Přednášky z matematické analýzy na FI

Autor původního textu: Roman Šimon Hilscher

Úpravy a doplnění: Petr Hasil, Michal Veselý, Petr Zemánek

Obsah

1. Diferenciální počet

1.1. **Reálná čísla.** Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů, viz [8, Odstavec 5.2]. Zejména si zopakujte pojmy suprema a infima, se kterými budeme pracovat.

1.2. **Supremum a infimum v $\mathbb{R}$.** Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\underline{\text{horní závorou}} \text{ množiny } A, \text{ pokud } \forall\, x \in A: \ x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje dolní závora množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.

Řekneme, že množina A je shora ohraničená (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje zdola ohraničená (zdola omezená) množina A. Množina A je ohraničená (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Nejmenší horní závora množiny A se nazývá supremum množiny A. Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \ x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako

$$b = \sup A.$$

Obdobně se definuje infimum množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme

$$a = \inf A.$$

Příklad 1. Je-li A libovolný z intervalů $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$ nebo $(0, 1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{ a } \quad \inf A = 0.$$

□

Má-li množina A největší prvek b (tj. všechny ostatní prvky jsou menší než b), potom je $b = \sup A$. Podobně, má-li množina A nejmenší prvek a (tj. všechny ostatní prvky jsou větší než a), potom je $a = \inf A$. Výhoda suprema či infima oproti největšímu či nejmenšímu prvku spočívá v tom, že největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, ale supremum a infimum existují vždy.

Axiom 1.

(i) Každá neprázdná shora ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má supremum.
(ii) Každá neprázdná zdola ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má infimum.

Tyto axiomy zaručují, že v množině reálných čísel nejsou žádné „díry“. Navíc lze jednoduše dokázat, že tvrzení (i) a (ii) jsou navzájem ekvivalentní, tj. stačí mít k dispozici jen jeden z nich, a ten druhý pak již platí automaticky.

1.3. **Intervaly.** Budeme se striktně držet značení, že uzavřený interval je označen hranatými závorkami $[a, b]$ (krajní body tam patří), zatímco otevřený interval je označen kulatými závorkami (a, b) (krajní body tam nepatří). Podobně budeme uvažovat polouzavřené intervaly $[a, b)$ a $(a, b]$.

Nekonečné intervaly (neohraničené zdola nebo shora) značíme jako

$$(-\infty, \infty), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, b).$$

Symbol $-\infty$ a ∞ do intervalu nikdy nepatří, je to jen značení, že do intervalu patří libovolně velké záporné či kladné body.

Definiční obor funkce $f(x)$ budeme značit symbolem $\mathcal{D}(f)$, obor hodnot pak symbolem $\mathcal{H}(f)$.

1.4. **Limita.** V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) „blíží“ k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu „limita“.

Příklad 2.

(a) K přiblížení pojmu „limita“ může dobře posloužit již známý pojem infima či suprema. V Příkladu 1 jsme ukázali, že

$$0 = \inf(0, 1), \quad 1 = \sup(0, 1),$$

a přitom ani jedno z čísel 0, 1 v množině $(0, 1)$ neleží. Uvažujme posloupnost bodů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \subset (0, 1)$$

pro zvyšující se n. Potom vidíme, že se hodnoty této posloupnosti „nekonečně blíží“ k hodnotě infima (k nule), ale nikdy této hodnoty nedosáhnou. Podobně toto platí pro posloupnost

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \subset (0, 1)$$

a hodnotu suprema (jedničku).

(b) Naopak, členy posloupnosti

$$\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

se „nekonečně blíží“ k $+\infty$ (ale nikdy této „hodnoty“ nedosáhnou), stejně tak jako členy posloupnosti

$$\{-n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

se „nekonečně blíží“ k $-\infty$ (ale nikdy této „hodnoty“ nedosáhnou).

(c) Podobně se funkční hodnoty funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ „nekonečně blíží“ k číslu 0 když se nezávislá proměnná x zvyšuje k $\pm\infty$.

□

Intuitivní definice limity: „Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ libovolně blíží k číslu L, když je x dostatečně blízko k x_0.“ Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Příklad 3. Uvádíme různé „druhy" limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme

$$\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x+1) = \infty.$$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

□

Označení . $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Body $x \in \mathbb{R}$ se nazývají vlastní body, body $x = \pm\infty$ se nazývají nevlastní body.

Definice 1 (Okolí bodu). Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 je otevřený interval s vlastností

$$\mathcal{O}(x_0) = \begin{cases} (x_0-\delta, x_0+\delta), & \text{je-li } x_0 \in \mathbb{R}, \\ (a,\infty), & \text{je-li } x_0 = \infty \ (a \in \mathbb{R}), \\ (-\infty, b), & \text{je-li } x_0 = -\infty \ (b \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Množina $\mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\}$ (pro $x_0 \in \mathbb{R}$) se nazývá ryzí (též prstencové) okolí bodu x_0.

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme pravé okolí bodu x_0 jako interval $[x_0, x_0+\delta)$ a levé okolí bodu x_0 jako interval $(x_0-\delta, x_0]$. Podobně je pravé ryzí okolí bodu x_0 interval $(x_0, x_0+\delta)$ a levé ryzí okolí bodu x_0 interval $(x_0-\delta, x_0)$. □

Definice 2 (Limita). Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že

$$\text{pro všechna } x \in \mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\} \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{1}$$

□

To, že v podmínce (1) požadujeme, aby $\boxed{x \neq x_0}$, znamená, že

limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě x_0!

Interpretace Definice 2 záleží na tom, jestli je x_0 a L vlastní nebo nevlastní bod.

Definice 3 (Vlastní limita ve vlastním bodě). Buď $x_0, L \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ (toto číslo ε určuje okolí $\mathcal{O}(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ bodu L) existuje $\delta > 0$ (toto číslo δ určuje okolí $\mathcal{O}(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ bodu x_0) takové, že

$$\text{pro všechna } x \text{ taková, že } \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{x\in\mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\}} \ \text{ je } \ \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x)\in\mathcal{O}(L)}. \tag{2}$$

□

Zkráceně lze Definici 3 přepsat jako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x: \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Příklad 4. Ukažte z definice, že $\lim_{x \to 3}(3x + 1) = 10$.

