plyne
$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, s_n = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\mathrm{e}^x - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \right) \right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \right) \right).$$

Na závěr využijeme dvě skutečnosti – předpoklad, že původní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k s, a fakt, že platí

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{i-1}}{\mathrm{e}^{x}(i-1)!}\right)=1-0=1.$$

Konečně dostáváme

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\lim_{x\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(1-\mathrm{e}^{-x}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,s_n.$$

□

Problém 186 *Podobně jako v Problému 185 dokažte, že Borelova integrální metoda je regulární.*

Problém 187 *Zjistěte, za jaké podmínky dávají Borelova exponenciální metoda a Borelova integrální metoda stejný součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Nápověda: Uvažujte výraz*

$$\mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^n}{n!}\,a_n.$$

Problém 188 *Sečtěte Grandiho řadu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ *pomocí Borelovy exponenciální metody i Borelovy integrální metody.*

Problém 189 *Uvažujte řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}$. *Určete součet této řady nejprve pomocí Borelovy exponenciální metody a poté Borelovy integrální metody.*

V. FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ

Kapitola 26

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ S KONEČNOU VARIACÍ

Nejprve následující definicí připomeneme dělení intervalu (viz Kapitola 14).

Definice 61 **Dělením intervalu** $[a, b]$ *nazýváme každou konečnou posloupnost bodů* $\{x_j\}_{j=0}^n \subset [a, b]$*, která je vzestupně uspořádaná, tj.*

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n,$$

přičemž pro krajní body platí $x_0 = a, x_n = b$*. Označujeme* $D[a, b] = \{x_j\}_{j=0}^n$*. Symbol* $\mathcal{D}[a, b]$ *pak značí množinu všech dělení intervalu* $[a, b]$*. Dále definujeme* **velikost (normu) dělení** *jako*

$$|D[a, b]| := \max_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} (x_j - x_{j-1}),$$

kde

$$D[a, b] = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathcal{D}[a, b].$$

Definice 62 *Pro danou funkci* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a dělení* $D_{[a,b]} = \{x_j\}_{j=0}^n$ *intervalu* $[a, b]$ *klademe*

$$V\left(h, D_{[a,b]}\right) := \sum_{j=1}^{n} |\, h(x_j) - h(x_{j-1})\, |$$

a definujeme

$$\bigvee_a^b h := \sup_{D_{[a,b]} \in \mathcal{D}_{[a,b]}} V\left(h, D_{[a,b]}\right).$$

Takto zavedenou veličinu $\bigvee_a^b h$ *nazýváme* **variací funkce** h *na intervalu* $[a, b]$*.*

Poznámka 25 *Definici 62 je potřeba doplnit.*

- *Definujeme* $\bigvee_a^a h := 0$ *pro* $a \in \mathbb{R}$ *a každou funkci* h*, která je v bodě* $x_0 = a$ *definovaná.*
- *V případě neohraničenosti množiny*

$$\left\{ V\left(h, D_{[a,b]}\right);\ D_{[a,b]} \in \mathcal{D}_{[a,b]} \right\}$$

definujeme $\bigvee_a^b h := \infty$.

Poznámka 26 *Je evidentní, že funkce* h *je konstantní na intervalu* $[a,b]$*, právě když* $\bigvee_a^b h = 0$.

Definice 63 *Funkci* h*, jež je definovaná na* $[a,b]$*, nazýváme* **funkcí s konečnou variací** *na* $[a,b]$*, pokud existuje konstanta* $K \in \mathbb{R}$ *taková, že pro libovolné dělení intervalu* $[a,b]$*, tj. pro každé* $D_{[a,b]} = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathcal{D}_{[a,b]}$*, je splněna nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{n} |\, h(x_j) - h(x_{j-1}) \,| \leq K.$$

K řešení následujícího problému bude potřeba formule pro délku lomené čáry, která spojuje body $[x_j, h(x_j)]$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ grafu spojité funkce h na $[a,b]$, a to

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (h(x_j) - h(x_{j-1}))^2},$$

kde $\{x_j\}_{j=0}^n$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Dále uveďme i vztah pro výpočet délky grafu $d\,(h, [a,b])$ spojité funkce h na intervalu $[a,b]$ ve tvaru

$$d\,(h, [a,b]) := \sup_{\{x_j\}_{j=0}^n \in \mathcal{D}_{[a,b]}} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (h(x_j) - h(x_{j-1}))^2}.$$

Věta 66 (Jordanova věta) *Nechť je funkce* h *spojitá na intervalu* $[a,b]$*. Potom její graf na tomto intervalu má konečnou délku, právě když má tato funkce* h *konečnou variaci na intervalu* $[a,b]$*.*

Problém 190 *Dokažte Jordanovu větu, tj. Větu 66.*

Problém 191 *Mějte funkci* $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ *zadanou předpisem*

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0; \\ x \sin \frac{\pi}{x} & \text{pro } x \in (0,2]. \end{cases}$$

Určete variaci funkce h *na intervalu* $[0,2]$*. Je konečná?*

Problém 192 *Dokažte, že je-li funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ a má na vnitřku tohoto intervalu, tj. na (a,b), ohraničenou derivaci, potom má f konečnou variaci. Dokažte, že je-li navíc funkce $|f'|$ riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$, potom pro variaci funkce f na $[a,b]$ platí*

$$\bigvee_a^b f = \int_a^b \left|f'(x)\right| \,\mathrm{d}x. \tag{26.1}$$

Řešení. Mějme funkci f, která je na intervalu $[a,b]$ spojitá a pro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$\left|f'(x)\right| \le K < \infty,$$

kde konstanta $K > 0$ nezávisí na x. Nechť dále $x, y \in [a,b]$ jsou libovolné. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě víme, že existuje mezi body x a y bod c, tj.

$$c \in (\min\{x,y\}, \max\{x,y\}),$$

tak, že

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Odtud

$$|f(y) - f(x)| \le K\,|y - x|$$

pro každé $x, y \in [a,b]$. Potom pro každé dělení $\{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ máme

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le K \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = K\,(b-a),$$

a proto

$$\bigvee_a^b f \le K\,(b-a).$$

Pro důkaz druhé části tvrzení mějme dáno libovolně $\varepsilon > 0$. V předpokladu věty je, že existuje konečná hodnota Riemannova integrálu

$$\int_a^b \left|f'(x)\right| \,\mathrm{d}x.$$

Proto existuje $\delta > 0$ takové, že nerovnost

$$\left|\sum_{i=1}^n \left|f'(\xi_i)\right| (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \left|f'(x)\right| \,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{26.2}$$

platí pro všechna dělení $\{x_i\}_{i=0}^n$ uvažovaného intervalu $[a,b]$, pro které

$$|\{x_i\}_{i=0}^n| < \delta, \tag{26.3}$$

a také pro body ξ_i, pro které je

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i \in \{1, \dots, n\}. \tag{26.4}$$

Definice variace funkce říká, že existuje dělení $\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ takové, že platí nerovnost (26.3) a zároveň

$$\bigvee_a^b f \geq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \bigvee_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26.5}$$

Dále dle Lagrangeovy věty existují body ξ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující (26.4) takové, že

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left|f'(\xi_i)\right| (x_i - x_{i-1})\,. \tag{26.6}$$

Celkem z (26.2), (26.5) a (26.6) obdržíme

$$\begin{aligned}
&\left| \bigvee_a^b f - \int_a^b \left| f'(x) \right| \mathrm{d}x \right| \leq \\
&\leq \left| \bigvee_a^b f - \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right| + \\
&+ \left| \sum_{i=1}^n \left|f'(\xi_i)\right| (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí (26.1). $\square$

Problém 193 *Ukažte, že identita*

$$\bigvee_a^b h = |h(b) - h(a)|$$

platí pro každou funkci h monotonní na intervalu $[a,b]$.

Problém 194 *Dokažte tzv. pravidlo návaznosti, tj. vztah*

$$\bigvee_a^b h = \bigvee_a^x h + \bigvee_x^b h, \tag{26.7}$$

pro libovolnou funkci $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ a libovolné $x \in [a,b]$.

Kapitola 27

MNOŽINA FUNKCÍ S KONEČNOU VARIACÍ

Definice 64 *Symbolem* $\mathbb{BV}[a,b]$ *je označována množina všech funkcí s konečnou variací na intervalu* $[a,b]$.

Problém 195 *Odvoďte, že pro každé dvě funkce* $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *platí nerovnost*

$$\bigvee_a^b (h_1 + h_2) \leq \bigvee_a^b h_1 + \bigvee_a^b h_2.$$

Věta 67 *Nechť* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je libovolná funkce a* $k \in \mathbb{R}$ *je také libovolné. Potom platí*

$$\bigvee_a^b (k\,h) = |\,k\,| \bigvee_a^b h.$$

Problém 196 *Dokažte platnost Věty 67.*

Problém 197 *Ukažte, že množina všech funkcí s konečnou variací na intervalu* $[a,b]$, *tj.* $\mathbb{BV}[a,b]$, *je normovaný vektorový prostor pro normu zavedenou jako*

$$\|h\| := |h(a)| + \bigvee_a^b h, \qquad h \in \mathbb{BV}[a,b]. \tag{27.1}$$

Poznámka 27 *Protože pro libovolnou funkci* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a každé* $y \in [a,b]$ *je*

$$|h(y)| \leq |h(a)| + |h(y) - h(a)| \leq |h(a)| + \bigvee_a^b h, \qquad y \in [a,b],$$

máme

$$\sup_{y\in[a,b]} |h(y)| \le \|h\| < \infty, \qquad h \in \mathbb{BV}[a,b], \tag{27.2}$$

přičemž norma $\|h\|$ *je definována v* (27.1).

Problém 198 *Ukažte, že množina* $\mathbb{BV}[a,b]$ *tvoří dokonce Banachův prostor.*

Řešení. Z Problému 197 víme, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je normovaný lineární prostor vzhledem k normě definované v (27.1). Jediné, co je tedy třeba dokázat, je úplnost tohoto prostoru, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$ má v $\mathbb{BV}[a,b]$ limitu. Nechť je tedy posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ cauchyovská, tj. platí

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n > n_0,\ m, n \in \mathbb{N})\,(\|f_n - f_m\| < \varepsilon)\,. \tag{27.3}$$

Dle (27.2) máme také

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|, \qquad x \in [a,b].$$

Podle (27.3) je tak pro každé $x \in [a,b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cauchyovská. Proto pro každé $x \in [a,b]$ existuje konečná limita a můžeme zavést funkci

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{27.4}$$

V dalším chceme ukázat, že $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a že posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k f vzhledem k normě prostoru $\mathbb{BV}[a,b]$. Dle (27.1) a (27.3) existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_1$ je

$$\bigvee_a^b f_n \le \|f_n\| \le \|f_{n_1}\| + 1.$$

Odsud snadno vidíme, že číselná posloupnost $\left\{\vee_a^b f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ohraničená. Bolzanova–Weierstrassova věta pak říká, že z této posloupnosti je možné vybrat konvergentní podposloupnost, kdy

$$\lim_{k\to\infty} \bigvee_a^b f_{n_k} = L < \infty.$$

Tato konvergence nám dává pro libovolně zvolené dělení $\{x_i\}_{i=0}^j \in \mathcal{D}[a,b]$ existenci $k_0 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\sum_{i=1}^{j} |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_{i-1})| < L + 1, \qquad k \ge k_0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Odtud ale plyne, že

$$\sum_{i=1}^{j} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{j} |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_{i-1})| \le L + 1,$$

a tedy

$$\bigvee_a^b f = \sup_{\{x_i\}_{i=0}^{j} \in \mathcal{D}[a,b]} \sum_{i=1}^{j} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le L + 1 < \infty.$$

Tím je dokázáno, že $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

Vzhledem k (27.3) také pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro jakékoli dělení $\{x_i\}_{i=0}^{j} \in \mathcal{D}[a,b]$ platí

$$\sum_{i=1}^{j} |\,(f_n - f_m)\,(x_i) - (f_n - f_m)\,(x_{i-1})\,| < \varepsilon, \qquad n, m \ge n_0,\ n, m \in \mathbb{N}.$$

Pak ovšem pro každé $\{x_i\}_{i=0}^{j} \in \mathcal{D}[a,b]$ máme

$$\sum_{i=1}^{j} |\,(f - f_m)\,(x_i) - (f - f_m)\,(x_{i-1})\,| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{j} |\,(f_n - f_m)\,(x_i) - (f_n - f_m)\,(x_{i-1})\,| \le \varepsilon,$$

a proto

$$\bigvee_a^b (f - f_m) \le \varepsilon, \qquad m \ge n_0,\ m \in \mathbb{N}. \tag{27.5}$$

Uvážíme-li (27.5) a přihlédneme-li k (27.4), dostáváme, že posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k funkci f vzhledem k normě $\mathbb{BV}[a,b]$. □

Věta 68 *Pro funkci $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí, že má konečnou variaci na intervalu $[a,b]$, právě když existují takové funkce h_1 a h_2 neklesající na $[a,b]$, že platí*

$$h(x) = h_1(x) - h_2(x), \qquad x \in [a,b].$$

Problém 199 *Dokažte Větu 68.*

Důsledek 3 *Pro libovolnou funkci h s konečnou variací na intervalu $[a,b]$ a pro všechna $r \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ platí, že existují konečné limity*

$$\lim_{x\to r+} h(x), \qquad \lim_{x\to s-} h(x).$$

Problém 200 *Zdůvodněte platnost Důsledku 3.*

Kapitola 28

BODY NESPOJITOSTI FUNKCÍ S KONEČNOU VARIACÍ

Z Věty 12 a z Důsledku 3 vyplývá následující tvrzení (viz Definice 17).

Věta 69 *Každá funkce s konečnou variací má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Navíc všechny její body nespojitosti jsou prvního druhu.*

Definice 65 *Nechť h je funkce s konečnou variací na $[a, b]$. Klademe*

$$\Delta^+ h(x_0) := \lim_{x\to x_0+} h(x) - h(x_0), \qquad x_0 \in [a, b)$$

a

$$\Delta^- h(x_0) := h(x_0) - \lim_{x\to x_0-} h(x), \qquad x_0 \in (a, b].$$

Poznámka 28 *Upozorněme, že Důsledek 3 zajišťuje smysluplnost Definice 65.*

Věta 70 *Nechť h náleží do $\mathbb{BV}[a, b]$ a $T \equiv \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je prostá posloupnost bodů z intervalu (a, b). Pak platí*

$$\left|\Delta^+ h(a)\right| + \left|\Delta^- h(b)\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|\Delta^+ h(t_k)\right| + \left|\Delta^- h(t_k)\right|\right) \le \bigvee_a^b h. \tag{28.1}$$

Problém 201 *Dokažte Větu 70.*

Řešení. Předpokládejme nejprve, že funkce h je neklesající. Potom máme

$$\begin{aligned}&\left|\Delta^+h(a)\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta^+h(t_k)\right| + \left|\Delta^-h(t_k)\right| + \left|\Delta^-h(b)\right| = \\ &= \Delta^+h(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(\Delta^+h(t_k) + \Delta^-h(t_k)\bigr) + \Delta^-h(b).\end{aligned}$$

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ uvažujme libovolné dělení $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\{x_i\}_{i=0}^{n+1} \equiv \{a\} \cup \{t_k;\, k = 1,\dots,n\} \cup \{b\}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ obdržíme

$$\begin{aligned}&\Delta^+h(a) + \sum_{k=1}^{n} \bigl(\Delta^-h(t_k) + \Delta^+h(t_k)\bigr) + \Delta^-h(b) = \\ &= \lim_{x\to a+} h(x) - h(a) + h(t_1) - \lim_{x\to t_1-} h(x) + \lim_{x\to t_1+} h(x) - h(t_1) + \cdots + \\ &\qquad + h(t_n) - \lim_{x\to t_n-} h(x) + \lim_{x\to t_n+} h(x) - h(t_n) + h(b) - \lim_{x\to b-} h(x) = \\ &= \lim_{x\to a+} h(x) - h(a) + h(x_1) - \lim_{x\to x_1-} h(x) + \lim_{x\to x_1+} h(x) - h(x_1) + \cdots + \\ &\qquad + h(x_n) - \lim_{x\to x_n-} h(x) + \lim_{x\to x_n+} h(x) - h(x_n) + h(b) - \lim_{x\to b-} h(x).\end{aligned}$$

Použijeme-li odhady

$$\begin{gathered}h(x_1) - \lim_{x\to x_1-} h(x) \le h(x_1) - \lim_{x\to a+} h(x), \\ \lim_{x\to x_1+} h(x) - h(x_1) \le \lim_{x\to x_2-} h(x) - h(x_1), \\ \vdots \\ h(x_n) - \lim_{x\to x_n-} h(x) \le h(x_n) - \lim_{x\to x_{n-1}+} h(x), \\ \lim_{x\to x_n+} h(x) - h(x_n) \le \lim_{x\to b-} h(x) - h(x_n),\end{gathered}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}&\Delta^+h(a) + \sum_{k=1}^{n} \bigl(\Delta^-h(t_k) + \Delta^+h(t_k)\bigr) + \Delta^-h(b) \le \\ &\le \lim_{x\to a+} h(x) - h(a) + h(x_1) - \lim_{x\to a+} h(x) + \lim_{x\to x_2-} h(x) - h(x_1) + \cdots + \\ &+ h(x_n) - \lim_{x\to x_{n-1}+} h(x) + \lim_{x\to b-} h(x) - h(x_n) + h(b) - \lim_{x\to b-} h(x) = \\ &= h(b) - h(a).\end{aligned}$$

Odtud a z Problému 193 pak víme, že

$$\Delta^+ h(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\Delta^+ h(t_k) + \Delta^- h(t_k)\big) + \Delta^- h(b) \le h(b) - h(a) = \bigvee_a^b h.$$

Pro každou neklesající funkci h na intervalu $[a,b]$ tedy nerovnost (28.1) platí.