Řešení. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $\delta > 0$ takové, aby $|y - 10| < \varepsilon$, kdykoliv bude $0 < |x - 3| < \delta$. Tedy

$$\big|(3x + 1) - 10\big| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x - 9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{3}}$, případně libovolné jiné δ splňující $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$. □

Definice 4 (Vlastní limita v nevlastním bodě). Buď $x_0 = \infty$, $L \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ (toto číslo ε určuje okolí $\mathcal{O}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ bodu L) existuje $a > 0$ (toto číslo a určuje okolí $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ bodu ∞) takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x > a}_{x \in \mathcal{O}(\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in \mathcal{O}(L)}. \tag{3}$$

Buď $x_0 = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ (toto číslo ε určuje okolí $\mathcal{O}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ bodu L) existuje $b < 0$ (toto číslo b určuje okolí $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, b)$ bodu $-\infty$) takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x < b}_{x \in \mathcal{O}(-\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in \mathcal{O}(L)}. \tag{4}$$

□

Příklad 5. Ukažte z definice, že $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{a := \frac{1}{\varepsilon}}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$. □

Příklad 6. Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Řešení. Ukáže se, že je tato posloupnost rostoucí a shora ohraničená a tudíž má limitu. Tuto limitu označujeme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem (základ přirozených logaritmů). Je tedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}.$$

Více ve skriptech [8, str. 276–277]. □

Podobně interpretujeme

– nevlastní limitu ve vlastním bodě ($x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$),
– nevlastní limitu v nevlastním bodě ($x_0 = \pm\infty$, $L = \pm\infty$).

Ve vlastních bodech x_0 se můžeme blížit k bodu x_0 také jen zprava nebo jen zleva, tj. v Definici 2 použijeme v podmínce (1) pouze pravé ryzí okolí bodu x_0 nebo pouze levé ryzí okolí bodu x_0. Dostáváme pak pojmy limity zprava a limity zleva:

Definice 5 (Limita zprava/zleva). Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zprava rovnu číslu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{5}$$

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu číslu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{6}$$

□

Příklad 7.

(a) Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ („signum“=znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

(b) Pro funkci $\frac{1}{x}$ platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

□

A kdy limita neexistuje? Pokud má funkce v bodě x_0 a jeho okolí následující chování:

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz Příklad 7(a)),
- „nekonečný“ skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz Příklad 7(b)),
- oscilace – např. funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 8. Funkce

$$q(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \quad (\text{tj. pro } x \text{ racionální}), \\ 0 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \quad (\text{tj. pro } x \text{ iracionální}), \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, protože v libovolném okolí zvoleného bodu x_0 se nacházejí jak racionální tak iracionální čísla a tedy tato funkce zde nabývá hodnot 1 i 0 (a tedy zde nemůže mít limitu). □

V následujícím si přiblížíme některé základní vlastnosti limit.

Věta 1 (Vlastnosti limit).

(i) *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*

(ii) *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.*

(iii) *Limita existuje právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Věta 2 (Vlastnosti limit). *Jsou-li*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M,$$

kde $L, M \in \mathbb{R}$ (pouze vlastní limity!) a $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom

$$\lim_{x\to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = L \pm M, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad \textit{pokud } M \neq 0, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to x_0} \big|f(x)\big| = \Big|\lim_{x\to x_0} f(x)\Big| = |L|. \tag{10}$$

Věta 3 (O třech limitách). *Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 a je-li*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ a je rovna číslu L, tj.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Příklad 9. Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Protože je funkce $\sin x$ ohraničená (jedničkou shora a mínus jedničkou zdola), pro $x \neq 0$ platí nerovnosti

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

A protože $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, existuje podle Věty 3 také limita funkce $x \sin \frac{1}{x}$ a platí

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

□

Poznámka 1. Všechny vlastnosti limit uvedené ve Větách 1, 2 a 3 platí i pro jednostranné limity, tj. pro limity zprava a zleva. □

Poznámka 2. Pro výpočet limit používáme značení pro „typ" dané limity, např. $\left|\text{typ } \frac{0}{0}\right|$, $\left|\text{typ } \frac{k}{0}\right|$, $\left|\text{typ } \frac{k}{\infty}\right|$, $\left|\text{typ } \frac{\infty}{\infty}\right|$, atd. Typ dané limity zjistíme tak, že dosadíme do daného výrazu přímo limitní hodnotu $x = x_0$. Kupříkladu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \quad \left|\text{typ } \frac{0}{8}\right| = 0.$$

□

1.5. **Spojitost.** Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny „důležité" vlastnosti.

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tyto dvě čísla jsou si rovny, tj. pokud

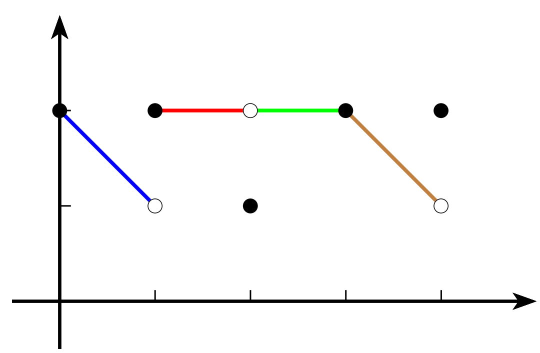
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitost zprava a spojitost zleva v bodě x_0 se definuje stejně, ale s pomocí jednostranné limity, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Příklad 10. Funkce

$$f(x) := \begin{cases} 2 - x & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 2 & \text{pro } x \in [1, 2), \\ 1 & \text{pro } x = 2, \\ 2 & \text{pro } x \in (2, 3], \\ 5 - x & \text{pro } x \in (3, 4), \\ 2 & \text{pro } x = 4, \end{cases}$$



je

- spojitá v každém bodě $x \in [0, 4]$ kromě $x = 0, 1, 2, 4$,
- spojitá zprava v každém bodě $x \in [0, 4]$ kromě $x = 2, 4$,

- spojitá zleva v každém bodě $x \in [0, 4]$ kromě $x = 0, 1, 2, 4$.

$\square$

Věta 4 (Vlastnosti spojitých funkcí).

(i) *Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce*

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \ \text{pro } g(x_0) \neq 0.$$

(ii) *(Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom*

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big) = f(M).$$

(iii) *(Spojitost složené funkce.) Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ spojitá v bodě x_0.*

Všimněte si, že vlastnost (10) je speciálním případem Věty 4(ii), protože je $|x|$ spojitá funkce.

Příklad 11. Ve Větě 4(ii) může existovat $\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big)$ i v případě, že $\lim_{x \to x_0} g(x)$ neexistuje. Např. pro $g(x) = \operatorname{sgn} x$ a $f(y) = y^2$ platí, že $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje, ale přesto je

$$\lim_{x \to 0} f\big(g(x)\big) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

$\square$

Příklady spojitých funkcí:

- konstantní funkce $f(x) = C$ (v každém bodě $x \in \mathbb{R}$),
- polynom $P(x)$ (v každém bodě $x \in \mathbb{R}$),
- racionální lomená funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (v každém bodě $x \in \mathcal{D}(R)$, tj. v každém bodě x, kde $Q(x) \neq 0$),
- trigonometrické funkce (všude, kde jsou definovány).

Spojitost funkcí lze dobře využít k výpočtu limit – prostým dosazením.

Příklad 12.

$$\lim_{x \to -1} (x^2 + 2x) = (-1)^2 + 2(-1) = -1, \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

$\square$

V následujících příkladech uvádíme tzv. základní limity.

Příklad 13. Určete

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

A protože je pro tato x hodnota $\sin x > 0$, je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{tj.} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce $\cos x$ spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro $x \to 0^+$ blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách (Věta 3) je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Protože je funkce $\frac{\sin x}{x}$ sudá, existuje také limita zleva a je rovna 1, tj.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \quad \overset{\text{Věta 1(iii)}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}. \tag{11}$$

□

Příklad 14. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} \right) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Proto je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}. \tag{12}$$

□

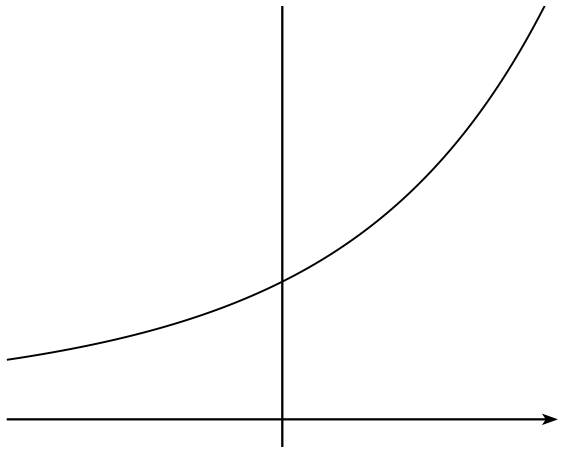
Příklad 15. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

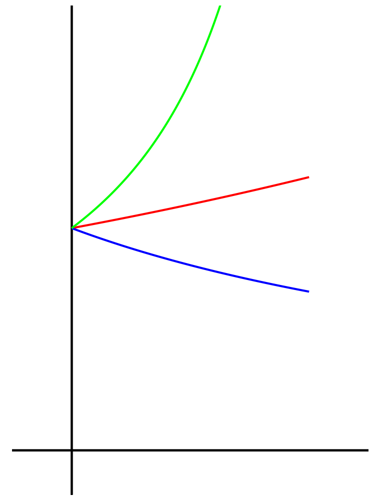
Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pomocí nerovnosti

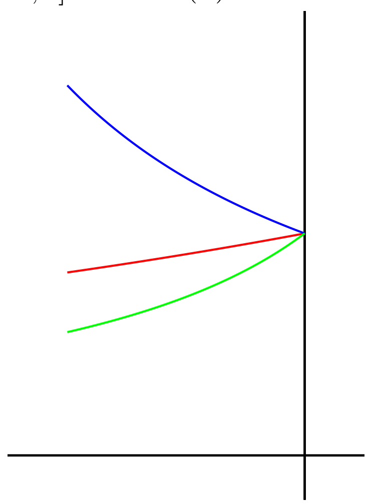
$$1 + \frac{x}{x+1} < \mathrm{e}^x < 1 + \frac{x}{1-2x} \qquad \text{pro } x \in (0, \tfrac{1}{2}),$$



(A) Graf funkce $\frac{e^x-1}{x}$ na intervalu $[-1,1]$.



(B) Graf funkcí $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{1}{1+x}$ a $\frac{1}{1-2x}$ na intrevalu $[0,0.4]$.



(C) Graf funkcí $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{1}{1+x}$ a $\frac{1}{1-2x}$ na intervalu $[-0.4,0]$.

neboli

$$\frac{1}{x+1} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-2x} \qquad \text{pro } x \in (0, \tfrac{1}{2}),$$

dostaneme z věty o třech limitách (Věta 3), že

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Podobně, platí

$$\frac{1}{1-2x} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{x+1} \qquad \text{pro } x \in (-\tfrac{1}{2}, 0),$$

a tedy podle věty o třech limitách (Věta 3) platí

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Celkově tedy podle Věty 1(iii) je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}. \tag{13}$$

□

Příklad 16. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Řešení. Z Příkladu 15 máme, že pro malé x je $\mathrm{e}^x - 1 \approx x$, tedy je $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$. Logaritmováním obou stran dostaneme, že $x \approx \ln(1+x)$. Tedy platí, že

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}. \tag{14}$$

□

Příklad 17. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pomocí rovnosti $a^x = \mathrm{e}^{\ln a^x} = \mathrm{e}^{x \ln a}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\to 1} \cdot \ln a = \ln a,$$

a tedy je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}. \tag{15}$$

Všimněte si, že nyní je limita (13) speciálním případem limity (15) pro $a = e$. □

Příklad 18. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pomocí rovnosti $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a},$$

a tedy je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}}. \tag{16}$$

Všimněte si, že nyní je limita (14) speciálním případem limity (16) pro $a = e$. □

Spojitost na intervalu – Buď $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I, je-li spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý/pravý krajní bod do intervalu I, je v něm $f(x)$ spojitá zprava/zleva. Píšeme

$$f \in C(I), \qquad \text{případně} \qquad f \in C[a,b], \quad \text{pokud } I = [a,b].$$

(Písmeno „C“ pochází z anglického continuous=spojitý.)

Příklad 19.

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $f(x)$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x)$ je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$, na intervalu $(0, \infty)$, ale není spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ (na $\mathbb{R}$).

(c) Všimněte si, že spojitost funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $[0, \infty)$ stále ještě nemusí stačit pro spojitost na celém $\mathbb{R}$. Např. funkce

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0, \end{cases}$$

je spojitá na každém z intervalů intervalech $(-\infty, 0)$ a $[0, \infty)$, ale není spojitá na $\mathbb{R}$.