Nyní uvažme libovolnou funkci h, která má na intervalu $[a,b]$ konečnou variaci. Definujme pro ni funkce h_1, h_2 jako

$$h_1(x) := \begin{cases} \sup\limits_{\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{D}_{[a,x]}} \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\, h(x_i) - h(x_{i-1})\big)^+ , & x \in (a,b]; \\ 0, & x = a, \end{cases}$$

$$h_2(x) := \begin{cases} \sup\limits_{\{x_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{D}_{[a,x]}} \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\, h(x_i) - h(x_{i-1})\big)^- , & x \in (a,b]; \\ 0, & x = a, \end{cases}$$

přičemž symbol g^+ značí nezápornou část funkce g a symbol g^- její nekladnou část (viz Definice 53). Evidentně

$$\bigvee_a^b h = h_1(b) + h_2(b). \tag{28.2}$$

Dále je

$$\big|\Delta^+ h(v)\big| = \Delta^+ h_1(v) + \Delta^+ h_2(v), \qquad v \in (a,b]$$

a

$$\big|\Delta^- h(w)\big| = \Delta^- h_1(w) + \Delta^- h_2(w), \qquad w \in [a,b).$$

Z výše uvedené první části důkazu pak získáváme

$$\Delta^+ h_1(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\Delta^+ h_1(t_k) + \Delta^- h_1(t_k)\big) + \Delta^- h_1(b) \le h_1(b),$$

$$\Delta^+ h_2(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\Delta^+ h_2(t_k) + \Delta^- h_2(t_k)\big) + \Delta^- h_2(b) \le h_2(b).$$

Pokud tyto dvě nerovnosti sečteme a použijeme (28.2), dokázali jsme tvrzení věty

$$\big|\Delta^+ h(a)\big| + \sum_{k=1}^{n} \big(\big|\Delta^+ h(t_k)\big| + \big|\Delta^- h(t_k)\big|\big) + \big|\Delta^- h(b)\big| \le h_1(b) + h_2(b) = \bigvee_a^b h.$$

$\square$

Tvrzení Věty 70 může být přepsáno do podoby následující věty.

Věta 71 *Pro libovolnou funkci h, která má konečnou variaci na intervalu $[a, b]$, platí*

$$\sum_{x \in [a,b)} \left|\Delta^+ h(x)\right| + \sum_{x \in (a,b]} \left|\Delta^- h(x)\right| \leq \bigvee_a^b h.$$

Kapitola 29

SKOKOVÉ FUNKCE A ROZKLADY FUNKCÍ S KONEČNOU VARIACÍ

Pro potřeby následujících definic nejdříve zavedeme množiny nulové míry.

Definice 66 *Nechť $E \subset \mathbb{R}$. Množina E má* **nulovou míru** *(je nulové míry), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít nejvýše spočetný systém otevřených intervalů $I_j = (a_j, b_j)$, $j \in \mathbb{N}$ takový, že*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

a

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon.$$

Pokud je jistá vlastnost splněna pro všechna $x \in [a, b] \setminus E$, kde $E \subset [a, b]$ je množina nulové míry, potom říkáme, že daná vlastnost platí **skoro všude na** *$[a, b]$, píšeme s.v. na $[a, b]$.*

Definice 67 *Řekneme, že funkce $h \in \mathbb{BV}[a, b]$ je* **singulární**, *jestliže její derivace je rovna nule s.v. na $[a, b]$.*

Definice 68 *Nechť $h : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tuto funkci nazýváme* **jednoduchou skokovou** *funkcí na $[a, b]$, právě když existuje takové dělení $\{x_j\}_{j=0}^{n} \in \mathcal{D}[a, b]$, že h je konstantní na otevřeném intervalu (x_{l-1}, x_l) pro $l \in \{1, \ldots, n\}$.*

Symbolem $\mathbb{S}[a, b]$ bude označována množina všech jednoduchých skokových funkcí na intervalu $[a, b]$.

Definice 69 *Funkci* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *nazýváme* **skokovou** *funkcí, pokud* $h \in \mathbb{S}[a,b]$ *anebo pokud existují posloupnosti*

$$\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \qquad \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$$

a konstanta $c \in \mathbb{R}$ *tak, že současně platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|s_k| + |t_k|) < \infty$$

a

$$h(x) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \left(s_k \chi_{[v_k,b]}(x) + t_k \chi_{(v_k,b]}(x) \right), \qquad x \in [a,b],$$

přičemž funkce χ_I *je (nejen) pro interval* I *zavedena v Definici 7.*

Množinu skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ budeme značit symbolem $\mathbb{B}[a,b]$.

Problém 202 *Rozmyslete si platnost inkluzí*

$$\mathbb{S}[a,b] \subseteq \mathbb{B}[a,b] \subseteq \mathbb{BV}[a,b].$$

Platí příp.

$$\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]?$$

Pokud ostré inkluze platí, uveďte příslušné příklady, které to dokládají.

Problém 203 *Pro libovolnou funkci* $h \in \mathbb{B}[a,b]$ *dokažte, že platí*

$$\bigvee_a^b h = \left|\Delta^+ h(a)\right| + \sum_{x\in(a,b)} \left(\left|\Delta^- h(x)\right| + \left|\Delta^+ h(x)\right|\right) + \left|\Delta^- h(b)\right|.$$

Platí tato identita pro každou funkci s konečnou variací (viz také Věta 71)?

Problém 204 *Ukažte, že každá skoková funkce na* $[a,b]$ *je na tomto intervalu singulární.*

Věta 72 (Jordanův rozklad) *Každou funkci* $h \in \mathbb{BV}[a,b]$ *je možné vyjádřit jako součet*

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x), \qquad x \in [a,b],$$

kde

$$h_1 \in \mathbb{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b], \qquad h_2 \in \mathbb{B}[a,b].$$

Problém 205 *Dokažte Větu 72.*

Věta 73 *Pokud platí*

$$f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x), \qquad x \in [a, b],$$

kde

$$f_1, g_1 \in \mathbb{BV}[a, b] \cap \mathbb{C}[a, b], \qquad f_2, g_2 \in \mathbb{B}[a, b],$$

pak funkce $f_1 - g_1$ *a* $f_2 - g_2$ *jsou konstantní na intervalu* $[a, b]$.

Problém 206 *Dokažte Větu 73.*

Kapitola 30

DALŠÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ S KONEČNOU VARIACÍ

30.1 Derivace funkcí s konečnou variací

V této podkapitole budeme pro množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ integrálem $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$ rozumět Lebesgueův integrál měřitelné funkce f přes množinu M. Platnost jistého vztahu s.v. bude dále znamenat platnost až na množinu Lebesgueovy míry nula a integrovatelnou funkcí budeme rozumět funkci integrovatelnou v Lebesgueově smyslu. Nejprve uvedeme hlavní výsledek o derivacích funkcí s konečnou variací.

Věta 74 (Lebesgueova věta) *Nechť h je funkce s konečnou variací na intervalu $[a,b]$. Potom má vlastní derivaci h' s.v. na $[a,b]$.*

Věta 75 (Leviho věta) *Nechť $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$, pro kterou platí*

$$0 \le h_1(x) \le h_2(x) \le \cdots, \quad x \in [a,b],$$

a taková, že existuje $L > 0$ s vlastností

$$\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x \le L, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Potom platí, že s.v. na $[a,b]$ existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x),$$

funkce h je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 76 (Fatouovo lemma) *Pro posloupnost $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nezáporných měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ platí nerovnost*

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problém 207 *S použitím Leviho věty (tj. Věty 75) dokažte Fatouovo lemma, tj. Větu 76.*

Věta 77 *Je-li funkce h neklesající na intervalu $[a, b]$, potom platí nerovnosti*

$$0 \le \int_a^b h'(x)\,\mathrm{d}x \le h(b) - h(a).$$

Zejména, derivace funkce h je lebesgueovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.

Problém 208 *Použijte Větu 68, Větu 74 (tj. Lebesgueovu větu) a Větu 76 (tj. Fatouovo lemma) k důkazu Věty 77.*

Tím se dostáváme k závěrečnému výsledku této podkapitoly.

Důsledek 4 *Pro funkci $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, která má na intervalu $[a, b]$ konečnou variaci, platí, že její derivace h' je lebesgueovsky integrovatelná na $[a, b]$.*

Problém 209 *Z čeho plyne Důsledek 4?*

30.2 Funkce s konečnou γ-variací

Funkce s konečnou variací mají jedno slabé zobecnění, které je předmětem této podkapitoly (používáme tzv. Youngův přístup).

Definice 70 *Nechť $\gamma > 0$. Je-li číslo*

$$\bigvee_a^b(\gamma) f := \sup_{\{x_j\}_{j=0}^n \in \mathcal{D}[a,b]} \left[\sum_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|^\gamma \right]^{1/\gamma}$$

konečné, potom říkáme, že funkce f, která je definovaná na intervalu $[a, b]$, má **konečnou γ-variaci** *na $[a, b]$. Symbolem $\mathbb{BV}_\gamma([a, b])$ značíme množinu všech funkcí, které mají konečnou γ-variaci na intervalu $[a, b]$.*

Problém 210 *Je množina $\mathbb{BV}_\gamma([a,b])$ vektorovým prostorem?*

Problém 211 *Ukažte, že pro $\gamma \in (0,1)$ a funkci $f \in \mathbb{BV}_\gamma([a,b])$, která není na $[a,b]$ konstantní, existuje v $[a,b]$ bod nespojitosti funkce f.*

Problém 212 *Rozvažte, zda funkce $f \in \mathbb{BV}_\gamma([a,b])$ může mít bod nespojitosti druhého druhu (viz Definice 17). Srovnejte to s případem, kdy $\gamma = 1$.*

Problém 213 *Nechť $\gamma > 0$. Rozhodněte, zda identita*

$$\bigvee_a^b (\gamma) f = \bigvee_a^x (\gamma) f + \bigvee_x^b (\gamma) f$$

platí pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a libovolné $x \in [a,b]$.

Problém 214 *Zjistěte, zda pro každé $\gamma > 0$ a každé dvě funkce $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí nerovnost*

$$\bigvee_a^b (\gamma)\,(f_1 + f_2) \le \bigvee_a^b (\gamma) f_1 + \bigvee_a^b (\gamma) f_2.$$

Dokažte, či uveďte protipříklad.

Kapitola 31

HELLYOVA VĚTA O VÝBĚRU

Obsahem této kapitoly je tzv. Hellyova věta, k jejímuž dokázání jsou potřeba následující lemmata.

Lemma 5 *Nechť je dána libovolná spočetná množina $K \subset [a,b]$ a posloupnost funkcí $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, přičemž tyto funkce jsou definované na intervalu $[a,b]$ a pro jisté $C \in \mathbb{R}$ je*

$$|h_n(x)| \leq C, \qquad x \in [a,b], n \in \mathbb{N}. \tag{31.1}$$

Potom platí, že posloupnost $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obsahuje podposloupnost, která konverguje v každém bodě množiny K.

Problém 215 *Dokažte Lemma 5.*

Lemma 6 *Předpokládejte, že existuje $C \in \mathbb{R}$ tak, že je splněna nerovnost (31.1). Dále nechť jsou funkce h_n, $n \in \mathbb{N}$ neklesající na intervalu $[a,b]$. Potom platí, že existují podposloupnost $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnosti $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a neklesající funkce $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tak, že*

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = h(x), \qquad x \in [a,b].$$

Problém 216 *Dokažte Lemma 6.*

Řešení. Nechť je $N := (\mathbb{Q} \cap (a,b)) \cup \{a\} \cup \{b\}$. Tato množina je spočetná a platí $[a,b] \setminus N \subset (a,b)$. Podle Lemmatu 5 existuje podposloupnost $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (vzestupné) posloupnosti přirozených čísel a také zobrazení $q : N \to \mathbb{R}$, pro které je

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(y) = q(y), \qquad y \in N.$$

Je zřejmé, že pro všechna $y_1 \leq y_2$, $y_1, y_2 \in N$, je

$$q(y_1) \leq q(y_2). \tag{31.2}$$

Definujme dále pro $x \in (a,b) \smallsetminus N$ funkci

$$q(x) := \sup_{y \in N \cap [a,x)} q(y), \tag{31.3}$$

což znamená, že

$$q(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(x), & x \in N; \\ \lim\limits_{\substack{y\to x- \\ y \in N}} q(y), & x \in (a,b) \smallsetminus N. \end{cases}$$

Jako důsledek (31.2) a (31.3) dostáváme, že q je neklesající na intervalu $[a,b]$.

Dále chceme ukázat, že v každém bodě $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je funkce q spojitá, platí

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x_0) = q(x_0). \tag{31.4}$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastností, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je

$$q(x) \in (q(x_0) - \varepsilon, q(x_0) + \varepsilon)\,.$$

Zvolíme-li

$$w_1 \in N \cap (x_0 - \delta, x_0)$$

a

$$w_2 \in N \cap (x_0, x_0 + \delta),$$

máme

$$q(x_0) - \varepsilon < q(w_1) \leq q(x_0) \leq q(w_2) < q(x_0) + \varepsilon.$$

Dále vyberme $\tilde{k}$ takové, že pro každé $k \geq \tilde{k}$ platí nerovnosti

$$q(w_1) - \varepsilon < h_{n_k}(w_1) < q(w_1) + \varepsilon$$

a

$$q(w_2) - \varepsilon < h_{n_k}(w_2) < q(w_2) + \varepsilon.$$

Pro každé $k \geq \tilde{k}$ dostáváme

$$\begin{aligned} q(x_0) - 2\varepsilon < q(w_1) - \varepsilon < h_{n_k}(w_1) \leq h_{n_k}(x_0) \leq \\ \leq h_{n_k}(w_2) < q(w_2) + \varepsilon < q(x_0) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

odkud plyne platnost (31.4).

Dosud jsme dokázali, že pro množinu U bodů nespojitosti funkce q v intervalu (a,b) je

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = q(x), \qquad x \in [a,b] \setminus U.$$

Z Věty 69 plyne, že U je nejvýše spočetná množina. Můžeme proto opět použít Lemma 5 a dokázat, že existuje podposloupnost $\{h_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, která má v každém bodě $x \in U$ limitu $l(x) \in \mathbb{R}$. Definujme

$$h(x) := \begin{cases} q(x), & x \in [a,b] \setminus U; \\ l(x), & x \in U. \end{cases}$$

Pak

$$\lim_{j\to\infty} h_{n_{k_j}}(x) = h(x), \qquad x \in [a,b].$$

Vezmeme-li v potaz, že pokud je funkce na intervalu $[a,b]$ limitou posloupnosti neklesajících funkcí na intervalu $[a,b]$, potom je sama tato funkce neklesající na $[a,b]$, je lemma dokázáno. □

Lemma 7 *Jsou-li funkce $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ a posloupnost $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ takové, že*

$$\bigvee_a^b h_k \le C < \infty, \qquad k \in \mathbb{N},$$

a

$$\lim_{k\to\infty} h_k(x) = h(x), \qquad x \in [a,b],$$

potom

$$\bigvee_a^b h \le C.$$

Problém 217 *Dokažte Lemma 7.*

Věta 78 (Hellyova věta o výběru) *Jestliže pro jisté $C \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou splněny nerovnosti*

$$|h_n(a)| \le C, \qquad \bigvee_a^b h_n \le C,$$

kde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{BV}[a,b]$, potom existuje $h \in \mathbb{BV}[a,b]$ a podposloupnost $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnosti $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takové, že je

$$|h(a)| \le C, \qquad \bigvee_a^b h \le C$$

a

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = h(x), \qquad x \in [a,b].$$

Problém 218 *Dokažte Hellyovu větu o výběru, tj. Větu 78. Využijte k tomu předchozích lemmat, tj. Lemmat 6 a 7.*

VI. ABSOLUTNĚ SPOJITÉ FUNKCE

Kapitola 32

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ABSOLUTNĚ SPOJITÝCH FUNKCÍ

Definice 71 *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je libovolný interval a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* f *je* **absolutně spojitá** *na intervalu* $[a,b]$, *jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro každý konečný systém podintervalů* $(a_j, b_j) \subset [a,b]$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *pro který je splněna nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta, \tag{32.1}$$

je

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Symbol $\mathbb{AC}[a,b]$ *označuje množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu* $[a,b]$.

Podotkněme, že v definici absolutní spojitosti, budeme-li uvažovat $n = 1$, dostáváme spojitost stejnoměrnou. Následující problém ukáže, že naopak to neplatí, tj. ze stejnoměrné spojitosti funkce f na intervalu $[a,b]$ neplyne spojitost absolutní.

Problém 219 *Uvažujte tzv. Cantorovu funkci (také označovanou jako Cantorovy schody), která je zavedena pomocí Cantorova diskontinua na intervalu* $[0,1]$ *následujícím způsobem. Nechť je funkce* $f : [0,1] \to [0,1]$ *ve tvaru*

$$f(x) = \frac{2k-1}{2^n}$$

pro $n \in \mathbb{N}$ *a* $k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$, *která závisí na* $x \in [0,1]$. *Nejdříve se tato funkce definuje ve „spojovacích intervalech“ tak, že se položí*

$$f(x) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3};$$
$$f(x) = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9};$$
$$f(x) = \frac{3}{4}, \qquad \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9};$$
$$\vdots$$

Tímto způsobem zadaná funkce je již definovaná na celém intervalu $[0,1]$ *až na body, které nenáleží do uvažovaných „spojovacích intervalů“ (ani do množiny jejich krajních bodů). Takový bod se označí jako* $\tilde{x}$. *Nechť* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je rostoucí posloupnost, která je složená z krajních bodů „spojovacích intervalů“, a nechť tato posloupnost konverguje k* $\tilde{x}$. *Pak existují limity*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right),$$

kde posloupnost $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je klesající, je složená z krajních bodů „spojovacích intervalů“ a konverguje k* $\tilde{x}$, *přičemž platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right).$$

Jejich společnou hodnotu stačí uvážit jako $f(\tilde{x})$, *čímž se obdrží monotonní spojitá funkce, jež je definovaná na celém intervalu* $[0,1]$. *Tato funkce se pak nazývá Cantorova funkce.*

Ukažte, že Cantorova funkce není absolutně spojitá, tj. zvolte libovolně $\varepsilon < 1$ *a pro všechna* $\delta > 0$ *nalezte systém intervalů* (a_j, b_j), $j \in \{1, \dots, n\}$, *které splňují nerovnost* (32.1), *avšak platí*

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| \geq \varepsilon.$$

Problém 220 *Dokažte, že každá lipschitzovská funkce na intervalu* $[a,b]$ *(viz Definice 26) je na tomto intervalu absolutně spojitá.*

Věta 79 *Pro libovolný interval* $[a,b]$ *a* $t \in (a,b)$ *platí, že je-li funkce* f *absolutně spojitá na intervalu* $[a,t]$ *a současně na intervalu* $[t,b]$, *pak je* f *absolutně spojitá také na intervalu* $[a,b]$.