□

Věta 5 (Weierstrassova). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.*

Důkaz. Je založen na principu suprema a infima. □

Poznámka 3. Žádná z podmínek ve Větě 5 nemůže být vypuštěna, protože by pak existence nejmenší nebo největší hodnoty v daném intervalu nemusela být zaručena, jak ukazují následující příklady.

(a) Interval musí být konečný. Např. $f(x) = x$ na uzavřeném intervalu $[0, \infty)$ nabývá své minimum v bodě $x = 0$, ale nenabývá zde své maximum. Navíc je tato funkce neohraničená.

(b) Interval musí být uzavřený. Např. $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, 1]$ nabývá své minimum v bodě $x = 1$, ale nenabývá zde své maximum. Navíc je tato funkce neohraničená.

(c) Interval musí být uzavřený. Např. $f(x) = x$ na intervalu $(0, 1)$ nenabývá v tomto intervalu své minimum ani své maximum, ale tato funkce je ohraničená.

□

Věta 6 (Bolzanova). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom $f(x)$ nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou. Tj. označíme-li $m := \min f(x)$ a $M := \max f(x)$, potom pro každou hodnotu $y \in [m, M]$ existuje (alespoň jedno) $c \in [a, b]$ tak, že platí $f(c) = y$.*

Volbou $y = 0$ v předchozí větě dostaneme následující.

Důsledek 1. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka (tj. $f(a)\cdot f(b) < 0$)), pak existuje bod $c \in (a,b)$ tak, že platí $f(c)=0$, tj. rovnice $f(x)=0$ má v intervalu (a,b) alespoň jedno řešení.*

Věta 7 (**O spojitosti inverzní funkce**). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (tj. stále „roste“ nebo stále „klesá“) na intervalu I, potom je také inverzní funkce $f^{-1}(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $J := f(I)$.*

Z výše uvedené věty plyne spojitost cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, a dále spojitost logaritmických funkcí.

1.6. **Body nespojitosti.** Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

1. Odstranitelná nespojitost – existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze „odstranit“ předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

   Příklad 20.
   (a) Funkce
   $$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$
   má v bodě $x_0 = 2$ odstranitelnou nespojitost (v podstatě je $f(x) = x+2$ pro $x \neq 2$).

   (b) Funkce
   $$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
   má v bodě $x_0 = 0$ odstranitelnou nespojitost.

   □

2. Skok (též nespojitost prvního druhu) – existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

   Příklad 21. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok. □

3. Nespojitost druhého druhu – alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

   Příklad 22. Funkce
   $$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$
   mají v bodě $x_0 = 0$ nespojitost druhého druhu. □

1.7. **Derivace.** Jako motivaci uveďme výpočet následujících limit.

Příklad 23.

(a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

(c)
$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\,(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0.$$

□

Příklad 24.

(a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{x} = -1.$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{\frac{x-2}{1}} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x\,(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

(c)
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0-x}{x\,x_0}}{\frac{x-x_0}{1}} = \lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{x\,x_0\,(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{-1}{x\,x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

□

Definice 6 (**Derivace**)**.** Nechť $x_0\in\mathcal{D}(f)$. Pokud existuje
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad\text{(vlastní nebo nevlastní)},\tag{17}$$
nazýváme tuto limitu derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita nevlastní (tj. $\pm\infty$), nazývá se $f'(x_0)$ nevlastní derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0. □

Jiná terminologie je diferencovatelnost funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Co je to vlastně „derivace“ v bodě x_0?

1. Analyzujme diferenční podíl
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{směrnice sečny procházející body}}{M=[x_0,f(x_0)]\text{ a }N=[x,f(x)]}$$

2. Pokud se x blíží k x_0 (tj. bod N se blíží k bodu M), sečna MN se stává tečnou v bodě M, a tedy je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\text{směrnice tečny}} \text{ v bodě } M = [x_0, f(x_0)].$$

Příklad 25. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má v bodě $x_0 = 1$ tečnu, která má směrnici $a = -1$. A proto je také $f'(1) = -1$, srovnejte s Příkladem 24(a). □

Poznámka 4.

(i) Vlastní derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.

(ii) Pokud nahradíme limitu ve výrazu (17) jednostrannými limitami, dostaneme definici derivace zprava a derivace zleva v bodě x_0, tj.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zřejmě pak $f'(x_0)$ existuje $\Leftrightarrow$ existují $f'_-(x_0)$ a $f'_+(x_0)$ a tyto jednostranné derivace jsou si rovny.

(iii) Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.

(iv) Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).

(v) Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}. \tag{18}$$

(vi) Aby mohla mít funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0, musí být definována na nějakém okolí bodu x_0 (včetně bodu x_0)!

(vii) $f'(x_0)$ někdy píšeme jako $\frac{df}{dx}(x_0)$, nebo jako $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

□

Poznámka 5. Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je pak

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0).$$

□

Příklad 26. Určete směrnici tečny a rovnici tečny funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 2$.

Řešení. Z Příkladu 24(b) víme, že $f'(2) = -\frac{1}{4}$, tedy směrnice tečny v bodě $x_0 = 2$ je $a = -\frac{1}{4}$.

Protože je $f(2) = \frac{1}{2}$, je podle Poznámky 5 rovnice tečny v bodě $x_0 = 2$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,(x-2), \qquad \text{tj.} \qquad y = -\frac{1}{4}\,x + 1.$$

□

Příklad 27. V Příkladech 23 a 24 jsme vlastně odvodili vztahy

$$(x^2)'\big|_{x=x_0} = 2x_0, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)'\bigg|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

□

Z geometrické vlastnosti, že derivace je směrnice tečny, můžeme tedy odvodit následující pravidla:

$$(x)'\big|_{x=x_0} = 1, \qquad (ax+b)'\big|_{x=x_0} = a, \qquad (k)'\big|_{x=x_0} = 0.$$

Příklad 28.

$$(x^3)'\big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\,(x^2 + x\,x_0 + x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^2 + x\,x_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

□

Podobně lze odvodit takové pravidlo pomocí rozvoje pro $x^n - x_0^n$ (kde $n \in \mathbb{N}$), tj.

$$(x^n)'\big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \cdots = n x_0^{n-1}, \qquad \text{tj.} \qquad \boxed{(x^n)'\big|_{x=x_0} = n x_0^{n-1}}. \tag{19}$$

Porovnejte tento výsledek s definicí derivace polynomu v Odstavci 10.3.