Problém 221 *Dokažte Větu 79.*

Problém 222 *Dokažte, že množina* $\mathbb{AC}[a,b]$ *tvoří vektorový prostor.*

Věta 80 *Nechť* g *a* h *jsou absolutně spojité funkce na intervalu* $[a,b]$*. Pak jsou na tomto intervalu absolutně spojité také funkce* $|g|$, $g+h$, $g \cdot h$, $\max\{g,h\}$ *a* $\min\{g,h\}$*. Jestliže navíc* $|g(x)| > 0$ *pro* $x \in [a,b]$*, je i funkce* $1/g$ *absolutně spojitá na intervalu* $[a,b]$*.*

Problém 223 *Dokažte všechna tvrzení ve Větě 80.*

Věta 81 *Je-li funkce* f *absolutně spojitá na intervalu* $[a,b]$ *a* $\mathcal{U}$ *nejvýše spočetná množina, potom pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že nerovnost*

$$\sum_{j \in \mathcal{U}} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

je splněna pro každý systém podintervalů $[a_j, b_j] \subset [a,b]$, $j \in \mathcal{U}$ *s vlastnostmi*

$$(a_j, b_j) \cap (a_l, b_l) = \emptyset, \qquad j \neq l,\ j, l \in \mathcal{U} \tag{32.2}$$

a

$$\sum_{j \in \mathcal{U}} (b_j - a_j) < \delta.$$

Problém 224 *Dokažte Větu 81.*

Řešení. Vyjdeme z Definice 71, podle které k danému $\varepsilon > 0$, respektive k $\varepsilon/2$, je přiřazeno jisté $\delta > 0$. Nechť je dále $\mathcal{U}$ nejvýše spočetná množina a pro interval $[a,b]$ uvažme libovolný systém podintervalů $[a_j, b_j]$ pro $j \in \mathcal{U}$ splňující (32.2). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$

odkud plyne

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z definice součtu nekonečné řady pak tvrzení plyne pro celou množinu $\mathbb{N}$, neboť ihned obdržíme

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(b_j) - f(a_j)| = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\square$

Vztah mezi absolutně spojitými funkcemi a funkcemi s konečnou variací je popsán v následující větě.

Věta 82 *Buď funkce f absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. $f \in \mathbb{AC}[a, b]$. Pak platí, že tato funkce má konečnou variaci na $[a, b]$.*

Problém 225 *Dokažte Větu 82.*

Řešení. Upozorněme, že budeme používat pojmy, s nimiž jsme se setkali v předchozí části věnované funkcím s konečnou variací. Podle definice absolutně spojité funkce (viz Definice 71) přiřadíme k $\varepsilon = 1$ číslo $\delta > 0$. Dále mějme pro interval $[a, b]$ pevně dané dělení

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b$$

s normou dělení menší než δ. Dle (26.7) můžeme psát

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^k \bigvee_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f.$$

Je-li $D^i = \{\gamma_0^i, \gamma_1^i, \ldots, \gamma_{l_i}^i\}$ libovolné dělení intervalu $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ pro $i \in \{1, \ldots, k\}$, tj.

$$\alpha_{i-1} = \gamma_0^i < \gamma_1^i < \cdots < \gamma_{l_i}^i = \alpha_i,$$

platí

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \sum_{j=1}^{l_i} (\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i) < \delta, \qquad i \in \{1, \ldots, k\},$$

a proto

$$\bigvee_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f < 1, \qquad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Dostáváme

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^k \bigvee_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f < k.$$

Tedy funkce f má konečnou variaci, tj. $f \in \mathbb{BV}[a, b]$. □

Poznámka 29 *Připomeňme, že symbolem $\mathbb{C}[a, b]$ značíme množinu všech spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$. Z Věty 82 tak vidíme, že*

$$\mathbb{AC}[a, b] \subseteq \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b].$$

Dokonce je $\mathbb{AC}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b]$. Stačí uvážit Cantorovu funkci (viz Problém 219).

Nyní doplníme Kapitolu 29.

Problém 226 *Dokažte, že je-li h funkce s konečnou variací na intervalu $[a, b]$, pak existují absolutně spojitá funkce h_{AC}, skoková funkce h_B, singulární a spojitá funkce h_S takové, že je možné funkci h vyjádřit jako součet*

$$h \equiv h_{AC} + h_B + h_S \qquad \textit{na intervalu } [a, b].$$

Definice 72 *Pro funkci $h \in \mathbb{BV}[a, b]$ nazýváme funkce z Problému 226 následovně: funkci h_{AC}* **absolutně spojitá část**, *funkci h_S* **spojitá singulární část** *a funkci h_B* **skoková část**.

Problém 227 *Dokažte, že je-li funkce $h \in \mathbb{BV}[a, b]$ absolutně spojitá a neklesající, pak jsou funkce h_{AC}, h_S a h_B rovněž neklesající.*

Kapitola 33

DERIVACE ABSOLUTNĚ SPOJITÝCH FUNKCÍ

V této a následujících 2 kapitolách symbolem $\mu(M)$ rozumíme Lebesgueovu míru měřitelné množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ a určité integrály potom budou Lebesgueovými integrály. K hlavnímu problému této kapitoly bude třeba následující lemma a definice.

Lemma 8 (Rieszovo lemma) *Je dána spojitá funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nechť*

$$P := \{x \in (a, b);\ \textit{existuje } \sigma \in (x, b) \textit{ tak, že } g(\sigma) > g(x)\}.$$

Pak je možné tuto množinu P vyjádřit jako sjednocení nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních intervalů (a_j, b_j), přičemž $g(a_j) < g(b_j)$.

Poznámka 30 *Rieszovo lemma bývá nazýváno „Lemma vycházejícího slunce“.*

Problém 228 *Dokažte Rieszovo lemma, tj. Lemma 8.*

Definice 73 *Nechť $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Bod $x \in [a, b)$, pro který existuje bod $\sigma \in (x, b]$ takový, že $g(x) < g(\sigma)$, se nazývá* **bod zakrytý zprava** *funkcí g. Jestliže pro $x \in (a, b]$ existuje $\sigma \in [a, x)$ tak, že $g(x) < g(\sigma)$, potom bod x nazýváme* **bod zakrytý zleva** *funkcí g.*

Věta 83 *Je-li f neklesající funkce taková, že $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ a $f'(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in [a, b]$, pak je funkce f konstantní.*

Problém 229 *Za pomoci Věty 81 a Rieszova lemmatu (tj. Lemmatu 8) dokažte Větu 83.*

Řešení. Je-li dána neklesající funkce f na intervalu $[a, b]$, pak se jí zobrazí interval $[a, b]$ na interval $[f(a), f(b)]$. Pro důkaz toho, že je funkce f konstantní, tak postačí ukázat, že $f(a) = f(b)$. Nejprve rozdělíme interval $[a, b]$ na dvě množiny. Mějme množinu A, na které je derivace f' rovna nule, a množinu B jakožto doplněk množiny A v intervalu $[a, b]$. Víme, že množina B má nulovou míru, a proto je možné ji pokrýt konečným anebo spočetným systémem (a_k, b_k), tj.

$$B \subset \bigcup_{k \in \mathcal{U}} (a_k, b_k),$$

takovým, že pro předem zvolené $\tau > 0$ je

$$(a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, \qquad k \neq j,\ k, j \in \mathcal{U}$$

a

$$\sum_{k \in \mathcal{U}} (b_k - a_k) < \tau.$$

Vezmeme-li v potaz Větu 81, víme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro příslušný systém podintervalů je

$$\sum_{k \in \mathcal{U}} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

pokud $\delta > \tau$. Proto funkce f zobrazí množinu B do množiny S tak, že platí

$$S \subset \bigcup_{k \in \mathcal{U}} [f(a_k), f(b_k)]\,.$$

Odsud pak máme $\mu(f(B)) = 0$.

Nyní chceme ukázat tutéž rovnost i pro množinu A. Uvažme předem dané $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in (a, b) \cap A$. Definice derivace funkce

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pro všechna x z jistého okolí bodu x_0 dává

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon.$$

Jednoduchou úpravou obdržíme

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x).$$

Použitím Lemmatu 8 a uvážením funkce

$$g(x) := \varepsilon x - f(x)$$

víme, že je množina A složena z bodů x_0, přičemž každý bod x_0 je zakrytý zprava výše definovanou funkcí g. Odtud plyne, že množina A je tvořená sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních intervalů (a_j, b_j), pro které platí

$$\varepsilon a_j - f(a_j) \leq \varepsilon b_j - f(b_j) \tag{33.1}$$

pro všechny (uvažované) indexy $j \in \mathcal{U}$.

Úpravou nerovnosti (33.1) dostáváme

$$f(b_j) - f(a_j) \leq \varepsilon(b_j - a_j), \qquad j \in \mathcal{U},$$

odkud máme

$$\sum_{j \in \mathcal{U}} f(b_j) - f(a_j) \leq \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{U}} (b_j - a_j) \leq \varepsilon(b - a).$$

Celkem, funkce f zobrazí množinu A na množinu $f(A)$, která je obsažená ve sjednocení takových intervalů, pro které součet jejich délek je menší než $\varepsilon(b-a)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. To implikuje, že míra množiny A je nulová. Míra množiny A i množiny B je nulová, a tedy platí rovnost $f(a) = f(b)$. Funkce f je tak konstantní. $\square$

Kapitola 34

INTEGRACE ABSOLUTNĚ SPOJITÝCH FUNKCÍ

V této kapitole budeme symbolem $\mathbb{L}[a,b]$ rozumět množinu všech funkcí, které jsou v Lebesgueově smyslu integrovatelné na intervalu $[a,b]$. Zvláště integrovatelnými funkcemi budeme rozumět funkce integrovatelné v Lebesgueově smyslu.

Lemma 9 *Je-li funkce f integrovatelná na množině K, pak platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou měřitelnou podmnožinu $L \subset K$ míry $\mu(L) < \delta$ je*

$$\left| \int_L f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Věta 84 *Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a,b]$ a*

$$F(x) := \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a,b],$$

pak je funkce F na $[a,b]$ absolutně spojitá.

Problém 230 *Za pomoci Lemmatu 9 dokažte Větu 84.*

Problém 231 *Dokažte, že je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a,b]$, potom pro skoro všechna $x \in (a,b)$ je splněna následující rovnost*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \right) = f(x).$$

Řešení. Jsou-li f a Θ funkce měřitelné a takové, že platí

$$\Theta(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a,b],$$

pak chceme ukázat, že pro skoro všechna $x \in [a,b]$ je $f(x) \geq \Theta'(x)$. Předpokládejme naopak, že $f(x) < \Theta'(x)$. Pak

$$f(x) < p < q < \Theta'(x)$$

pro jistá racionální čísla p a q. Množinu všech x, která tuto nerovnost splňují, označme $M_{p,q}$. V dalším ukážeme, že míra těchto spočetně mnoha množin je nulová, a tedy $\mu(M_{p,q}) = 0$, kde

$$M_{p,q} := \left\{ x \in (a,b); f(x) < p < q < \Theta'(x) \right\}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Potom z Lemmatu 9 pro $\mu(P) < \delta$ a dané $\delta > 0$ máme

$$\left| \int_P f(s)\,\mathrm{d}s \right| < \varepsilon.$$

Označíme dále L takovou otevřenou podmnožinu intervalu $[a,b]$, pro kterou platí

$$M_{p,q} \subseteq L, \qquad \mu(L) < \mu(M_{p,q}) + \delta.$$

Je-li $x \in M_{p,q}$ a $y > x$ číslo dostatečně blízko x, pak lze psát

$$\frac{\Theta(y) - \Theta(x)}{y - x} > q.$$

Po úpravě pak

$$\Theta(y) - qy > \Theta(x) - qx.$$

Odtud plyne, že bod x je zakrytý zprava pro funkci $\Theta(x) - qx$ (viz Definice 73). Rieszovo lemma (tj. Lemma 8) dále implikuje existenci takové množiny

$$S = \bigcup_j (a_j, b_j),$$

že $M \subseteq S \subseteq L$ a současně

$$\Theta(b_j) - qb_j > \Theta(a_j) - qa_j,$$

tj.

$$\Theta(b_j) - \Theta(a_j) > q(b_j - a_j).$$

Pak ale

$$\int_{a_j}^{b_j} f(s)\,\mathrm{d}s \geq q(b_j - a_j).$$

Protože množinu S tvoří disjunktní intervaly (a_j, b_j), platí

$$\int_S f(s)\,\mathrm{d}s \geq q\mu(S)$$

a

$$\int_S f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{M_{p,q}} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_{S \setminus M_{p,q}} f(s)\,\mathrm{d}s <$$
$$< p\mu(M_{p,q}) + \varepsilon + |p|\delta \leq p\mu(S) + \varepsilon + |p|\delta.$$

Když porovnáme poslední dvě nerovnosti, obdržíme

$$p\mu(S) + \varepsilon + |p|\delta \geq q\mu(S),$$

tj.

$$\mu(S) \leq \frac{\varepsilon + |p|\delta}{q - p},$$

čímž je dokázáno, že $f(x) \geq \Theta'(x)$ pro skoro všechna $x \in [a, b]$. Platnost nerovnosti $-f(x) \geq -\Theta'(x)$ pro skoro všechna $x \in [a, b]$ se dokáže obdobnými úvahami a úpravami. Celkem pak platí, že pro skoro všechna $x \in [a, b]$ je

$$f(x) = \Theta'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

□

Věta 85 *Funkce f je absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$, právě když existuje funkce $h \in \mathbb{L}[a, b]$ taková, že*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a, b]. \tag{34.1}$$

Tedy $f' \equiv h$ skoro všude na $[a, b]$.

Problém 232 *Dokažte Větu 85.*

Řešení. Předpokládáme, že funkce $h \in \mathbb{L}[a,b]$. Vztah (34.1), který definuje funkci f, upravíme následovně

$$f(x) := f(a) + \int_a^x h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a,b].$$

Funkce f je dle Věty 84 absolutně spojitá a dále dle Problému 231 je $f' \equiv h$ skoro všude na intervalu $[a,b]$.

Nechť je nyní $f \in \mathbb{AC}[a,b]$. Věta 82 říká, že f má konečnou variaci na $[a,b]$. Z Věty 74 víme, že f má skoro všude na intervalu $[a,b]$ derivaci. Tudíž můžeme definovat funkci

$$\tau(x) := \int_a^x f'(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a,b],$$

která je podle Věty 84 absolutně spojitá. Z Problému 231 pak vyplývá, že $\tau' \equiv f'$ skoro všude na intervalu $[a,b]$.

Uvažujme nyní funkci $g(x) := f(x) - \tau(x)$, $x \in [a,b]$. Lze psát $g' \equiv (f-\tau)' \equiv 0$ skoro všude na $[a,b]$, a tedy dle Věty 83 je funkce g konstantní. Odtud

$$f(x) = f(a) + \tau(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a,b],$$

tj.

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x \in [a,b].$$

$\square$

Kapitola 35

KOMPOZICE ABSOLUTNĚ SPOJITÝCH FUNKCÍ

Věta 86 *Jsou dány funkce f, která je lipschitzovská na intervalu $[c, d]$, a funkce $g \in \mathbb{AC}[a, b]$ taková, že $g([a, b]) \subseteq [c, d]$. Pak platí, že složená funkce $f \circ g$ je absolutně spojitá na $[a, b]$ a pro skoro všechna $x \in [a, b]$ platí*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Problém 233 *Dokažte Větu 86.*

Řešení. Víme, že funkce f je lipschitzovská na intervalu $[c, d]$, a tedy existuje $L > 0$ takové, že pro libovolné body $x_1, x_2 \in [c, d]$ je

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|\,.$$

Viz Definice 26. Dále nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Funkce g náleží do $\mathbb{AC}[a, b]$, a tedy z Definice 71 plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro každý konečný a disjunktní systém podintervalů (a_j, b_j), $j \in \{1, \ldots, n\}$ intervalu $[a, b]$, který splňuje

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta,$$

platí nerovnost

$$\sum_{j=1}^{n} |g\,(b_j) - g\,(a_j)| < \frac{\varepsilon}{L}. \tag{35.1}$$

Aplikujeme-li poslední nerovnost (35.1) na složenou funkci $f \circ g$, obdržíme

$$\sum_{j=1}^{n} |(f \circ g)(b_j) - (f \circ g)(a_j)| = \sum_{j=1}^{n} |f(g(b_j)) - f(g(a_j))| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} L\,|g(b_j) - g(a_j)| < \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že složená funkce $f \circ g \in \mathbb{AC}[a,b]$. Protože $g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f \circ g \in \mathbb{AC}[a,b]$, máme odtud, že existuje měřitelná množina $S \subset [a,b]$, jejíž míra je nulová, tj. $\mu(S) = 0$, a současně derivace $g'(x)$ a $(f \circ g)'(x)$ existují pro všechna $x \in (a,b) \setminus S$.