Příklad 29. Určete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodech $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

Řešení. Zřejmě je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$. Pro $x_0 > 0$ je

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{(x-x_0)\,(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}.$$

Pro $x_0 = 0$ derivace neexistuje (je to krajní bod definičního oboru, a tudíž v něm neexistuje limita – existuje zde pouze limita zprava). Vypočtěme tedy derivaci zprava:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ tedy má v počátku nevlastní pravostrannou derivaci $f'_+(0) = \infty$, neboli tečna v bodě $x_0 = 0$ je svislá přímka. □

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na „proměnnou“, potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Příklad 30. V Příkladu 29 je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ a $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$, přestože $f'_+(0)$ existuje (ale jen jako nevlastní derivace). □

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě množiny (např. intervalu) I, pak říkáme, že $f(x)$ je diferencovatelná na I. Např. x^n je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, nebo $\frac{1}{x}$ je diferencovatelná na $(0, \infty)$ a na $(-\infty, 0)$.

Normála ke grafu v bodě x_0 je přímka, která prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$ a je kolmá na tečnu. Je-li a_1 směrnice tečny a a_2 směrnice normály, potom platí vztah

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 = -1}.$$

Příklad 31. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^4$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Tečna: Protože je směrnice tečny v bodě $x_0 = 1$ rovna $f'(1) = (4x^3)\big|_{x=1} = 4$ a protože je $f(1) = 1$, podle Poznámky 5 je rovnice tečny

$$y - 1 = 4\,(x - 1), \qquad \text{tj.} \qquad y = 4x - 3.$$

Normála: Protože je směrnice normály v bodě $x_0 = 1$ rovna $a_2 = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$ a protože i normála (stejně jako tečna) prochází bodem $[x_0, f(x_0)] = [1, 1]$, je rovnice normály

$$y - 1 = -\frac{1}{4}\,(x - 1), \qquad \text{tj.} \qquad y = -\frac{1}{4}\,x + \frac{5}{4}.$$

□

Příklad 32. Určete zda má funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ derivaci.

Řešení.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x \quad \ldots \underline{\text{limita neexistuje}}.$$

Funkce $|x|$ nemá v počátku derivaci. Pochopitelně, protože míti derivaci = míti (právě jednu) tečnu.

Na druhou stranu, můžeme vypočítat jednostranné derivace v počátku:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} (-1) = -1.$$

Tedy tyto jednostranné derivace jsou různé, a proto podle Poznámky 4(ii) neexistuje $f'(0)$. □

Derivace v praxi

1. Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu na přímce v čase t, potom je výraz
$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$
roven průměrné rychlosti za časový úsek $[t_0, t]$. Zřejmě je pak
$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = s'(t_0)$$
rychlost v okamžiku t_0, a tedy je
$$v(t) = s'(t), \qquad \boxed{\text{rychlost je derivace dráhy}}.$$
Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost $v(t)$ má znaménko, tj. $v(t) > 0$ ve směru pohybu, kdy se $s(t)$ zvětšuje a $v(t) < 0$, když se $s(t)$ zmenšuje.

2. Protože je zrychlení $a(t)$ změna rychlosti, podobně platí, že
$$\lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = v'(t_0)$$
je zrychlení v okamžiku t_0, a tedy je
$$a(t) = v'(t), \qquad \boxed{\text{zrychlení je derivace rychlosti}}.$$

3. Protože platí, že
$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$
je
$$P(t) = W'(t), \qquad \boxed{\text{výkon je derivace práce}}.$$

4. Protože platí, že
$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna elektrického náboje}}{\text{změna času}},$$
je
$$I(t) = Q'(t), \qquad \boxed{\text{proud je derivace náboje}}.$$

1.8. **Vlastnosti a pravidla derivací.** V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

Věta 8. *Má-li $f(x)$ v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Protože existuje vlastní $f'(x_0)$ je
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \right)$$
$$= f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$$
Je tedy $f(x)$ spojitá v bodě x_0. □

Z Věty 8 plyne, že pokud je funkce $f(x)$ nespojitá v bodě x_0, pak v něm nemůže mít derivaci.

Příklad 33. Funkce $\operatorname{sgn} x$ je nespojitá v počátku, a proto zde nemá (vlastní) derivaci. $\square$

Pozor! Opačné tvrzení k Větě 8 neplatí, tj. ze spojitosti v x_0 neplyne existence derivace v bodě x_0. Příkladem je funkce $|x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Pokud má funkce nevlastní derivaci v bodě x_0, tak stále ještě může být spojitá v x_0. Obecné pravidlo jako ve Větě 8 ale k dispozici nemáme.

Příklad 34.

(a) Funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je zřejmě spojitá v bodě $x_0 = 0$ (dokonce na celém $\mathbb{R}$). Přitom

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty.$$

Tato funkce má tedy v počátku nevlastní derivaci (tečna je svislá přímka = osa y) a přitom je spojitá.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je nespojitá v bodě $x_0 = 0$. Přitom

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} \left| \text{typ } \frac{-1}{0^-} \right| = \infty,$$

a tedy také $f'(0) = \infty$ existuje. Tato funkce má tedy v počátku nevlastní derivaci a přitom je zde nespojitá (nemá tečnu v počátku).

$\square$

Věta 9 (Pravidla pro derivace). *Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ vlastní derivaci v bodě x. Potom platí následující pravidla.*

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\big[c \cdot f(x)\big]' = c \cdot f'(x).$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\big[f(x) \pm g(x)\big]' = f'(x) \pm g'(x).$$

(iii) *Pravidlo součinu:*

$$\big[f(x) \cdot g(x)\big]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(iv) *Pravidlo podílu:*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Důkaz. Pravidla (i) a (ii) jsou triviální z definice derivace (jako limity). Ukážeme pravidlo součinu:

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x) + f(x_0)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)} \right\} \\
&= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0),
\end{aligned}
$$

přičemž jsme použili Větu 8 pro spojitost funkce $g(x)$ v bodě x_0. Pravidlo podílu se ukáže podobně, jako pravidlo součinu. □

Příklad 35.

$$
(2x^3 + 3x + 1)' = 2(x^3)' + 3(x)' + (1)' = 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 1 + 0 = 6x^2 + 3,
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' &= \frac{(x^2+1)'\,(x^2-1) - (x^2+1)\,(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{2x\,(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\cdot x^2\right)' &= (\sqrt{x})'\cdot x^2 + \sqrt{x}\cdot (x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x^2 + \sqrt{x}\cdot 2x \\
&= \frac{1}{2}\,x^{\frac{3}{2}} + 2\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\,\sqrt{x^3}.
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že poslední uvedený příklad má na levé straně $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'$. □