Uvažme nyní $x_0 \in (a,b) \setminus S$, pro které $g'(x_0) = 0$. Z této skutečnosti plyne pro $\varepsilon > 0$ existence takového $h > 0$, že platí

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|, \qquad x \in (x_0 - h, x_0 + h) \cap [a,b].$$

Potom ovšem

$$|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)| \leq L\,|g(x) - g(x_0)| \leq L\varepsilon |x - x_0|,$$

kde $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \cap [a,b]$. Tak máme dokázáno, že

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\left(g(x_0)\right) g'(x_0) = 0.$$

Pro $g'(x_0) \neq 0$ a $g(x) \neq g(x_0)$ můžeme psát

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_0)\right)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \in [a,b].$$

Uvážíme-li definici derivace, potom je

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0$$

a

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0},$$

kde $x \in [a,b]$. Vezmeme-li

$$w := \frac{(f \circ g)'(x_0)}{g'(x_0)},$$

je

$$w = \lim_{x \to x_0} \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_0)\right)}{g(x) - g(x_0)}, \qquad x \in [a,b].$$

Proto pro předem dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$w - \varepsilon < \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_0)\right)}{g(x) - g(x_0)} < w + \varepsilon \tag{35.2}$$

pro všechna $x \in (x_0 + \delta, x_0 - \delta) \cap [a, b]$. V tuto chvíli už jen stačí uvážit spojitost funkce g spolu s (35.2), čímž obdržíme jednak existenci derivace $f'(g(x_0))$ a dále také rovnost $f'\left(g(x_0)\right) = w$. $\square$

Věta 87 *Je-li funkce $f \in \mathbb{BV}[c, d]$ a funkce $h \in \mathbb{AC}[a, b]$ taková, že $h([a, b]) \subseteq [c, d]$, pak funkce $(f \circ h)h'$ je integrovatelná v Lebesgueově smyslu na intervalu $[a, b]$. Dále pro libovolné $x, y \in [a, b]$ platí*

$$\int\limits_{h(x)}^{h(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x}^{y} f\left(h(s)\right) h'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Problém 234 *Dokažte Větu 87.*

VII. DALŠÍ TŘÍDY FUNKCÍ

Kapitola 36

DARBOUXOVSKÉ FUNKCE

Pro reálné funkce se zavádí rovněž pojem *darbouxovskosti.* Do této skupiny řadíme funkce, pro které platí níže uvedená podmínka. U těchto funkcí věnujeme pozornost vedle primárních vlastností i jejich součtu a limitě, resp. jejich souvislosti se spojitými funkcemi.

Definice 74 *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. O reálné funkci f, která je definovaná na I, řekneme, že je na tomto intervalu* **darbouxovská***, pokud pro každé dva body $z_1, z_2 \in I$ a pro každé $r \in \mathbb{R}$ takové, že $f(z_1) \leq r \leq f(z_2)$, existuje $z \in [z_1, z_2]$ tak, že $f(z) = r$.*

Problém 235 *Dokažte následující tvrzení. Funkce f je na intervalu I darbouxovská tehdy a jen tehdy, když pro libovolný podinterval J intervalu I, tj. $J \subseteq I$, je jeho obraz v f jednoprvková množina nebo interval.*

Nyní uvedeme základní tvrzení pro darbouxovské funkce, které je známo ze základního kurzu matematické analýzy.

Věta 88 *Nechť funkce f je spojitá na intervalu I. Pak je f darbouxovská na I.*

Problém 236 *Na příkladu ukažte, že opačná implikace k Větě 88 neplatí.*

Věta 89 *Jestliže na otevřeném intervalu I existuje vlastní derivace f', potom je f' na I darbouxovská funkce.*

Problém 237 *Dokažte Větu 89.*

Problém 238 *Uvažujte funkci* sgn*, dále Dirichletovu a Riemannovu funkci (viz Definice 5 a 6). S pomocí Věty 89 dokažte, že na intervalu $(-1, 1)$ nemají primitivní funkci.*

Problém 239 *Rozhodněte, zda Věta 89 platí i pro jednostrannou derivaci.*

Věta 90 (Bolzanova věta) *Nechť f je funkce spojitá na $[a, b]$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje $x \in (a, b)$ tak, že $f(x) = 0$.*

Problém 240 *Pomocí Věty 90 dokažte, že každý polynom lichého stupně má nutně (aspoň jeden) reálný kořen.*

Věta 91 *Existuje funkce, která každý nedegenerovaný interval $J \subseteq \mathbb{R}$ zobrazuje na $\mathbb{R}$.*

Problém 241 *Věta 91 říká, že na $\mathbb{R}$ existuje darbouxovská funkce, která však není v žádném bodě $\mathbb{R}$ spojitá. Objasněte toto tvrzení.*

Věta 92 *Jsou-li f a g darbouxovské funkce, pak jejich součet $f + g$ nemusí být darbouxovská funkce.*

Problém 242 *Dokažte Větu 92, tj. uveďte příklad dvou funkcí, které jsou darbouxovské, ale jejich součet darbouxovská funkce není.*

Věta 93 *Pro každou reálnou funkci f na $\mathbb{R}$ platí, že je součtem dvou funkcí, které jsou darbouxovské na $\mathbb{R}$.*

Problém 243 *Dokažte Větu 93.*

Problém 244 *Součet dvou spojitých funkcí je opět funkce spojitá, a tudíž také darbouxovská. Ukažte, že součet dvou funkcí, z nichž jedna je spojitá a druhá darbouxovská, nemusí být darbouxovská funkce.*

Problém 245 *Uveďte příklad posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcí, které jsou darbouxovské na $\mathbb{R}$ a $f_n \to f$ pro $n \to \infty$ na $\mathbb{R}$, přičemž funkce f není darbouxovská.*

Poznámka 31 *Pro každou reálnou funkci f na $\mathbb{R}$ platí, že může být vyjádřena jako limita posloupnosti darbouxovských funkcí na $\mathbb{R}$.*

Poznámka 32 *Dokonce existuje posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcí, které jsou darbouxovské na $\mathbb{R}$, a taková, že f_n konverguje na $\mathbb{R}$ k funkci f stejnoměrně, a f není darbouxovská funkce na $\mathbb{R}$.*

Z Věty 88 víme, že pro funkci spojitou na intervalu I platí, že je na I darbouxovská. Toto tvrzení nelze obrátit (tj. neplatí opačná implikace – darbouxovská funkce nemusí být nutně spojitá, viz Problém 236). Proto je nasnadě se ptát, jaké další podmínky musejí být splněny, aby darbouxovská funkce byla spojitá.

Věta 94 *Nechť f je funkce darbouxovská na intervalu J. Pak je f na J spojitá právě tehdy, když pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je množina*

$$f^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{R};\ f(y) = x\}$$

uzavřená.

Problém 246 *Dokažte Větu 94.*

Problém 247 *Vyšetřete, zda Věta 94 platí za slabšího předpokladu, že množiny $f^{-1}(x)$ jsou uzavřené pro všechna racionální čísla x.*

Věta 95 *Nechť f je funkce darbouxovská na intervalu J a nechť vnitřek množiny*

$$N := \{y \in \mathbb{R};\ f^{-1}(y) \text{ je nekonečná množina}\}$$

je prázdný. Pak je funkce f spojitá.

Problém 248 *Nechť je funkce f spojitá na J. Rozhodněte, zda vnitřek množiny N musí být prázdná množina, tj.*

$$\operatorname{int}\{y \in \mathbb{R};\ f^{-1}(y) \text{ je nekonečná množina}\} = \emptyset.$$

Poznámka 33 *Nechť f je funkce darbouxovská na intervalu J, která nabývá každé hodnoty z $f(J)$ pouze v konečně mnoha bodech. Pak platí, že je funkce f spojitá na J. Zejména, je-li f funkce prostá a darbouxovská na intervalu J, pak je funkce f na J spojitá.*

Kapitola 37

BAIREOVSKÉ FUNKCE

37.1 Funkce první Baireovy třídy

Důvodem pro zavedení „baireovských funkcí“ je skutečnost, že pro limitu posloupnosti spojitých funkcí nemusí platit to, že je také spojitou funkcí.

Definice 75 *Nechť* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$*. Funkce* f *je* **první Baireovy třídy** *na intervalu* (a, b)*, pokud existuje posloupnost* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*, přičemž* f_n *jsou funkce spojité na* (a, b)*, taková, že* f_n *konverguje k* f *na* (a, b) *pro* $n \to \infty$*. Systém všech funkcí první Baireovy třídy na intervalu* (a, b) *je značen symbolem* $\mathcal{B}_1((a, b))$*.*

Problém 249 *Dokažte, že pokud existuje vlastní derivace* f' *jisté funkce* f *na intervalu* (a, b)*, pak náleží do* $\mathcal{B}_1((a, b))$*. Nápověda: Jestliže existuje derivace* $f'(t)$*, je nutně*

$$f'(t) = \lim_{n \to \infty} n \left[f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right].$$

Problém 250 *Tvrzení z Problému 249 vyjádřete jako nutnou podmínku pro existenci primitivní funkce a uveďte příklad, který dokazuje, že tato podmínka není podmínkou postačující.*

Problém 251 *Zkonstruujte funkci první Baireovy třídy na intervalu* (a, b) *tak, aby pro ni platilo, že je funkcí darbouxovskou (viz Kapitola 36), ale nemá primitivní funkci na intervalu* (a, b)*.*

Problém 252 *Jsou zdola polospojité funkce na* (a, b) *funkcemi první Baireovy třídy na* (a, b)*? Nápověda: Uvažte Věty 1 a 2.*

Problém 253 *Dokažte, že každá monotonní funkce je první Baireovy třídy.*

Věta 96 (Baireova věta) *Buď f funkce první Baireovy třídy na intervalu (a,b), tj. $f \in \mathcal{B}_1((a,b))$. Potom platí, že v libovolném otevřeném podintervalu (a,b) existuje bod, v němž je funkce f spojitá, tedy pro body spojitosti funkce f platí, že utvářejí množinu, která je hustá v intervalu (a,b).*

Problém 254 *Rozhodněte o platnosti nutné podmínky existence primitivní funkce:*

Jestliže má funkce f na intervalu (a,b) primitivní funkci, pak je funkce f spojitá v bodech husté podmnožiny intervalu (a,b).

Problém 255 *Ukažte, že Dirichletova funkce z Definice 5 na intervalu $(0,1)$ představuje limitu funkcí z $\mathcal{B}_1((0,1))$, ale do $\mathcal{B}_1((0,1))$ nepatří.*

Upozorněme, že následující 4 problémy jsou dosti náročné.

Problém 256 *Uveďte příklad funkce f darbouxovské na $\mathbb{R}$ (viz Kapitola 36), která není konstantní, je funkcí první Baireovy třídy a je skoro všude nulová.*

Problém 257 (Baireova charakteristika) *Dokažte, že funkce f definovaná na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je funkce první Baireovy třídy právě tehdy, když pro každou uzavřenou množinu $M \neq \emptyset$ a $M \subset (a,b)$ existuje bod $z_0 \in M$ tak, že zúžení funkce f na množinu M je spojitá funkce v tomto bodě z_0.*

Problém 258 *Uvažujte funkci f takovou, že v krajních bodech „spojovacích intervalů“ Cantorova diskontinua se rovná 1 a jinde v intervalu $(0,1)$ je nulová (viz také Problém 219). Ukažte, že pak $f \notin \mathcal{B}_1((0,1))$, tj. f není první Baireovy třídy, a že je v každém bodě jisté husté podmnožiny intervalu $(0,1)$ spojitá.*

Věta 97 *Nechť $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ a f funkce, která je na tomto intervalu definovaná. Pak je f na (a,b) první Baireovy třídy tehdy a jenom tehdy, když pro každou množinu $M \neq \emptyset$ a $M \subset (a,b)$, která je uzavřená, a pro každá dvě reálná čísla x, y taková, že $x < y$, je nejvýše jedna z množin*

$$\{z \in M;\ f(z) < x\}, \qquad \{z \in M;\ f(z) > y\}$$

hustá v množině M.

Problém 259 *Dokažte Větu 97.*

Připomeňme (viz Definice 8), že pro reálnou funkci f definovanou v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ klademe

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(t)$$

a

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = -\limsup_{x \to x_0} (-f(x)).$$

Problém 260 *Nechť (a,b) je otevřený interval a funkce f je libovolná funkce definovaná na (a,b). Je funkce* $\limsup f$*, resp.* $\liminf f$*, první Baireovy třídy na intervalu (a,b)?*

Problém 261 *Využijte Baireovu větu (tj. Větu 96) nebo Baireovu charakteristiku (tj. Problém 257) k důkazu následujícího tvrzení: Za předpokladu, že je funkce f spojitá v každém bodě intervalu (a,b) kromě spočetné množiny, pak je f první Baireovy třídy na intervalu (a,b).*

37.2 Baireova klasifikace

Definice 76 *Nechť $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathcal{K}$ je systém funkcí definovaných na tomto intervalu (a,b). Jestliže pro každou posloupnost složenou z funkcí $f_n \in \mathcal{K}$ pro $n \in \mathbb{N}$ takovou, že $f_n \to f$ pro $n \to \infty$ na (a,b), platí $f \in K$, pak řekneme, že tento systém je* **uzavřený vzhledem k bodové konvergenci**.

Problém 262 *Ukažte, že na každém otevřeném intervalu lze najít systémy funkcí, které jsou uzavřené vzhledem k bodové konvergenci.*

Problém 263 *Vyšetřete, zda je systém všech monotonních (neklesajících, nerostoucích) funkcí na intervalu (a,b) uzavřený vzhledem k bodové konvergenci.*

Problém 264 *Dokažte, že je-li pro každé $j \in J$ systém funkcí $\mathcal{K}_j$ na intervalu (a,b) uzavřený vzhledem k bodové konvergenci, pak je také*

$$\bigcap_{j \in J} \mathcal{K}_j$$

systém funkcí uzavřený vzhledem k bodové konvergenci.

Problém 265 *Uvažujte systém $\Gamma((a,b))$ všech konečných lebesgueovsky měřitelných funkcí na intervalu (a,b). Ukažte, že tento systém je uzavřený vzhledem k bodové konvergenci.*

Definice 77 *Položme $\mathcal{B} = \mathcal{B}((a,b))$ rovno nejmenšímu systému funkcí, v němž je obsažen $C(a,b)$, tj. prostor spojitých funkcí na intervalu (a,b), a je zároveň uzavřený vzhledem k bodové konvergenci. Prvky tohoto systému $\mathcal{B}$ se nazývají* **baireovské** *funkce.*

Poznámka 34 *Terminologie se často poněkud liší. V literatuře se lze rovněž setkat s pojmem* **borelovské** *funkce místo baireovské funkce.*

Problém 266 *Dokažte, že pokud $g \in \mathcal{B}$ a $h \in \mathcal{B}$, potom také $g + h \in \mathcal{B}$.*

Problém 267 *Dokažte, že* $\mathcal{B}((a,b)) \subset \Gamma((a,b))$.

Problém 268 *Nechť* $f \in \mathcal{B}((a,b)), \omega \in C(c,d)$ *a nechť platí, že obraz intervalu* (c,d) *v zobrazení* ω *je podmnožinou intervalu* (a,b). *Dokažte, že pak konvoluce* $f \otimes \omega \in \mathcal{B}((c,d))$ *(viz Kapitola 12).*

Definice 78 *Nechť* $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}_0((a,b)) = C(a,b)$. *Definujeme množiny* $\mathcal{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$ *indukcí tak, že pro již definovanou množinu* $\mathcal{B}_n$ *pro* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *označuje* $\mathcal{B}_{n+1}$ *množinu všech funkcí* f *na intervalu* (a,b), *pro které existují* $f_k \in \mathcal{B}_n$, $k \in \mathbb{N}$ *takové, že* $f_k \to f$ *pro* $k \to \infty$ *na* (a,b). *Prvky množiny* $\mathcal{B}_n$ *jsou nazývány funkcemi* n**-té Baireovy třídy**, *též funkce* **baireovské** n**-té třídy**. *Dále se klade*

$$\mathcal{B}_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n.$$

Problém 269 *Ukažte, že* $\mathcal{B}_\infty \subseteq \mathcal{B}$.

Problém 270 *Dokažte, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $\mathcal{B}_{n+1} \setminus \mathcal{B}_n \neq \emptyset$.

Problém 271 *Dokažte následující tvrzení. Nechť* $g \in \mathcal{B}_n$ *a* $h \in \mathcal{B}_n$ *pro jisté* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $g + h, g - h, g \cdot h \in \mathcal{B}_n$.

Kapitola 38

MONOTONNÍ FUNKCE

Začneme „povinnou“ definicí.

Definice 79 *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$. Funkci, která je definovaná na množině M, nazýváme* **monotonní** *na M, pokud je na této množině* **neklesající** *nebo* **nerostoucí**. *Přitom neklesající, resp. nerostoucí, na M nazveme funkci f tehdy, když je na M definovaná a pro každé $x, y \in M$ takové, že $x < y$, je $f(x) \leq f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$.*

Problém 272 *Obdobně jako v Definici 79 definujte funkci rostoucí a funkci klesající na M.*

Problém 273 *Uvažujte funkci f rostoucí na intervalu $[a, b]$ a $x_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$, pak $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.*

Problém 274 *Vyšetřete, zda monotonní (příp. neklesající/nerostoucí) funkce na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ utvářejí vektorový prostor.*

Problém 275 *Uvažte dvě neklesající/nerostoucí funkce a určete, zda je jejich součin nutně opět funkce monotonní.*

Problém 276 *Mějte funkci φ, která je na množině $H \subseteq \mathbb{R}$ monotonní, a funkci f, která je monotonní na množině $\varphi(H)$. Zjistěte, zda je funkce $f \circ \varphi$ monotonní na H.*

Věta 98 *Nechť $h : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nechť dále*

$$m(x) := \inf\{h(t);\, t \in [a, x]\}, \qquad M(x) := \sup\{h(t);\, t \in [a, x]\},$$

$$\bar{m}(x) := \inf\{h(t);\, t \in [a, x)\}, \qquad \bar{M}(x) := \sup\{h(t);\, t \in [a, x)\}$$

pro $x \in (a, b)$. Pak jsou funkce $m, M, \bar{m}, \bar{M}$ monotonní na intervalu (a, b).

Problém 277 *Dokažte Větu 98.*

Problém 278 *Uvažujte funkce* $m, M, \bar{m}, \bar{M}$ *z Věty 98. Studujte, za jakých podmínek nastane některá z identit*

$$h \equiv m, \quad h \equiv \bar{m}, \quad h \equiv M, \quad h \equiv \bar{M}, \quad h \equiv m \equiv \bar{m}.$$

Problém 279 *Uvažte funkcionální rovnici* $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. *Nalezněte všechny monotonní funkce* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *které této rovnici vyhovují.*

Problém 280 *Nechť je funkce* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spojitá a monotonní na* $\mathbb{R}$. *Dokažte, že potom platí* $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *právě tehdy, když*

$$\lim_{t \to +\infty} |g(t)| = \lim_{t \to -\infty} |g(t)| = +\infty.$$

Problém 281 *Ukažte (na příkladu), že existuje spojitá funkce na* $[0,1]$, *která není monotonní na žádném nedegenerovaném podintervalu* $[0,1]$.

Věta 99 *Nechť je funkce* f *na množině* M *neklesající. Pak platí následující dvě implikace:*

(i) *Jestliže je* w *hromadným bodem množiny* M *zleva (tj. pro každé* $\delta > 0$ *je v intervalu* $(w - \delta, w)$ *aspoň jeden bod množiny* M*), pak existuje limita a platí pro ni*

$$\lim_{x \to w^-, x \in M} f(x) = \sup_{x < w, x \in M} f(x).$$

(ii) *Jestliže je* w *hromadným bodem množiny* M *zprava, pak existuje limita a platí pro ni*

$$\lim_{x \to w^+, x \in M} f(x) = \inf_{x > w, x \in M} f(x).$$

Problém 282 *Vyslovte obdobná tvrzení k tvrzením z Věty 99, která platí pro funkce nerostoucí.*

Věta 100 *Nechť je funkce* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *neklesající na intervalu* (a,b). *Pak v každém bodě tohoto intervalu, tj. pro každé* $p \in (a,b)$, *existují následující limity a platí*

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \sup_{a < x < p} f(x),$$
$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \inf_{p < x < b} f(x).$$

Zvláště

$$\lim_{x \to p^-} f(x) \le f(p) \le \lim_{x \to p^+} f(x)$$

a všechny body nespojitosti funkce f, *které náleží do intervalu* (a,b), *jsou body nespojitosti prvního druhu a tvoří nejvýše spočetnou množinu.*

Problém 283 *Dokažte Větu 100.*

Problém 284 *Dokažte, že pro libovolnou spočetnou množinu $A \subset \mathbb{R}$ existuje rostoucí funkce f na $\mathbb{R}$ tak, že množina A je právě množina všech bodů nespojitosti této funkce. Ukažte, jak lze takovou funkci sestrojit. Viz také Věta 13.*

Problém 285 *Označme $N := \mathbb{Q} \cap (0,1)$ a položme $a(t) := q^{-3}$ pro každé $t = p/q \in N$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná a $0 < p < q$. Potom řada $\sum_{t\in N} a(t)$ absolutně konverguje. Pro $0 < x < 1$ uvažujte funkci definovanou jako součet*

$$\sum_{t\in N, t\le x} a(t)$$

a dokažte, že tato funkce:

(i) *je rostoucí na intervalu $(0,1)$;*

(ii) *v žádném bodě množiny N není spojitá;*

(iii) *v každém bodě množiny N je zprava spojitá;*

(iv) *v každém bodě množiny $(0,1) \setminus N$ je spojitá.*

Problém 286 *Dokažte, že funkce spojitá, monotonní a ohraničená na ohraničeném intervalu (a,b) je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá. Zároveň uveďte příklad, který dokazuje, že vypuštěním spojitosti (resp. monotonie, resp. ohraničenosti) funkce f se tato věta stává neplatnou.*

Věta 101 (Lebesgueova věta) *Nechť funkce f je monotonní funkce na intervalu (a,b). Pak platí, že má derivaci skoro všude na (a,b).*

Problém 287 *Dokažte Větu 101. Srovnejte ji s Větou 74.*

Věta 102 *Nechť množina $N \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená a $N \neq \emptyset$ a nechť $f : N \to \mathbb{R}$. Existuje funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že:*

(a) *$h(x) = f(x)$ pro $x \in N$;*

(b) *pokud je funkce f spojitá na množině N, pak je funkce h spojitá na $\mathbb{R}$;*

(c) *pokud je funkce f neklesající na množině N, pak je funkce h neklesající na $\mathbb{R}$;*

(d) *pokud je funkce f rostoucí na množině N, pak je funkce h rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Problém 288 *Dokažte Větu 102, tj. zaveďte funkci h v závislosti na f, která splňuje všechny podmínky z předchozí věty.*

Věta 103 *Nechť $N \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Nechť dále funkce f je neklesající na množině N a I je nejmenší interval, který množinu N obsahuje. Pak existuje funkce h, která je na intervalu I neklesající, taková, že $h(x) = f(x)$ pro $x \in N$.*

Problém 289 *Dokažte Větu 103. Dále rozhodněte, zda tvrzení této věty platí také v případě, kdy interval I je nejmenším uzavřeným intervalem, který obsahuje množinu N.*

VIII. KONVEXNÍ ANALÝZA

Kapitola 39

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI KONVEXNÍCH MNOŽIN

Tato a následující kapitoly jsou zaměřeny na výsledky konvexní analýzy v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. V této kapitole se zaměříme na nejdůležitější vlastnosti konvexních množin. V prvé řadě shrneme základní terminologii, kterou následně budeme používat.

Definice 80 *Množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme* **konvexní** *právě tehdy, když pro kterékoli dva body y_1, y_2 této množiny náleží do Y také celá úsečka, která body y_1, y_2 spojuje. Jinak řečeno, množina Y je konvexní, pokud pro všechna $y_1, y_2 \in Y$ a pro každé $\lambda \in [0, 1]$ platí*

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in Y.$$

Definice 81 *Nechť $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(i) *Množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme* **afinní***, pokud pro každé dva body této množiny platí, že v Y leží i celá přímka těmito dvěma body určená; jinak řečeno, když pro každé $y_1, y_2 \in Y$ a pro každé $k \in \mathbb{R}$ platí*

$$k y_1 + (1 - k) y_2 \in Y.$$

(ii) *Řekneme, že Y je* **kužel** *nebo* **kuželová množina***, pokud pro libovolné $y \in Y$ a libovolné $k \in [0, \infty)$ platí, že $ky \in Y$.*

(iii) *Řekneme, že Y je* **konvexní kužel***, pokud je tato množina konvexní a zároveň kuželem.*

Definice 82 *O lineární kombinaci $k_1 y_1 + \cdots + k_m y_m$, kde $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$, řekneme, že je* **konvexní***, pokud*

$$k_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \qquad \sum_{j=1}^{m} k_j = 1.$$

Dále ji označíme za **nezápornou***, pokud pro všechna* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *je* $k_j \geq 0$. *Tuto lineární kombinaci pak nazýváme* **afinní***, jestliže*

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = 1.$$

Pokud použijeme termín konvexní/kuželový/afinní obal množiny, potom tím bude zamýšlena nejmenší konvexní/kuželová a konvexní/afinní množina, která danou množinu obsahuje. Tyto pojmy přesně definujeme níže.

Definice 83 *Pro množinu* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *definujeme* **konvexní obal** *jako průnik všech konvexních množin, které množinu* Y *obsahují. Značíme* $conv\, Y$. **Kuželový obal** *množiny* Y *definujeme jako průnik všech konvexních kuželů, které množinu* Y *obsahují. Značíme* $cone\, Y$. **Afinním obalem** *množiny* Y *pak nazveme průnik všech afinních množin, které množinu* Y *obsahují. Značíme* $aff\, Y$. **Lineární obal** $Lin\ Y$ *množiny* Y *je označení pro zaměření afinního prostoru* $aff\, Y$. *Dimenze prostoru* $Lin\ Y$ *se značí jako* $dim Y$.

Problém 290 *Nechť* M_j *jsou konvexní množiny pro každé* $j \in J$, *kde* J *je libovolná indexová množina. Dokažte, že množina*

$$\bigcap_{j \in J} M_j$$

je taktéž konvexní.

Problém 291 *Uvažujte konvexní množiny* $M_1, M_2, \ldots, M_m$ *a* $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$. *Dokažte, že* $k_1 M_1 + k_2 M_2 + \cdots + k_m M_m$, *tj.*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n;\, x = \sum_{j=1}^{m} k_j x_j,\, x_j \in M_j \right\},$$

je taktéž konvexní množina.

Problém 292 *Dokažte, že je-li* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexní množina (konvexní kužel, afinní prostor), potom jakákoliv konvexní (nezáporná, afinní) kombinace prvků z množiny* M *patří zase do* M.

Problém 293 *Dokažte, že pro* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *platí následující množinové rovnosti:*

(i) $conv\, Y$ *je množina všech konvexních kombinací prvků z množiny* Y, *a tedy*

$$conv\, Y = \left\{ y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j;\, y_1, \ldots, y_m \in Y, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\};$$

(ii) *cone* Y *je množina všech nezáporných kombinací prvků z množiny* Y*, a tedy*

$$cone\, Y = \left\{ y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j;\ y_1, \ldots, y_m \in Y, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \right\};$$

(iii) *aff* Y *je množina všech afinních kombinací prvků z množiny* Y*, a tedy*

$$aff\, Y = \left\{ y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j;\ y_1, \ldots, y_m \in Y, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Věta 104 *Je-li* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$*, pak jakýkoliv bod kuželového obalu množiny* Y *je možné vyjádřit jako nezápornou kombinaci nejvýše* n *bodů* $y_1, \ldots, y_n$ *množiny* Y*, a tedy pro každé* $y \in cone\, Y$ *existují čísla* $k_1, \ldots, k_n \geq 0$ *tak, že*

$$y = k_1 y_1 + \cdots + k_n y_n.$$

Problém 294 *Ukažte, že platí Věta 104.*

Věta 105 (Carathéodoryho věta) *Je-li* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$*, pak jakýkoliv bod množiny* $conv\, Y$ *je možné vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše* $n+1$ *bodů*

$$y_1, \ldots, y_{n+1} \in Y,$$

tj. pro každé $y \in conv\, Y$ *existují čísla* $k_1, \ldots, k_{n+1} \in [0, 1]$ *splňující*

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j = 1$$

taková, že

$$y = k_1 y_1 + \cdots + k_{n+1} y_{n+1}.$$

Problém 295 *Ukažte, že Carathéodoryho věta (tj. Věta 105) plyne z Věty 104.*

Problém 296 *Dokažte, že množina* M *je konvexní, právě když pro každá čísla* $\alpha, \beta \geq 0$ *platí*

$$\alpha M + \beta M = (\alpha + \beta) M.$$

Problém 297 *Dokažte, že konvexní obal* $conv Y$ *kompaktní množiny* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *je rovněž kompaktní množina.*

Jeden z nejvýznamnějších termínů konvexní analýzy je tzv. relativní vnitřek množiny v $\mathbb{R}^n$, jehož definice následuje.

Definice 84 *Bod $y \in Y$, kde $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, označíme za* **relativně vnitřní** *bod množiny Y, pokud existuje okolí $\mathcal{O}(y)$ tohoto bodu y takové, že platí*

$$\mathcal{O}(y) \cap \mathit{aff}\, Y \subseteq Y.$$

Množinu relativně vnitřních bodů Y nazýváme **relativní vnitřek** *množiny Y a označujeme ho $ri\,(Y)$.* **Relativní hranicí** *množiny Y pak nazýváme množinu $\overline{Y} \setminus ri\,(Y)$, kde $\overline{Y}$ je uzávěr množiny Y. Relativní hranici množiny Y značíme $r\partial Y$.*

Věta 106 (Základní věta teorie konvexních množin) *Nechť $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $Y \neq \emptyset$. Potom relativní vnitřek množiny Y je rovněž neprázdná množina.*

Problém 298 *Dokažte Větu 106.*

Řešení. Kdyby $0 \notin Y$, lze uvažovat množinu

$$Z := Y - y_0 = \{y - y_0;\, y \in Y\}$$

pro libovolný bod $y_0 \in Y$. Pro ni pak platí $0 \in Z$. Tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 \in Y$. Potom platí, že $\mathit{aff}\, Y = Lin\, Y$. Uvažujme $y_1, \ldots, y_m$ jako maximální výběr bodů množiny Y, které jsou lineárně nezávislé. Položme

$$\Lambda := \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j < 1 \right\}.$$

Dále přiřazením

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \mapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m$$

definujme zobrazení $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $\lambda \in \Lambda$ potom platí

$$F(\lambda) = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m + \left(1 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right) \cdot 0.$$

To znamená, že $F(\Lambda) \subseteq conv\, Y = Y$ a zároveň

$$F(\Lambda) \subseteq Lin\,\{y_1, \ldots, y_m\} = \mathit{aff}\, Y.$$

Protože jsou obě zobrazení F, F^{-1} lineární, jsou také spojitá. Dále vzhledem k tomu, že Λ je otevřená množina, je její obraz $F(\Lambda)$ otevřená množina v $\mathit{aff}\, Y$. Je-li bod $z \in F(\Lambda)$ libovolně zvolený, potom existuje jeho okolí $\mathcal{O}(z)$, pro které $\mathcal{O}(z) \cap \mathit{aff}\, Y \subseteq F(\Lambda)$, a tedy $z \in ri\,(Y)$. $\square$

Věta 107 *Nechť* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *je konvexní množina. Dále nechť* $y \in ri\,(Y)$ *a* $z \in \overline{Y}$*. Potom pro každé* $k \in (0, 1]$ *platí*

$$(1 - k)z + ky \in ri\,(Y).$$

Problém 299 *Dokažte Větu 107.*

Poznámka 35 *Z Věty 107 plyne, že pro konvexní množinu* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *je také* $ri\,(Y)$ *konvexní množina.*

Problém 300 *Uvažujte konvexní množinu* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *a dokažte, že množina* $\overline{Y}$ *je konvexní a že*

$$ri\,(Y) = ri\,(\overline{Y}), \qquad \overline{Y} = \overline{ri\,(Y)}, \qquad aff\,Y = aff\,\overline{Y}.$$

Problém 301 *Ukažte, že platí množinová rovnost*

$$conv\,Y + conv\,Z = conv\,(Y + Z).$$

Problém 302 *Za pomoci Carathéodoryho věty dokažte, že* $conv\,Y$ *je otevřená množina, pokud je* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřená množina.*

Kapitola 40

TEORIE ODDĚLOVÁNÍ MNOŽIN

Definice 85 *Nechť $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Tyto množiny nazýváme:*

(i) **oddělitelné**, *jestliže existuje nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že*

$$\langle v, y_1 \rangle \geq \langle v, y_2 \rangle \tag{40.1}$$

pro všechna $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$;

(ii) **vlastně oddělitelné**, *jestliže existuje nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že jednak platí* (40.1) *pro všechna $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ a že dále existují $\tilde{y}_1 \in Y_1$ a $\tilde{y}_2 \in Y_2$ takové, že*

$$\langle v, \tilde{y}_1 \rangle > \langle v, \tilde{y}_2 \rangle;$$

(iii) **silně oddělitelné**, *pokud existuje nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že*

$$\inf_{y_1 \in Y_1} \langle v, y_1 \rangle > \sup_{y_2 \in Y_2} \langle v, y_2 \rangle.$$

Definice 86 *Nechť $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou silně oddělitelné množiny. Pro*

$$\alpha \in \left(\sup_{y_2 \in Y_2} \langle v, y_2 \rangle, \inf_{y_1 \in Y_1} \langle v, y_1 \rangle \right)$$

a $v \in \mathbb{R}^n$ z Definice 85 nadrovinu

$$H_{v,\alpha} := \{ y \in \mathbb{R}^n ;\ \langle v, y \rangle = \alpha \}$$

nazýváme **oddělující nadrovina** *množin Y_1, Y_2.*

V následující části uvedeme několik vět, které se týkají oddělování konvexních množin. Předtím ještě definujeme tzv. projekci bodu na množinu, pomocí níž se věty o oddělitelnosti dokazují. Ve Větě 108 jsou pak vyjádřeny elementární vlastnosti projekce bodu na množinu. Poté je zařazena věta, která obsahuje významný výsledek o oddělitelnosti konvexních množin (nutnou a postačující podmínku pro silnou oddělitelnost konvexních množin).

Definice 87 *Říkáme, že bod $y^* \in Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je* **projekcí** *bodu $z \in \mathbb{R}^n$ na množinu Y a označujeme ho jako $P_Y(z)$, pokud pro každé $y \in Y$ je*

$$\|P_Y(z) - z\| \leq \|y - z\|.$$

Věta 108 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená a konvexní množina, pak platí, že pro všechna $z \notin Y$ existuje pouze jedna projekce $P_Y(z) \in Y$ a pro všechna $y \in Y$ jsou splněny nerovnosti*

$$\langle P_Y(z) - z, y - P_Y(z)\rangle \geq 0,$$

$$\langle P_Y(z) - z, y - z\rangle \geq \|P_Y(z) - z\|^2. \tag{40.2}$$

Věta 109 *Nechť $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny. Pak Y_1, Y_2 jsou silně oddělitelné, právě když pro vzdálenost těchto množin platí nerovnost*

$$\inf_{y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2} \|y_1 - y_2\| > 0.$$

Problém 303 *Dokažte Větu 109.*

Řešení. Nejprve dokážeme implikaci zleva doprava. Tedy uvažujme, že Y_1, Y_2 jsou silně oddělitelné množiny a v je z Definice 85. Platí

$$\begin{aligned} 0 &< \inf_{y_1 \in Y_1} \langle v, y_1\rangle - \sup_{y_2 \in Y_2} \langle v, y_2\rangle = \\ &= \inf_{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2} \langle v, y_1 - y_2\rangle \leq \inf_{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2} \|v\| \cdot \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Odtud pro

$$\varepsilon := \inf_{y_1 \in Y_1} \langle v, y_1\rangle - \sup_{y_2 \in Y_2} \langle v, y_2\rangle$$

plyne

$$\inf_{y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2} \|y_1 - y_2\| \geq \frac{\varepsilon}{\|v\|} > 0.$$

Nyní ukažme opačnou implikaci. Mějme konvexní množiny Y_1, Y_2 a nechť

$$\inf_{y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2} \|y_1 - y_2\| > 0.$$

Položme $Y = \overline{Y_1 - Y_2}$. Jednoduše je možné se přesvědčit (viz Problémy 290 a 300), že Y je konvexní a uzavřená množina. S ohledem na to, že $0 \notin Y$, platí $p := P_X(0) \neq 0$. Dokážeme, že hledaným vektorem, který odděluje nadroviny množin Y_1, Y_2, je právě vektor p. Pokud v (40.2) zvolíme $z = 0$, pro každé $y \in Y$ dostaneme

$$\langle p, y\rangle \geq \|p\|^2 > 0.$$

Odsud

$$\langle p, y_1 - y_2\rangle = \langle p, y_1\rangle - \langle p, y_2\rangle \geq \|p\|^2 ,$$

a proto

$$\inf_{y_1 \in Y_1} \langle p, y_1\rangle - \sup_{y_2 \in Y_2} \langle p, y_2\rangle \geq \|p\|^2 > 0.$$

□

Poznámka 36 *Z Věty 109 a z teorie metrických prostorů vyplývá toto tvrzení: Jsou-li množiny $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunktní, konvexní, množina Y_1 je navíc uzavřená a Y_2 kompaktní, potom jsou tyto množiny silně oddělitelné.*

Definice 88 *Mějme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ a $z \in r\partial Y$. Nadrovinu $H_{v,\alpha}$ nazýváme:*

(i) **opěrná nadrovina** *množiny Y v bodě z, pokud pro všechna $y \in Y$ je*

$$\langle v, y\rangle \geq \alpha = \langle v, z\rangle;$$

(ii) **vlastní opěrná nadrovina**, *pokud je opěrnou nadrovinou a dále existuje $\tilde{y} \in Y$ tak, že*

$$\langle v, \tilde{y}\rangle > \alpha.$$

Věta 110 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina a bod $z \in r\partial Y$, potom platí, že v bodě z existuje vlastní opěrná nadrovina množiny Y.*

Problém 304 *Dokažte Větu 110.*

Věta 111 *Nechť $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny. Pak jsou Y_1, Y_2 vlastně oddělitelné, právě když*

$$ri\,(Y_1) \cap ri\,(Y_2) = \emptyset.$$

Problém 305 *Pomocí Vět 109 a 110 dokažte Větu 111.*

Kapitola 41

DALŠÍ VLASTNOSTI KONVEXNÍCH MNOŽIN

Definice 89 *Pro konvexní množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ bod $y \in Y$ nazýváme* **krajní** *bod nebo* **extremální** *bod množiny Y, pokud ho pro žádné $y_1, y_2 \in Y, \gamma \in (0,1)$ není možné zapsat jako*

$$y = \gamma y_1 + (1-\gamma) y_2,$$

tj. neexistuje žádná úsečka s krajními body, které náleží do množiny Y, uvnitř které leží bod y. Zápisem $E(Y)$ značíme množinu všech krajních bodů množiny Y.