Příklad 36. Uvažujme soukolí tří ozubených kol, přičemž kolo A má 12 zubů, kolo B má 4 zuby a kolo C má 6 zubů. Jestliže kolo A udělá y otáček, kolo B udělá u otáček a kolo C udělá x otáček, potom platí

$$
y = \frac{1}{3}\,u, \qquad u = \frac{3}{2}\,x, \qquad \text{a tedy je} \qquad y = \frac{1}{3}\,u = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,x = \frac{1}{2}\,x.
$$

Velikost změny y ke změně u je zřejmě $\frac{1}{3}$, velikost změny u ke změně x je zřejmě $\frac{3}{2}$, a proto velikost změny y ke změně x je $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Ukázali jsme tedy, že při skládání funkcí se velikost změn (= derivace) násobí. □

Věta 10 (Derivace složené funkce). *Má-li funkce $y = f(u)$ derivaci v bodě $u_0 := g(x_0)$ a funkce $u = g(x)$ derivaci v bodě x_0, potom má složená funkce $y = (f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$
(f\circ g)'(x) = f'(u_0)\cdot g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)\cdot g'(x_0).
$$

Příklad 37. Určete derivaci funkce $\sqrt{x^2+x}$.

Řešení. Označme $f(u)=\sqrt{u}$ a $u=g(x)=x^2+x$. Potom je $f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ a $g'(x)=2x+1$. A proto je podle Věty 10

$$\left(\sqrt{x^2+x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+1)\Big|_{u=x^2+x}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

□

Složenou funkci je výhodné derivovat podle pravidla vnější funkce a vnitřní funkce:

$$[\underbrace{f}_{\text{vnější}}(\underbrace{g}_{\text{vnitřní}}(x))]'=\underbrace{f'\big(g(x)\big)}_{\substack{\text{derivuj vnější}\\ \text{nechej jako}\\ \text{argument vnitřní}}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivuj}\\ \text{vnitřní}}}.$$

Příklad 38.

$$\left(\sqrt{x^3+x^2+x+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^3+x^2+x+1}}\cdot(3x^2+2x+1),$$

$$[(x^2+x)^2]'=2\,(x^2+x)\cdot(2x+1)=4x^3+6x^2+2x.$$

Všimněte si, že poslední uvedený příklad lze spočítat i přímo

$$[(x^2+x)^2]'=(x^4+2x^3+x^2)'=4x^3+6x^2+2x,$$

nebo podle pravidla součinu

$$[(x^2+x)^2]'=[(x^2+x)\cdot(x^2+x)]'=(2x+1)\cdot(x^2+x)+(x^2+x)\cdot(2x+1)=4x^3+6x^2+2x.$$

□

Druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 se definuje jako derivace funkce $f'(x)$ v bodě x_0, tj. $f''(x):=[f'(x)]'$.

Podobně definujeme n-tou derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 jako derivace funkce $f^{(n-1)}(x)$ v bodě x_0, tj. $f^{(n)}(x):=[f^{(n-1)}(x)]'$.

Příklad 39.

$$\left(\sqrt{x}\right)''=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{0\cdot\sqrt{x}-1\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{[\sqrt{x}]^2}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

□

Poslední pravidlo, které budeme pro derivování potřebovat, je pravidlo pro derivaci inverzní funkce. Jak již víme, funkce f má inverzní funkci f^{-1} pouze pokud je $f(x)$ prostá (injektivní), tedy na zadaném intervalu buď stále roste nebo stále klesá (tj. je tzv. ryze monotónní). Složení funkce f a její inverze f^{-1} (v libovolném pořadí) dává identické zobrazení a tudíž jsou grafy funkce f a její inverze f^{-1} souměrné podle přímky $y=x$ (tj. podle osy 1. a 3. kvadrantu).

Jelikož budeme nyní primárně studovat vlastnosti funkce inverzní f^{-1}, označíme si tuto funkci v proměnné x, tj. inverzní funkce f^{-1} bude zadána jako předpis $y=f^{-1}(x)$ na svém definičním oboru

$\mathcal{D}(f^{-1}) = J$. Neznámé vlastnosti (zejména tedy derivaci) inverzní funkce $f^{-1}(x)$ vyjádříme pomocí derivace „původní" a tudíž známé funkce f, kterou si označíme v proměnné y. Tj. „původní" funkce je dána předpisem $x = f(y)$ na svém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = I = f^{-1}(J)$, neboli $\mathcal{D}(f^{-1}) = J = f(I)$.

Příklad 40. Zajímají nás vlastnosti (např. derivace) funkce $\sqrt[3]{x}$. Tato funkce je inverzní k funkci x^3. Označíme si proto tuto inverzi v proměnné x, tj. $\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}}$, a „původní" funkci v proměnné y, tj. $\boxed{f(y) = y^3}$.

Potom budeme moct vyjádřit derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$ pomocí derivace „původní" funkce $f(y) = y^3$, tj. pomocí $f'(y) = 3y^2$. $\square$

Věta 11 (**Derivace inverzní funkce**). *Je-li funkce $x = f(y)$ spojitá a ryze monotonní na intervalu J a je-li $y_0 \in J$ vnitřní bod tohoto intervalu takový, že $f(y)$ má derivaci (vlastní nebo nevlastní) $f'(y_0)$ v bodě y_0, potom má inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ derivaci $(f^{-1})'(x_0)$ v bodě $x_0 := f(y_0)$. Pro tuto derivaci platí následující:*

(i) *Je-li $f'(y_0) \neq 0$, potom je*

$$\boxed{(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x_0)\big)}}.$$

(ii) *Je-li $f'(y_0) = 0$, potom je $(f^{-1})'(x_0)$ nevlastní a přitom*

$$(f^{-1})'(x_0) = \infty \qquad \textit{pro } f(y) \textit{ rostoucí,}$$
$$(f^{-1})'(x_0) = -\infty \qquad \textit{pro } f(y) \textit{ klesající.}$$

Důkaz. Označme jako

$\varphi =$ (známý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $x = f(y)$ v bodě $[y_0, x_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy y,