Symbolem $l^+_{y,h}$ budeme níže vyjadřovat polopřímku, jež vychází z bodu y a má směrový vektor $h \in \mathbb{R}^n$. Tedy klademe

$$l^+_{y,h} := \{z \in \mathbb{R}^n;\ z = y + hs, s \geq 0\}.$$

Symbolem $l^-_{y,h}$ pak označujeme opačnou polopřímku a přímku, která je zadaná bodem y a směrovým vektorem h, zapisujeme jako

$$l_{y,h} := l^+_{y,h} \cup l^-_{y,h}.$$

Věta 112 *Pro neohraničenou uzavřenou konvexní množinu Y platí následující tvrzení.*

(i) *Pro každý bod $y_0 \in Y$ existuje nenulový vektor $h \in \mathbb{R}^n$ takový, že $l^+_{y_0,h} \subseteq Y$.*

(ii) *Pokud pro jisté $y_0 \in Y$ a $h \in \mathbb{R}^n$ je $l^+_{y_0,h} \subseteq Y$, potom pro každé $y \in Y$ je $l^+_{y,h} \subseteq Y$.*

Problém 306 *Dokažte Větu 112.*

Věta 113 *Nechť y^* je relativně hraniční bod uzavřené konvexní množiny $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť je dále $H_{v,\alpha}$ vlastní opěrná nadrovina množiny Y v bodě y^*, což znamená, že*

$$\langle v, y \rangle \geq \alpha = \langle v, y^* \rangle \qquad \text{pro všechna } y \in Y$$

a že

$$\langle v, \tilde{y} \rangle > \alpha \qquad \text{pro jisté } \tilde{y} \in Y.$$

Potom $E(Y \cap H_{v,\alpha}) \subseteq E(Y)$ a $\dim (Y \cap H_{v,\alpha}) < \dim Y$.

Problém 307 *Dokažte Větu 113.*

Věta 114 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřená konvexní množina, pak množina všech krajních bodů množiny Y je neprázdná právě tehdy, když v Y neleží žádná přímka.*

Problém 308 *Dokažte Větu 114, která stanovuje, za jaké podmínky existují krajní body uzavřené konvexní množiny.*

Věta 115 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a kompaktní množina, potom $Y = \operatorname{conv} E(Y)$.*

Problém 309 *Dokažte Větu 115.*

Následně budeme používat pojem *afinně závislé* body, a proto jej nyní připomeneme.

Definice 90 *Řekneme, že body $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ jsou* **afinně závislé***, pokud existují čísla $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$, která nejsou všechna nulová, taková, že*

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} k_j x_j = 0.$$

Problém 310 *Ukažte, že body $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně závislé právě tehdy, když vektory $x_2 - x_1, \ldots, x_m - x_1$ jsou lineárně závislé.*

Věta 116 (Hellyova věta) *Je-li $m \geq n+1$ a jsou-li $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množiny, přičemž každých $n+1$ z nich má neprázdný průnik, potom platí*

$$\bigcap_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} Y_j \neq \emptyset.$$

Problém 311 *Dokažte Větu 116.*

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí vzhledem k m. Pro $m = n+1$ je platnost tvrzení triviální. Předpokládejme, že tvrzení je platné pro m, a dokažme ho pro $m+1 > n+1$. Mějme

$$\begin{gathered} z_1 \in Y_2 \cap \cdots \cap Y_m \cap Y_{m+1}, \\ z_2 \in Y_1 \cap Y_3 \cap \cdots \cap Y_{m+1}, \\ \vdots \\ z_{m+1} \in Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_m. \end{gathered}$$

Indukční předpoklad zajišťuje neprázdnost těchto průniků, a tedy takováto z_j existují. Neboť $m > n$, jsou body $z_1, \ldots, z_{m+1}$ afinně závislé, tj.

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_j z_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m+1} c_j = 0$$

pro jistá $c_1, \ldots, c_{m+1}$, přičemž aspoň jedno c_j je kladné.

Definujme nyní

$$\hat{y} := \frac{\sum\limits_{c_j > 0} c_j z_j}{\sum\limits_{c_j > 0} c_j}, \qquad \tilde{y} := \frac{\sum\limits_{c_j < 0} c_j z_j}{\sum\limits_{c_j < 0} c_j}.$$

Potom platí $\hat{y} - \tilde{y} = 0$, tj. $\hat{y} = \tilde{y}$. Je-li $c_l \leq 0$ pro jisté $l \in \{1, \ldots, m+1\}$, potom je bod $\hat{y}$ konvexní kombinací bodů

$$z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_m,$$

přičemž každý z těchto bodů náleží do množiny Y_l. Odtud $\hat{y} \in Y_l$. Stejnou úvahou dospějeme pro $c_l > 0$ k závěru, že $\tilde{y} \in Y_l$, tj. v tomto případě také $\hat{y} \in Y_l$. Platí

$$\hat{y} \in \bigcap_{j=1}^{m+1} Y_j,$$

neboť $l \in \{1, \ldots, m+1\}$ bylo libovolné. $\square$

Lze dokázat také následující zesílení Hellyovy věty.

Věta 117 *Nechť $\mathcal{K} = \{K_j;\, j \in J\}$ je libovolný systém konvexních a kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$, který je obecně nekonečný. Jestliže má kterýkoliv $(n+1)$-prvkový podsystém systému $\mathcal{K}$ neprázdný průnik, potom platí*

$$\bigcap_{j \in J} K_j \neq \emptyset.$$

Problém 312 *Mějte konvexní množinu* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*. Zjistěte, jestli pro všechna* $\gamma \in \mathbb{R}$ *platí*

$$ri\,(\gamma U) = \gamma\, ri\,(U)\,.$$

Dokažte, či uveďte protipříklad.

Kapitola 42

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI KONVEXNÍCH FUNKCÍ

Ačkoliv se konvexnost někdy studuje také v případě funkcí, které mohou nabývat nekonečných hodnot, zde uvažujeme pouze funkce nabývající konečných hodnot, což je pro práci se základními vlastnosti konvexních funkcí postačující. Budeme využívat výsledky o konvexních množinách z předchozích kapitol.

Definice 91 *Funkci $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, nazýváme:*

(i) **konvexní** *na množině X, pokud platí nerovnost*

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \leq \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2)$$

pro každé $x_1, x_2 \in X$ a každé $\gamma \in [0,1]$;

(ii) **ostře konvexní** *na množině X, pokud platí nerovnost*

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) < \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2)$$

pro každé $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $\gamma \in (0,1)$;

(iii) **silně konvexní** *na množině X s* **konstantou silné konvexnosti** $\nu > 0$, *pokud platí nerovnost*

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \leq \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2) - \nu\gamma(1-\gamma)\left\|x_1 - x_2\right\|^2$$

pro každé $x_1, x_2 \in X$ a každé $\gamma \in [0,1]$.

Problém 313 *Ukažte, že pro konvexní množinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ konvexní funkce na množině X a $k_1, \ldots, k_m \geq 0$ je funkce $k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m$ konvexní na množině X.*

Věta 118 *Pro funkci $f : Y \to \mathbb{R}$, kde $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, platí, že f je na Y konvexní, právě když nadgraf této funkce, tj.*

$$\{[y, \alpha] \in \mathbb{R}^{n+1};\ y \in Y, \alpha \geq f(y)\},$$

je konvexní množina

Problém 314 *Dokažte Větu 118.*

Problém 315 *Dokažte, že pro funkci f, která je na $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní, platí:*

(i) *jakékoliv lokální minimum funkce f na množině Y je také minimem globálním;*

(ii) *množina všech bodů z Y takových, že funkce f v nich nabývá na Y svého minima, je konvexní množina, resp. nejvýše jednoprvková, pokud je navíc funkce f na množině Y ostře konvexní;*

(iii) *pokud je funkce f diferencovatelná na Y a pro $\hat{y} \in Y$ je $f'(\hat{y}) = 0$, tj. $\hat{y}$ je stacionární bod, potom $\hat{y}$ je globální minimum funkce f na Y.*

Řešení. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení.

(i) Vezměme bod $\hat{y}$, ve kterém je lokální minimum funkce f na množině Y. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ tak, že pro y, pro které je $\|y - \hat{y}\| \leq \varepsilon$, je $f(y) \geq f(\hat{y})$. Nyní libovolně zvolme $y \in Y$. Předpokládejme, že $\|y - \hat{y}\| > \varepsilon$, neboť pro $\|y - \hat{y}\| \leq \varepsilon$ již požadovanou nerovnost máme. Dále označíme jako y^* průsečík úsečky, která spojuje body $\hat{y}$ a y, s množinou $\|y - \hat{y}\| = \varepsilon$, tj.

$$y^* = \lambda y + (1 - \lambda)\hat{y},$$

kde

$$\lambda = \frac{1}{\|y - \hat{y}\|}.$$

Potom $\|y^* - \hat{y}\| = \varepsilon$, a proto

$$f(\hat{y}) \leq f(y^*) = f(\lambda y + (1 - \lambda)\hat{y}) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(\hat{y}).$$

Odsud už dostáváme, že bod $\hat{y}$ je globální minimum funkce f na Y, neboť $f(y) \geq f(\hat{y})$.

(ii) Tvrzení je triviální (prázdná množina je konvexní), pokud funkce f nemá minimum na Y. Existují-li taková $y_1, y_2 \in Y$, že platí

$$f(y_1) = f(y_2) = f^* = \inf_{y \in Y} f(y),$$

potom

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \le \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2) = f^* \tag{42.1}$$

pro libovolné $\lambda \in [0,1]$. Konvexnost množiny bodů, v nichž funkce nabývá svého minima, pak vyplývá z toho, že v (42.1) musí nastat rovnost. Pro ostře konvexní funkci f pak nastává rovnost v (42.1) pro $\lambda \in (0,1)$, pouze pokud je $y_1 = y_2$.

(iii) Protože je funkce f diferencovatelná, pro $y, \hat{y} \in Y$ a $\lambda \in (0,1]$ máme

$$f(\hat{y} + \lambda(y - \hat{y})) - f(\hat{y}) = \langle f'(\hat{y}), \lambda(y - \hat{y})\rangle + \gamma(\lambda(y - \hat{y})), \tag{42.2}$$

přičemž pro funkci γ platí

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\gamma(\lambda(y - \hat{y}))}{\lambda} = 0.$$

Zároveň, protože je f konvexní, získáváme

$$f(\lambda y + (1-\lambda)\hat{y}) \le \lambda f(y) + (1-\lambda)f(\hat{y}).$$

Odtud a z (42.2) (a také s použitím $f'(\hat{y}) = 0$) obdržíme

$$\begin{aligned} f(y) - f(\hat{y}) \ge{} & \frac{1}{\lambda}[f(\hat{y} + \lambda(y - \hat{y})) - f(\hat{y})] = \\ &= \frac{1}{\lambda}[\langle f'(\hat{y}), \lambda(y - \hat{y})\rangle + \gamma(\lambda(y - \hat{y}))] = \\ &= \frac{\gamma(\lambda(y - \hat{y}))}{\lambda}. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení získáme limitním přechodem $\lambda \to 0^+$.

Tím jsme dokázali všechna tvrzení. □

Kapitola 43

JENSENOVA NEROVNOST A JEJÍ DŮSLEDKY

Věta 119 (Jensenova věta) *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina, $f : Y \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, $y_1, \dots, y_m \in Y, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, potom platí nerovnost*

$$f\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j f(y_j). \tag{43.1}$$

Pokud je funkce f navíc ostře konvexní a $\lambda_j \in (0,1)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, potom v (43.1) nastává rovnost právě tehdy, když

$$y_1 = \dots = y_m.$$

Poznámka 37 *Nerovnost (43.1) se nazývá* **Jensenova nerovnost**.

Problém 316 *Dokažte Větu 119.*

Řešení. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $m = 2$ jde přímo o definici konvexní funkce. Budeme předpokládat, že věta platí pro $m > 2$. Pro $\lambda_{m+1} \neq 1$ je

$$\begin{aligned} &f(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m + \lambda_{m+1} y_{m+1}) = \\ &= f\left((1-\lambda_{m+1})\left(\frac{\lambda_1 y_1}{1-\lambda_{m+1}} + \dots + \frac{\lambda_m y_m}{1-\lambda_{m+1}}\right) + \lambda_{m+1} y_{m+1}\right), \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} &f(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m + \lambda_{m+1} y_{m+1}) \leq \\ &\leq f\left((1-\lambda_{m+1})\tilde{y} + \lambda_{m+1} y_{m+1}\right) \leq \\ &\leq (1-\lambda_{m+1}) f(\tilde{y}) + \lambda_{m+1} f(y_{m+1}) \leq \\ &\leq \lambda_1 f(y_1) + \dots + \lambda_m f(y_m) + \lambda_{m+1} f(y_{m+1}), \end{aligned}$$

kde
$$\tilde{y} := \frac{\lambda_1 y_1}{1-\lambda_{m+1}} + \cdots + \frac{\lambda_m y_m}{1-\lambda_{m+1}}.$$

Pro případ ostré konvexnosti a rovnosti v (43.1) nechť je
$$y = y_1 = \cdots = y_m.$$

Pak zřejmě
$$f(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m) = f\left(y \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right) = f(y) = f(y)\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(y_j).$$

Pro důkaz opačné implikace využijeme opět matematickou indukci. Je-li $m = 2$ a $\lambda_1 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, nastává rovnost
$$f(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2)$$
pouze tehdy, když $y_1 = y_2$ (dle definice ostré konvexnosti). Dále předpokládejme, že tvrzení je v platnosti pro $m \in \mathbb{N}$ a nechť
$$f\left(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j y_i\right) = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(y_j), \tag{43.2}$$
kde
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \in (0,1), \qquad \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1.$$

Položíme-li
$$\hat{y} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{m+1}} y_j,$$
potom dostáváme
$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m + \lambda_{m+1} y_{m+1}) = \\
&= f((1-\lambda_{m+1})\hat{y} + \lambda_{m+1} y_{m+1}) \le \\
&\le (1-\lambda_{m+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} y_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} y_m\right) + \lambda_{m+1} f(y_{m+1}) \le \\
&\le \lambda_1 f(y_1) + \cdots + \lambda_m f(y_m) + \lambda_{m+1} f(y_{m+1}).
\end{aligned}$$

To však s ohledem na (43.2) znamená, že v obou předchozích nerovnostech platí dokonce rovnosti. Z první z nich dostáváme $\hat{y} = y_{m+1}$ a z druhé plyne

$$y_1 = \cdots = y_m.$$

Celkem jsme obdrželi

$$y_1 = \cdots = y_m = y_{m+1}.$$

$\square$

Problém 317 *Uvažujte konvexní funkci* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $z_1 < z_2 < z_3$. *Ukažte, že platí nerovnost*

$$\frac{f(z_3) - f(z_1)}{z_3 - z_1} \geq \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$

Problém 318 *Pro libovolnou konvexní funkci* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $u, v > 0$ *ukažte, že platí nerovnost*

$$f(u + v) \geq f(u) + f(v) - f(0).$$

Problém 319 *Pro riemannovsky integrovatelnou funkci* $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a spojitou konvexní funkci* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dokažte, že platí nerovnost*

$$f\left(\frac{\int_a^b \psi(s)\,\mathrm{d}s}{b-a}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(\psi(s))\,\mathrm{d}s,$$

tj. Jensenova nerovnost v integrálním tvaru.

Problém 320 *Pomocí Věty 119 dokažte tuto nerovnost*

$$\sqrt[p]{\frac{y_1^p + \cdots + y_n^p}{n}} \geq \sqrt[q]{\frac{y_1^q + \cdots + y_n^q}{n}}$$

pro $p > q > 0$ *a kladná* $y_1, \ldots, y_n$.