$\psi =$ (neznámý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$, vzhledem ke kladnému směru osy x,

přičemž platí, že $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = f'(y_0)}$ je známá hodnota a my chceme určit neznámou hodnotu

$$\boxed{\operatorname{tg}\psi = (f^{-1})'(x_0)}.$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, je pro $\operatorname{tg}\varphi \neq 0$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{2}\sin\varphi}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi + \sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$= \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

neboť $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Je tedy

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Je-li $\operatorname{tg}\varphi = 0$ (tečna ke grafu původní funkce $x = f(y)$ je vodorovná), potom je tečna ke grafu inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ svislá, tj. $(f^{-1})'(x_0)$ je nevlastní. $\square$

Poznámka 6. Derivaci inverzní funkce lze také odvodit z pravidla pro složenou funkci (Věta 10). Je totiž pro každé $x \in \mathcal{D}(f^{-1})$

$$x = f\big(f^{-1}(x)\big),$$

a tedy derivováním na obou stranách této rovnosti dostaneme

$$1 = \big[f\big(f^{-1}(x)\big)\big]' = f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot (f^{-1})'(x), \quad \text{tj.} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

$\square$

Příklad 41. Určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Řešení. Označme si (viz Příklad 40)

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad x = f(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 3y^2.$$

Tedy podle Věty 11 je

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\,(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}.$$

Všimněte si, že $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ a výraz na pravé straně je $\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$. $\square$

1.9. **Derivace elementárních funkcí.** V tomto odstavci odvodíme derivace všech elementárních funkcí.

Ze vztahu (19) víme, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$ (pro $n = 0$ derivaci funkce $x^0 \equiv 1$ můžeme v tomto vztahu interpretovat jako $0 = (1)' = (x^0)' = 0x^{-1}$, přičemž poslední uvedený výraz definujeme jako 0).

Nyní ukážeme, že stejný vztah platí pro libovolné (reálné) exponenty, nejen pro přirozená čísla.

Tvrzení 1 (**Derivace mocniny**). *Pro libovolný exponent $r \in \mathbb{R}$ platí, že*

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \tag{20}$$

kdykoliv mají uvedené výrazy smysl.

Důkaz.
Krok I. ($r = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). To jsme již ukázali ve vzorečku (19).

Krok II. ($r = m \in \mathbb{Z}$). Nechť m je záporné celé číslo, tj. $m = -n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Potom $x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ a tedy derivaci funkce x^m odvodíme z pravidla pro derivaci podílu (Věta 9(iv)):

$$(x^m)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)\,x^{(n-1)-2n} = (-n)\,x^{-n-1} = mx^{m-1}.$$

Krok III. ($r = \frac{1}{q}$, kde $q \in \mathbb{N}$). Derivaci funkce $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ odvodíme z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 11, podobně jako v Příkladu 41). Označme si $y = f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$ a $x = f(y) = y^q$. Protože je $q \in \mathbb{N}$, je podle Kroku I. $f'(y) = qy^{q-1}$. A tedy podle Věty 11 platí, že

$$(x^r)' = (\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q}\, x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Krok IV. ($r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$). Derivaci funkce $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ odvodíme z věty o derivaci složené funkce (Věta 10) a z Kroku I. a III.:

$$(x^r)' = \left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right]' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q}\, x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p-1+1-q}{q}} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Nebo lze postupovat v obráceném pořadí, tj. derivovat výraz $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ jako složenou funkci. Vyzkoušejte si tuto druhou možnost sami.

Krok V. ($r \in \mathbb{R}$). Tento poslední krok plyne např. z pravidla pro derivování exponenciální funkce, které odvodíme později (viz Důsledek 2). □

Poznámka 7. Výraz x^r obecně není definován pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Např. pro $r = \frac{1}{2}$ je tento výraz definován pouze pro $x \geq 0$. Obecně lze s jistotou říci, že rovnost (20) platí pro $x > 0$ (a libovolné $r \in \mathbb{R}$).

Navíc, pro některé exponenty může rovnost (20) platit i pro $x \leq 0$. Např. pro $r \geq 1$ platí i pro $x = 0$, či pro r celé záporné (tj. pro $r = -1, -2, -3, \dots$) rovnost (20) platí pro všechna $x < 0$ (kromě již uvedených $x > 0$). □

Příklad 42. Platí

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(viz Příklad 29)},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{(viz Příklad 27)},$$

$$(x^\pi)' = \pi\, x^{\pi-1}.$$

□

Tvrzení 2 (Derivace trigonometrických funkcí). *Pro trigonometrické funkce platí*

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{21}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{22}$$

Důkaz. Derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$ vypočteme z definice (Definice 6 a vzorec (18)) za použití součtových vzorců:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x)(\cos h) + (\cos x)(\sin h) - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{ (-\sin x) \cdot \underbrace{\frac{1-\cos h}{h}}_{\to 0} + (\cos x) \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right\} = (-\sin x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x)(\cos h) - (\sin x)(\sin h) - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{ (-\sin x) \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} - (\cos x) \cdot \underbrace{\frac{1-\cos h}{h}}_{\to 0} \right\} = (-\sin x)\cdot 1 - (\cos x)\cdot 0 = -\sin x.$$

Derivace funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ odvodíme z pravidla pro derivaci podílu (Věta 9(iv)):

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)\cdot(\cos x) - (\sin x)\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot(\sin x) - (\cos x)\cdot(\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Všimněte si také, že derivaci $\operatorname{cotg} x$ lze spočítat z pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 10), protože platí

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left[(\operatorname{tg} x)^{-1}\right]' = (-1)\,(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = (-1)\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

□

Dále uvedeme derivace exponenciálních a logaritmických funkcí. O čísle e více v Příkladu 6.

Tvrzení 3 (Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí). *Pro exponenciální a logaritmické funkce platí*

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \tag{23}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{24}$$

Důkaz. Derivace funkcí e^x a a^x vypočteme z definice (Definice 6) za použití základních limit (13) a (15):

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}}_{=1} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x,$$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = a^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{=\ln a} = a^x \cdot \ln a.$$

Všimněte si, že derivaci funkce a^x je také možné vypočítat z derivace složené funkce pomocí

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Derivace funkcí $\ln x$ a $\log_a x$ vypočteme z definice (Definice 6) za použití základní limity (14):

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{=1}\cdot\frac{1}{x} = 1\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{x\,\ln a}.$$

Všimněte si, že derivaci funkce $\ln x$ lze také spočítat z derivace funkce inverzní (Věta 11), neboť pro $y = f^{-1}(x) = \ln x$ a pro $x = f(y) = \mathrm{e}^y$ máme $f'(y) = \mathrm{e}^y$, takže podle Věty 11 je