Problém 321 *Větu 119 použijte k důkazu Hölderovy nerovnosti*

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q},$$

kde $p, q > 1$ *splňují*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

tj. p, q *jsou konjugovaná čísla.*

Kapitola 44

DALŠÍ VLASTNOSTI KONVEXNÍCH FUNKCÍ

Problém 322 *Dokažte, že za předpokladu, že $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f : Y \to \mathbb{R}$ je na Y konvexní, je f spojitá v každém relativně vnitřním bodě Y.*

Řešení. Zvolme libovolně bod $\tilde{y} \in ri\,(Y)$. Nechť $F(y) := f(\tilde{y}-y)-f(\tilde{y})$. Tato funkce je spojitá v bodě $y = 0$, právě když je funkce f spojitá v bodě $y = \tilde{y}$. Budeme ji nyní uvažovat namísto funkce f. Předpokládejme nejdříve, že vnitřek Y je neprázdná množina. Položme

$$K_r := \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n;\ \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |y_i| < r \right\},$$

přičemž $r > 0$ je dostatečně malé, aby $K_r \subset Y$. Označíme dále vrcholy krychle K_r jako $y_1, \dots, y_m$, přičemž $m = 2^n$. Definujme

$$\alpha := \max_{i \in \{1,\dots,m\}} F(y_i).$$

Pro libovolný bod $z \in K_r$ platí, že ho lze zapsat jako konvexní kombinaci bodů $y_1, \dots, y_m$, a tedy existují $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$ splňující

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \qquad z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i.$$

Protože funkce F je konvexní, je

$$F(z) = F\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F(y_i) \leq \alpha.$$

Položíme-li $K_\varepsilon^* := \varepsilon K_r$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, pak $y/\varepsilon \in K_r$ pro každé $y \in K_\varepsilon^*$, a proto

$$F(y) = F\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon} y + (1-\varepsilon)\cdot 0\right) \le \varepsilon F\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + (1-\varepsilon)F(0) \le \alpha\varepsilon.$$

Stejně tak máme

$$0 = F(0) = F\left(\frac{1}{1+\varepsilon} y + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\frac{-y}{\varepsilon}\right)\right) \le \frac{1}{1+\varepsilon}F(y) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\alpha.$$

Odsud $F(y) \ge -\alpha\varepsilon$, a to dává $|F(y)| \le \alpha\varepsilon$, což implikuje spojitost funkce F v bodě 0. V případě, kdy $ri\,(Y) \neq int\,(Y)$, lze tento postup uvažovat s krychlí o stejné dimenzi, jakou má množina Y. □

Problém 323 *Uveďte konkrétní příklad funkce a množiny Y, který dokládá, že tvrzení Problému 322 není v platnosti pro relativně hraniční body.*

Tvrzení uvedené v Problému 322 lze zesílit, což je obsahem věty níže (viz také Definice 26).

Věta 120 *Pro konvexní množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, konvexní funkci $f : Y \to \mathbb{R}$ a pro každou kompaktní podmnožinu $M \subseteq ri\,(Y)$ existuje konstanta L tak, že*

$$|f(y_1) - f(y_2)| \le L\,\|y_1 - y_2\|$$

pro všechna $y_1, y_2 \in M$, tj. funkce f je lipschitzovská na množině M s konstantou L.

Problém 324 *Uvažujte konvexní množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, libovolnou indexovou množinu J a konvexní funkce $f_j : Y \to \mathbb{R}$ pro každé $j \in J$. Dále nechť je množina $\{f_j(y);\, j \in J\}$ shora ohraničená pro každé $y \in Y$. Dokažte, že funkce f definovaná jako*

$$f(y) := \sup_{j\in J} f_j(y), \qquad y \in Y,$$

je konvexní funkce na Y.

Věta 121 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina, $h_1, \dots, h_m$ jsou konvexní funkce na Y a $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je konvexní a neklesající funkce, potom kompozice*

$$f(h_1(y), \dots, h_m(y))$$

je konvexní funkce na Y.

Problém 325 *Dokažte Větu 121.*

Pro následující problém připomeňme, jak definujeme jednostrannou směrovou derivaci funkce.

Definice 92 *Pokud pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ a $h \in \mathbb{R}^n$ existuje limita*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\tilde{y} + th) - f(\tilde{y})}{t},$$

pak je tato limita nazývána **jednostrannou směrovou derivací** *funkce f v bodě $\tilde{y}$ a směru h. Používá se označení $f'(\tilde{y}, h)$.*

Problém 326 *Dokažte, že pokud $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, $f : Y \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $\tilde{y} \in ri\,(Y)$, potom existuje $f'(\tilde{y}, h)$.*

Věta 122 *Jsou-li $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množiny a $ri\,(X) \cap ri\,(Y) \neq \emptyset$ a je-li $f : X \to \mathbb{R}$ konvexní funkce a $h : X \to \mathbb{R}$ konkávní funkce (tj. $-h$ je konvexní), přičemž pro každé $x \in ri\,(X) \cap ri\,(Y)$ je $f(x) \geq h(x)$, potom existuje afinní funkce $s(x) = \langle a, x \rangle + b$ tak, že pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ je*

$$f(x) \geq s(x), \qquad s(y) \geq h(y).$$

Problém 327 *Dokažte Větu 122.*

Problém 328 *Uvažujte konvexní množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkci f, která je silně konvexní a spojitá na Y. Dokažte, že potom pro každé $k \in \mathbb{R}$ je množina*

$$Y_k := \{y \in Y;\ f(y) \leq k\}$$

ohraničená.

Poznámka 38 *Zatímco silnou konvexnost jako předpoklad v tvrzení v Problému 328 nelze nahradit slabší vlastností, jakou je ostrá konvexnost, lze tuto větu zobecnit jinak – viz následující věta.*

Věta 123 *Jestliže je množina $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a $f : Y \to \mathbb{R}$ spojitá a konvexní funkce a jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že množina Y_k je neprázdná a ohraničená, potom množina Y_k je ohraničená pro každé $k \in \mathbb{R}$.*

Kapitola 45

KRITÉRIA KONVEXNOSTI PRO DIFERENCOVATELNÉ FUNKCE

Z diferenciálního počtu funkcí jedné reálné proměnné je známo, kdy je diferencovatelná funkce konvexní na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. V této kapitole se zaměříme na obdobu pro diferencovatelné funkce více proměnných. Doplňme, že silnou konvexností s konstantou silné konvexnosti $\nu = 0$ se rozumí konvexnost.

Věta 124 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a f diferencovatelná funkce na Y, potom je tato funkce f silně konvexní na Y s konstantou silné konvexnosti $\nu \geq 0$, právě když je splněna nerovnost*

$$f(y) \geq f(y_0) + \langle f'(y_0), y - y_0 \rangle + \nu \|y - y_0\|^2 \tag{45.1}$$

pro každé $y, y_0 \in Y$.

Problém 329 *Dokažte Větu 124.*

Řešení. Dokažme nejprve implikaci zleva doprava. Nechť je funkce f silně konvexní s konstantou silné konvexnosti $\nu \geq 0$. Odtud s uvážením diferencovatelnosti funkce f máme

$$\begin{aligned} f(y) - f(y_0) - \nu(1-\lambda)\|y - y_0\|^2 &\geq \frac{1}{\lambda}[f(\lambda y + (1-\lambda)y_0) - f(y_0)] = \\ &= \frac{1}{\lambda}[\langle f'(y_0), \lambda(y - y_0)\rangle + \xi(\lambda)] = \\ &= \langle f'(y_0), y - y_0\rangle + \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}, \end{aligned}$$

kde ξ je funkce, pro kterou platí

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

Nerovnost (45.1) odtud získáme limitním přechodem pro $\lambda \to 0^+$.

Podívejme se na důkaz opačné implikace. Libovolně zvolme $y_1, y_2 \in Y$ a $\lambda \in [0, 1]$. Dále položme

$$y_0 := \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2.$$

Z nerovnosti (45.1) plyne

$$f(y_1) \geq f(y_0) + \langle f'(y_0), y_1 - y_0 \rangle + \nu \|y_1 - y_0\|^2,$$
$$f(y_2) \geq f(y_0) + \langle f'(y_0), y_2 - y_0 \rangle + \nu \|y_2 - y_0\|^2.$$

Když nyní vynásobíme první nerovnost λ a druhou nerovnost $(1 - \lambda)$ a obě tyto nerovnosti sečteme, získáme

$$\lambda f(y_1) + (1 - \lambda) f(y_2) \geq f(y_0) + \langle f'(y_0), \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 - y_0 \rangle + \\ + \nu \left(\lambda \|y_1 - y_0\|^2 + (1 - \lambda) \|y_2 - y_0\|^2 \right).$$

Protože je

$$y_1 - y_0 = (1 - \lambda)(y_1 - y_2), \qquad y_2 - y_0 = \lambda (y_2 - y_1),$$

funkce f je silně konvexní s konstantou silné konvexnosti ν. Stačí uvážit

$$f(y_0) = f(\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1 - \lambda) f(y_2) - \lambda (1 - \lambda) \nu \|y_1 - y_2\|^2.$$

□

Věta 125 *Je-li $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina, potom diferencovatelná funkce $f : Y \to \mathbb{R}$ je silně konvexní na množině Y s konstantou silné konvexnosti $\nu \geq 0$ tehdy a jenom tehdy, když platí nerovnost*

$$\langle f'(y) - f'(y^*), y - y^* \rangle \geq 2\nu \|y - y^*\|^2$$

pro všechna $y, y^* \in Y$.

Problém 330 *Dokažte platnost ekvivalence ve Větě 125.*

Věta 126 *Pro konvexní množinu $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ takovou, že $\operatorname{int}(Y) \neq \emptyset$, a funkci $f : Y \to \mathbb{R}$ se spojitou maticí druhých derivací platí, že funkce f je silně konvexní na Y s konstantou silné konvexnosti $\nu \geq 0$, právě když platí nerovnost*

$$\langle f''(y) h, h \rangle \geq 2\nu \|h\|^2$$

pro každé $y \in Y$ a $h \in \mathbb{R}^n$.

Problém 331 *Dokažte Větu 126.*

Problém 332 *Uvažujte funkce:*

(a)
$$f_1(y) := \langle My, y\rangle + \langle b, y\rangle, \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

kde M je symetrická $n \times n$ matice a $b \in \mathbb{R}^n$;

(b)
$$f_2(y) := \|y\|, \qquad y \in \mathbb{R}^n;$$

(c)
$$f_3(y) := \sqrt{1 + \|y\|^2}, \qquad y \in \mathbb{R}^n;$$

(d)
$$f_4(y) := \sqrt{1 + \|y\|^2}, \qquad \|y\| \leq 1.$$

Vyšetřete (ostrou, silnou) konvexnost těchto funkcí (pomocí předchozích vět).

IX. TRANSCENDENCE VÝZNAMNÝCH ČÍSEL

Kapitola 46

TRANSCENDENCE EULEROVA ČÍSLA

Tato a následující kapitola čerpá z rozpracované disertační práce Jiřiny Šišolákové. Transcendentnost čísla e ukážeme pomocí postupu Charlese Hermita z roku 1873. Budeme k tomu potřebovat dvě lemmata.

Lemma 10 *Pro polynom f s celočíselnými koeficienty platí, že všechny koeficienty k-té derivace $f^{(k)}$ jsou dělitelné $k!$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Problém 333 *Dokažte Lemma 10.*

Řešení. Operace derivování je lineární, a tak stačí ukázat, že tvrzení lemmatu je platné pro x^l, kde $l \in \mathbb{N}$. Ovšem k-tá derivace x^l je nulová pro $k > l$ a pro $k \in \{1, \ldots, l\}$ je pak rovna

$$k!\binom{l}{k}x^{l-k}.$$

Očividně $\binom{l}{k}$ je ale celé číslo. □

Lemma 11 *Nechť f je polynom stupně l a má všechny koeficienty reálné. Pro*

$$F(x) := f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(l)}(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{46.1}$$

platí

$$\mathrm{e}^x \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = F(0)\mathrm{e}^x - F(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{46.2}$$

Poznámka 39 *Vztah* (46.2) *se nazývá* **Hermitova identita**.

Problém 334 *Dokažte Lemma 11.*

Řešení. K důkazu stačí použít metodu per partes. S její pomocí snadno získáme

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = f(0) - f(x)\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x f'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dalším aplikováním metody per partes, celkem obdržíme

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = F(0) - F(x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jednoduchá úprava již dává (46.2). □

Věta 127 *Eulerovo číslo* e *je transcendentní.*

Problém 335 *Dokažte Větu 127.*

Řešení. Budeme sporem předpokládat, že číslo e je algebraické, a tedy je kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty, kdy máme

$$a_m\mathrm{e}^m + a_{m-1}\mathrm{e}^{m-1} + \cdots + a_1\mathrm{e} + a_0 = 0 \tag{46.3}$$

pro

$$a_m \neq 0,\ a_0 \neq 0,\ a_k \in \mathbb{Z},\ k \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Nechť f je libovolný polynom s reálnými koeficienty. Hermitova identita (46.2) dává

$$F(0)\mathrm{e}^k - F(k) = \mathrm{e}^k \int_0^k f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, m\},$$

což vynásobíme a_k pro $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Poté sečteme získané rovnice. Za pomoci (46.3) obdržíme

$$-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{e}^k \int_0^k f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{46.4}$$

Lemma 11 zaručuje, že (46.4) platí pro každý polynom f s reálnými koeficienty. Zvolme

$$f(x) := \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

pro dostatečně velké přirozené číslo n splňující určité podmínky – tyto podmínky uvedeme a použijeme později. Větu 127 dokážeme tím, že levá strana rovnosti (46.4) je nenulové celé číslo, ale pravá strana je v absolutní hodnotě menší než číslo 1. To bude požadovaný spor.

Protože polynom f má kořen 0 násobnosti $n-1$ a kořeny $1, \ldots, m$ násobnosti n, máme

$$f^{(l)}(0) = 0, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, n-2\}, \tag{46.5}$$

$$f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n, \tag{46.6}$$

$$f^{(l)}(k) = 0, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{46.7}$$

Dále podle Lemmatu 10 jsou koeficienty l-té derivace polynomu

$$x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n$$

dělitelné $l!$, tj. pro $l \geq n$ jsou koeficienty $f^{(l)}$ dělitelné n. Uvažme to společně s (46.1), (46.5) a (46.6). Víme tak, že

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n + nA, \tag{46.8}$$

kde $A \in \mathbb{Z}$. Z (46.1) a (46.7) potom plyne

$$F(k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(k) = nB_k, \tag{46.9}$$

kde $B_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. V dalším kroku identifikujeme požadavky na číslo n. Nechť n vyhovuje těmto podmínkám

$$n > |a_0|, \qquad (n, m!) = 1, \tag{46.10}$$

tj. n a $m!$ nemají žádného společného celočíselného dělitele většího než 1. Z (46.8) a (46.9) vyplývá, že v (46.4) jsou na levé straně pouze celá čísla. Z (46.3), (46.8) a (46.10) potom plyne, že $a_0F(0)$ není dělitelné n. Všechny hodnoty $a_kF(k)$ jsou však pro $k \in \{1, \ldots, m\}$ dělitelné n. Z tohoto důvodu levá strana (46.4) je nenulové celé číslo. Platí především

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k F(k) \right| \geq 1. \tag{46.11}$$

Pokud nyní odhadneme shora absolutní hodnotu pravé strany (46.4), máme na intervalu $[0, m]$ absolutní hodnotu každého činitele $x-k$ pro $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ shora ohraničenou číslem m. Proto je

$$|f(x)| \leq \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}, \qquad x \in [0, m]$$

a

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{m} a_k \int_0^k f(t)\mathrm{e}^{k-t}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m} |a_k| \int_0^k \mathrm{e}^{k-t}\,\mathrm{d}t < \\ &< \frac{m^{(m+1)n}}{(n-1)!}\mathrm{e}^m \sum_{k=0}^{m} |a_k| = \frac{C^n}{(n-1)!} \cdot C_0, \end{aligned} \tag{46.12}$$

kde konstanty C a C_0 nezávisí na n. Nerovnosti (46.11) a (46.12) nyní aplikujeme na (46.4). Odtud máme

$$1 \leq \left|\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)\right| < \frac{C^n}{(n-1)!} \cdot C_0.$$

To však nemůže platit pro velká $n \in \mathbb{N}$, protože pravá strana konverguje k 0 pro $n \to \infty$. Dostali jsme spor. $\square$

Kapitola 47

TRANSCENDENCE LUDOLFOVA ČÍSLA

Důkaz transcendentnosti π byl předložen později, než tomu bylo u konstanty e. Jako první podal úplný důkaz Lindemann v roce 1882. Ve svém důkazu se opíral o podobnou konstrukci, jakou jsme viděli v důkazu transcendentnosti Eulerova čísla. V důkazu využijeme Hermitovu identitu (46.2) a Eulerovu identitu, která je obsahem lemmatu níže.

Lemma 12 (Eulerova identita) *Platí*

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0.$$

Problém 336 *Dokažte Eulerovu identitu, tj. Lemma 12.*

Lemma 13 *Nechť α je algebraické číslo stupně n, tj. nechť n je nejmenší stupeň polynomu, jehož je α kořenem. Dále nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny daného polynomu nejmenšího stupně. Nechť polynom*

$$F(x_1, \ldots, x_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

s racionálními koeficienty pro $k \geq 0$ v proměnných $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je symetrický vzhledem k $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Potom polynom

$$F(x_1, \ldots, x_k)$$

v proměnných $x_1, \ldots, x_k$ má také racionální koeficienty a $F \in \mathbb{Q}$, když $k = 0$.

Navíc, je-li α kořenem daného polynomu nejmenšího stupně s celočíselnými koeficienty a polynom $F(x_1, \ldots, x_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ má celočíselné koeficienty pro $k \geq 0$ v proměnných $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, potom $F(x_1, \ldots, x_k)$ má také celočíselné koeficienty. Navíc $F \in \mathbb{Z}$, když $k = 0$.

Problém 337 *Rozmyslete si, co říká a proč platí Lemma 13.*

Věta 128 *Ludolfovo číslo π je transcendentní.*

Problém 338 *Dokažte Větu 128.*

Řešení. Důkaz provedeme sporem, a tedy předpokládejme, že π je algebraické. Potom je rovněž $c_1 := \mathrm{i}\pi$ algebraické číslo. Uvažujme polynom g nejnižšího stupně n s vedoucím koeficientem 1 a s racionálními koeficienty, jehož je c_1 kořenem. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou všechny kořeny tohoto polynomu g. Z Eulerovy identity (viz Lemma 12) vidíme, že

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\mathrm{e}^{c_i}) = 0.$$

Tato identita může být rozepsána jako

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\mathrm{e}^{c_i}) = \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=0}^{1} \mathrm{e}^{\varepsilon_1 c_1 + \dots + \varepsilon_n c_n} = 0, \tag{47.1}$$

kde je 2^n sčítanců ve tvaru e^{φ}. Některé hodnoty φ jsou nulové. Počet nenulových označíme jako m. Proto nulových je $a := 2^n - m \geq 1$. Ony nenulové exponenty nyní označíme $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ a (47.1) zapíšeme ve tvaru

$$a + \mathrm{e}^{\varphi_1} + \dots + \mathrm{e}^{\varphi_m} = 0. \tag{47.2}$$

Dále ukážeme, že existuje polynom p stupně m s celočíselnými koeficienty, jehož kořeny jsou právě $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Nejprve uvažujme polynom

$$\alpha(x) := \prod_{\varepsilon_1=0}^{1} \cdots \prod_{\varepsilon_n=0}^{1} \left(x - (\varepsilon_1 c_1 + \dots + \varepsilon_n c_n)\right),$$

který je symetrický vzhledem k $c_1, \dots, c_n$, a tedy ho lze vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů, které nutně (až na znaménko) splývají s minimálním polynomem c_1, tj. s g, a proto má polynom α racionální koeficienty, kořeny $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ a kořen 0 násobnosti a. Potom však polynom

$$\gamma(x) := x^{-a}\alpha(x)$$

má racionální koeficienty a kořeny $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Nechť je $r \in \mathbb{Z}$ společný jmenovatel koeficientů γ. Uvažujme dále polynom

$$p(x) := r\gamma(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$$

s celočíselnými koeficienty a kořeny $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, přičemž $b_m > 0$, $b_0 \neq 0$.

Nyní v rovnosti (46.2) dosadíme po řadě

$$x = \varphi_1, \ldots, x = \varphi_m$$

a s využitím (47.2) obdržíme

$$-aF(0) - \sum_{k=1}^{m} F(\varphi_k) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{e}^{\varphi_k} \int_0^{\varphi_k} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{47.3}$$

Volbou polynomu f ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{(n-1)!}\, b_m^{mn-1} x^{n-1} p^n(x) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} b_m^{(m+1)n-1} x^{n-1} (x-\varphi_1)^n \cdots (x-\varphi_m)^n \end{aligned}$$

pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ následně obdržíme požadovaný spor.

Pro derivace funkce f v bodě $x = 0$ máme

$$f^{(l)}(0) = 0, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$$

a

$$f^{(n-1)}(0) = b_m^{mn-1} b_0^n.$$

Proto je (F je definováno v (46.1))

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = b_m^{mn-1} b_0^n + nA, \tag{47.4}$$

kde $A \in \mathbb{Z}$. Víme, že $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ jsou kořeny polynomu f s násobností n, a tedy

$$f^{(l)}(\varphi_k) = 0, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Podle Lemmatu 10 má l-tá derivace $x^{n-1}\,p^n$ celočíselné koeficienty, které jsou všechny dělitelné $n!$ pro $l \geq n$. Pro $l \geq n$ jsou tak koeficienty $f^{(l)}$ celočíselné a dělitelné $n\,b_m^{mn-1}$. Máme proto

$$F(\varphi_k) = \sum_{l=1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(\varphi_k) = n b_m^{mn-1} \beta(\varphi_k), \qquad k \in \{1, \ldots, m\}, \tag{47.5}$$

kde

$$\beta(\varphi_k) \in \mathbb{Z}, \qquad k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{47.6}$$

Uvážíme-li, že funkce β je symetrická vzhledem k $b_m\varphi_k$, můžeme ji vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí vzhledem k $b_m\varphi_k$. Viz Lemma 13. Z (47.6) navíc plyne, že také hodnoty elementárních symetrických funkcí jsou v $b_m\varphi_k$ celá čísla. Proto pro $k \in \{1,\dots,m\}$ je

$$b_m^{mn-1}\beta(\varphi_k) \in \mathbb{Z}.$$

Dále zaveďme

$$D := \sum_{k=1}^{m} b_m^{mn-1}\beta(\varphi_k), \tag{47.7}$$

kde $D \in \mathbb{Z}$. Z (47.4), (47.5) a (47.7) máme

$$aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\varphi_k) = ab_m^{mn-1}b_0^n + n(aA + D). \tag{47.8}$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n > a, \qquad \max\{c \in \mathbb{N};\ c|n, c|b_0b_m\} = 1, \tag{47.9}$$

kde $u|v$ znamená, že u dělí v. Pak ve (47.8) napravo obdržíme celé číslo, které není dělitelné n a je nenulové. Proto

$$\left| aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\varphi_k) \right| \geq 1. \tag{47.10}$$

Nyní odhadneme pravou stranu (47.3). Nechť hodnoty $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ jsou všechny v kruhu daném nerovností $|x| \leq R$. Označme

$$C := \max_{|x|\leq R} \left| b_m^m\, p(x) \right|,$$

přičemž C nezávisí na n. Funkci f lze shora ohraničit. Stačí uvážit nerovnost

$$\max_{|x|\leq R} |f(x)| \leq \frac{R^{n-1}C^n}{(n-1)!}.$$

Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ splňující (47.9) je

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{m} \mathrm{e}^{\varphi_k} \int_0^{\varphi_k} f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \right| &\leq \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\varphi_k} |f(x)| \left|\mathrm{e}^{\varphi_k - x}\right| \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \frac{R^{n-1}\mathrm{e}^R}{(n-1)!}\, C^n \sum_{k=1}^{m} \left| \int_0^{\varphi_k} \mathrm{d}x \right| \leq \\
&\leq m\,\mathrm{e}^R \frac{(RC)^n}{(n-1)!} < 1.
\end{aligned}$$

Odsud, z (47.3) a z (47.10) již plyne, že $1 < 1$. To je spor dokazující transcendentnost čísla π. □

X. DALŠÍ TÉMATA

Kapitola 48

LIMITY REÁLNÝCH POSLOUPNOSTÍ

48.1 Stolzova věta

Věta 129 (Stolzova věta) *Nechť pro posloupnosti* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *platí, že* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je zcela libovolná reálná posloupnost a* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost reálných čísel, která je rostoucí a není shora ohraničená, tj.* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. *Nechť dále existuje vlastní nebo nevlastní limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L.$$

Pak platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Problém 339 *Dokažte Stolzovu větu (tj. Větu 129) – uvažujte dva separované případy, kdy* $L \in \mathbb{R}$ *a* $L \in \{-\infty, \infty\}$.

Problém 340 *Udejte příklad, který dokazuje, že implikaci ve Stolzově větě (tj. ve Větě 129) nelze obrátit.*

Problém 341 *Ukažte, že předpoklad neohraničenosti posloupnosti* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ve Větě 129 je nutný.*

Problém 342 *Určete za pomoci Stolzovy věty (tj. Věty 129) limitu* $\lim_{n\to\infty} p_n$, *je-li*

$$p_n := \frac{\sum_{j=1}^{n} j^k}{n^{k+1}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

kde $k \in \mathbb{N}$ *je dané.*

Problém 343 *Proveďte srovnání Stolzovy věty (tj. Věty 129) s l'Hospitalovým pravidlem.*

48.2 Cauchyova věta o limitě průměrů

Nejdříve doplňme, že níže uvedená Cauchyova věta je důležitá pro Cesàrovu součtovou metodu, které je věnována Kapitola 23.

Věta 130 (Cauchyova věta o limitě průměrů) *Nechť $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pro posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definovanou jako*

$$s_n := \frac{1}{n}\,(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

platí, že pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim_{n\to\infty} r_n = L$, existuje rovněž limita posloupnosti $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a je rovna také L.

Problém 344 *Dokažte Cauchyovu větu o limitě průměrů (využijte Stolzovu větu, tj. Větu 129).*

Problém 345 *Nechť $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti z Cauchyovy věty o limitě průměrů (tj. z Věty 130). Ukažte na příkladu, že $\lim_{n\to\infty} s_n$ existovat může, ale $\lim_{n\to\infty} r_n$ existovat nemusí.*

Věta 131 *Nechť $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost kladných čísel a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L.$$

Pak platí, že existuje také $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n}$ a je rovna L.

Problém 346 *Dokažte Větu 131 pomocí Cauchyovy věty o limitě průměrů (tj. Věty 130).*

Problém 347 *Dokažte, že platí také obecnější výsledek než Věta 131: Pro libovolná kladná čísla p_n, $n \in \mathbb{N}$ je*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Problém 348 *Při srovnání Cauchyova (tzv. odmocninového) a d'Alembertova (tzv. podílového) kritéria pro konvergenci nekonečných číselných řad platí, že Cauchyovo kritérium je silnější. Objasněte tuto skutečnost pomocí Věty 131 a Problému 347 a uveďte příklad řady, u které je možné k rozhodnutí o konvergenci použít Cauchyovo kritérium, ale nikoliv kritérium d'Alembertovo.*

Problém 349 *Použijte Větu 131 k důkazu identity*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$$

48.3 Stirlingova formule

V této podkapitole budeme symbolem log označovat přirozený logaritmus.

Problém 350 *Odvoďte identitu*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2. \tag{48.1}$$

Poznámka 40 *Vzorec* (48.1) *se nazývá* **Wallisova formule**.

Problém 351 *Dokažte, že existuje vlastní limita*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n \right). \tag{48.2}$$

Poznámka 41 *Doplňme, že hodnotě limity* (48.2) *se říká* **Eulerova konstanta**.

Problém 352 *Pomocí Problémů 350 a 351 dokažte, že existuje vlastní limita*

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}.$$

Problém 353 *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Na základě dosavadních výsledků této podkapitoly odvoďte, že*

$$n! = \sqrt{2\pi}\, \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}\, \mathrm{e}^{\frac{\gamma_n}{12n}} \tag{48.3}$$

pro jisté $\gamma_n \in (0,1)$.

Poznámka 42 *Vzorec* (48.3) *se nazývá* **Stirlingova formule**.

Problém 354 *Použijte Stirlingovu formuli k sečtení řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right).$$

Kapitola 49

NEROVNOSTI

49.1 Youngova a Čebyševova nerovnost

Věta 132 (Youngova nerovnost) *Nechť $t > 0$ a f je funkce spojitá a rostoucí na intervalu $[0, t]$ taková, že $f(0) = 0$. Potom pro $z_1 \in [0, t]$ a $z_2 \in [0, f(t)]$ platí*

$$\int_0^{z_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{z_2} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \geq z_1 \cdot z_2.$$

Problém 355 *Pomocí náčrtu objasněte, co říká Věta 132.*

Problém 356 *Vyšetřete, za jakých podmínek nastává v Youngově nerovnosti (viz Věta 132) rovnost.*

Problém 357 *V Youngově nerovnosti výše (viz Věta 132) zvolte vhodně funkci f tak, abyste obdrželi následující tvrzení. Je-li $s, t \geq 0$, $p > 1$ a $q > 1$ takové, že*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

potom platí

$$\frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} \geq s \cdot t.$$

Problém 358 *Uvažujte výslednou nerovnost uvedenou v Problému 357 a vyvoďte, za jakých podmínek platí rovnost.*

Věta 133 (Čebyševova nerovnost) *Pro funkci h integrovatelnou v Lebesgueově smyslu na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou je $h \geq 0$ s.v. na M, platí nerovnost*

$$\mu\left(\{x \in M;\, h(x) \geq C\}\right) \leq \frac{1}{C} \int_M h(x)\,\mathrm{d}x$$

pro každé $C > 0$, kde $\mu(A)$ je Lebesgueova míra množiny A.

Problém 359 *Dokažte Čebyševovu nerovnost, tj. Větu 133.*

49.2 Hölderova nerovnost

Věta 134 (Hölderova nerovnost pro konečné součty) *Pro každé $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $p > 1$ a $q > 1$ splňující*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{49.1}$$

Poznámka 43 *Nerovnosti* (49.1) *ve Větě 134 se říká Hölderova nerovnost pro konečné součty.*

Problém 360 *Dokažte Větu 134. Viz také Problém 321.*

Věta 135 (Hölderova nerovnost pro nekonečné součty) *Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jsou libovolné posloupnosti reálných čísel a $p, q > 1$ jsou taková čísla, že*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pak platí nerovnost

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

pokud má součet vlevo smysl.

Problém 361 *Pomocí Věty 134 odvoďte Hölderovu nerovnost pro nekonečné součty, tj. dokažte Větu 135.*

Problém 362 *Kdy v Hölderově nerovnosti (viz Věty 134 a 135) nastává rovnost?*

49.3 Minkowského nerovnost

Věta 136 (Minkowského nerovnost) *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jsou libovolné posloupnosti a $p \geq 1$. Pak platí nerovnost*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Problém 363 *S použitím Hölderovy nerovnosti (tj. Věty 135) dokažte Minkowského nerovnost (tj. Větu 136).*

Problém 364 *Je-li $a_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, pak je funkce f definovaná jako*

$$f : x \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^x\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad x \in (0, \infty)$$

nerostoucí. Proto existuje

$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Dokažte toto tvrzení a určete příslušnou limitu.

Problém 365 *Použijte Problém 364 k odvození inkluze mezi prostory posloupností l_{p_1} a l_{p_2} pro $1 \leq p_1 < p_2$. Dokažte, že daná inkluze je ostrá.*

Kapitola 50

NEKONEČNÉ SOUČINY

Také v této kapitole bude log označovat přirozený logaritmus.

Definice 93 *Nechť je dána reálná posloupnost* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Položme*

$$A_n := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řekneme, že **nekonečný součin** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** *k* A *a píšeme*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = A,$$

pokud existuje nenulová vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

O nekonečném součinu $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *řekneme, že* **diverguje**, *pokud* $A = 0$ *nebo* $A = \infty$.

Věta 137 *Nutná podmínka pro konvergenci nekonečného součinu* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Problém 366 *Dokažte Větu 137 a rozhodněte, zda je daná podmínka postačující.*

Problém 367 *Nechť je* $a_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Dokažte následující ekvivalenci. Nekonečný součin*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

je konvergentní právě tehdy, když nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$$

je konvergentní.

Věta 138 *Nechť je $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nebo $a_n < 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom nekonečný součin*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

je konvergentní právě tehdy, když je nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Problém 368 *Dokažte Větu 138.*

Věta 139 *Nechť je $a_n > -1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud nekonečný součin*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

diverguje k 0, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = -\infty.$$

Problém 369 *Dokažte Větu 139.*

Problém 370 *Platí opačná implikace k tvrzení Věty 139? Dokažte ji, nebo uveďte příslušný protipříklad.*

Věta 140 *Je-li $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rostoucí posloupnost všech prvočísel, pak je*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}} = +\infty.$$

Problém 371 *Dokažte Větu 140.*

Tvrzení Věty 140 doplníme následující větou.

Věta 141 *Je-li $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rostoucí posloupnost všech prvočísel, pak pro $x > 1$ je*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} =: \zeta(x),$$

přičemž ζ je tzv. Riemannova funkce zeta.

Problém 372 *Dokažte Větu 141. Nápověda: Lze využít identitu (vzorec pro součet geometrické řady)*

$$\frac{1}{1-\frac{1}{a_n^x}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(a_n^x)^i},$$

která platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ *a* $x > 1$.

Literatura

[1] Borwein, Jonathan; Lewis, Adrian: *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples.* New York: Springer-Verlag, 2000. 273 s.

[2] Čech, Eduard: *Bodové množiny.* 3. vydání. Praha: Academia, 1974. 284 s.

[3] Dostálová, Michaela: *Funkce s konečnou variací.* Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, 2013. 32 s.

[4] Došlý, Ondřej: *Základy konvexní analýzy a optimalizace v* $\mathbb{R}^n$. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2005. 185 s.

[5] Hardy, Godfrey Harold: *Divergent series.* Oxford: Clarendon Press, 1963. 396 s.

[6] Hasil, Petr; Hasilová, Kamila; Šišoláková, Jiřina: *Sbírka příkladů o nekonečných řadách.* 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2020. Elportál.

[7] Jarník, Vojtěch: *Diferenciální počet (I).* 6. vydání. Praha: Academia, 1974. 391 s.

[8] Jarník, Vojtěch: *Diferenciální počet (II).* 3. vydání. Praha: Academia, 1976. 669 s.

[9] Jarník, Vojtěch: *Integrální počet (I).* 5. vydání. Praha: Academia, 1974. 243 s.

[10] Jarník, Vojtěch: *Integrální počet (II).* 2. vydání. Praha: Academia, 1976. 763 s.

[11] Kolmogorov, Andrej Nikolajevič; Fomin, Sergej Vasil'jevič: *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy.* 1. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1975. 584 s.

[12] Lukeš, Jaroslav, a kol. (F. Bubeník, J. Čížek, S. Fučík, J. Hnilica, O. John, J. Milota, I. Netuka, B. Novák, J. Pachl, D. Preiss, V. Šťastnová, L. Vašák,

J. Veselý): Problémy z matematické analýzy. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. 420 s.

[13] Rockafellar, Tyrrell: *Convex analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970. 451 s.

[14] Roláková, Jana: *Henstock-Kurzweilův integrál*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, 2013. 34 s.

[15] Schwabik, Štefan: *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)*. 1. vydání. Praha: Karolinum, 1999. 326 s.

[16] Šebestová, Žaneta: *Speciální třídy funkcí*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, 2012. 30 s.

[17] Šidlovskij, Andrej Borisovič: *Transcendentnyje čisla*. Moskva: Nauka, 1987. 447 s.

[18] Tvrdý, Milan: *Stieltjesův integrál (Kurzweilova teorie)*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2012. 221 s.

[19] Veselý, Michal: *Parciální diferenciální rovnice* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2016 [cit. 2020-12-22]. 61 s.
Dostupné z: http://www.math.muni.cz/∼xvesely/data/PDE.pdf.

[20] Vranaiová, Miriama: *Absolutně spojité funkce*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, 2014. 31 s.

[21] Zoubková, Markéta: *Divergentní nekonečné řady a jejich součty*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, 2019. 38 s.