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

□

Důsledek 2 (Derivace mocniny). *Pro libovolné $r\in\mathbb{R}$ platí*

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \qquad x>0.$$

Důkaz. Z pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 10) a z derivace logaritmu plyne, že

$$(x^r)' = \left(\mathrm{e}^{r\,\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{r\,\ln x}\cdot(r\,\ln x)' = x^r\cdot r\,\frac{1}{x} = rx^r\cdot x^{-1} = rx^{r-1}.$$

□

Poznámka 8. V Příkladech 13, 14, 15, 16, 17 a 18 jsme ukázali, že

$$\begin{array}{ll}\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1, & \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0,\\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1, & \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1,\\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a, & \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)}{h} = \frac{1}{\ln a}.\end{array}.$$

Tyto limity ale nevyjadřují nic jiného, než derivace funkcí $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x v bodě 0 a derivace funkcí $\ln x$, $\log_a x$ v bodě 1, neboť

$$\begin{array}{ll}\displaystyle(\sin x)'\big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1, & \displaystyle(\cos x)'\big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0,\\ \displaystyle(\mathrm{e}^x)'\big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1, & \displaystyle(\ln x)'\big|_{x=1} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1,\\ \displaystyle(a^x)'\big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a, & \displaystyle(\log_a x)'\big|_{x=1} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)}{h} = \frac{1}{\ln a}.\end{array}$$

□

Tvrzení 4 (Derivace cyklometrických funkcí). *Pro cyklometrické funkce platí*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{25}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{26}$$

Důkaz. Derivace všech těchto cyklometrických funkcí vypočteme z pravidla pro derivování inverzní funkce (Věta 11).

- Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\arcsin x}$ a pro $x = f(y) = \sin y$ máme $f'(y) = \cos y$, a proto podle Věty 11 platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Protože ale pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ (zejména tedy pro $y = \arcsin x$), je

$$1 = \big[\cos(\arcsin x)\big]^2 + \big[\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\big]^2 = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\arccos x}$ a pro $x = f(y) = \cos y$ máme $f'(y) = -\sin y$, a proto podle Věty 11 platí, že

$$(\arccos x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Protože ale pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ (zejména tedy pro $y = \arccos x$), je

$$1 = \big[\underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x}\big]^2 + \big[\sin(\arccos x)\big]^2 = x^2 + \sin^2(\arccos x),$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\operatorname{arctg} x}$ a pro $x = f(y) = \operatorname{tg} y$ máme $f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, a proto podle Věty 11 platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Protože ale pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ (zejména tedy pro $y = \operatorname{arctg} x$), je

$$1 = \big[\cos(\operatorname{arctg} x)\big]^2 + \big[\sin(\operatorname{arctg} x)\big]^2.$$

Vydělením obou stran této rovnosti výrazem $\big[\cos(\operatorname{arctg} x)\big]^2$ dostaneme

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + \left(\frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)}\right)^2 = 1 + \big[\underbrace{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}_{=x}\big]^2 = 1 + x^2,$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

• Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\operatorname{arccotg} x}$ a pro $x = f(y) = \operatorname{cotg} y$ máme $f'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y}$, a proto podle Věty 11 platí, že

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = -\sin^2 y = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x).$$

Protože ale pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ (zejména tedy pro $y = \operatorname{arccotg} x$), je

$$1 = \big[\cos(\operatorname{arccotg} x)\big]^2 + \big[\sin(\operatorname{arccotg} x)\big]^2.$$

Vydělením obou stran této rovnosti výrazem $\big[\sin(\operatorname{arccotg} x)\big]^2$ dostaneme

$$\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccotg} x)} = \left(\frac{\cos(\operatorname{arccotg} x)}{\sin(\operatorname{arccotg} x)}\right)^2 + 1 = \big[\underbrace{\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x)}_{=x}\big]^2 + 1 = x^2 + 1,$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

Příklad 43. Zkuste si promyslet, jak by se vypočítaly derivace funkcí typu $[f(x)]^{g(x)}$, jako např.

$$x^x, \qquad x^{\ln x}, \qquad x^{\sin x}, \qquad (\sin x)^x, \qquad \text{atd.}$$

□

1.10. **Věty o střední hodnotě.**

Věta 12 (Rolleova). *Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$, $f(x)$ je diferencovatelná na (a,b) a nechť $f(a) = f(b)$. Potom existuje (alespoň jeden) bod $c \in (a,b)$ s vlastností*

$$f'(c) = 0 \qquad \text{(tj. tečna v bodě } x = c \text{ je vodorovná).}$$

Věta 13 (Lagrangeova). *Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$ a $f(x)$ je diferencovatelná na (a,b). Potom existuje (alespoň jeden) bod $c \in (a,b)$ s vlastností*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{(tj. tečna v bodě } x = c \text{ je rovnoběžná s přímkou procházející body } [a, f(a)] \text{ a } [b, f(b)]\text{).}$$

Věty o střední hodnotě mají celou řadu důsledků týkajících se vlastnosti funkcí. Např.:

- Které funkce mají <u>nulovou derivaci</u>? – Pouze <u>konstantní</u> funkce.
- Které funkce mají <u>stejnou derivaci</u>? – Právě ty funkce, které se navzájem <u>liší o konstantu</u>.

Důsledek 3. *Je-li $f(x)$ diferencovatelná na (a,b) a je-li $f'(x) = 0$ na (a,b), potom*

$$f(x) \equiv c \quad \text{na } (a,b).$$

Důkaz. Pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, platí, že $f(x)$ je spojitá na $[x_1, x_2]$ (podle Věty 8, neboť existuje vlastní $f'(x)$) a diferencovatelná na (x_1, x_2). Podle Lagrangeovy věty (Věta 13) je pak pro nějaký bod $c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

A protože byly body x_1 a x_2 vybrány libovolně v intervalu (a,b), musí být nutně $f(x)$ konstantní na intervalu (a,b). □

Důsledek 4. *Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na (a,b) a je-li $f'(x) = g'(x)$ na (a,b), potom*

$$f(x) = g(x) + c \quad \textit{na } (a,b) \qquad (f(x) \textit{ a } g(x) \textit{ se liší o konstantu}).$$

Důkaz. Funkce $(f-g)(x)$ je diferencovatelná na (a,b) a $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ na (a,b). Podle Důsledku 3 je pak

$$f(x) - g(x) \equiv c \quad \text{na } (a,b), \qquad \text{tj.} \qquad f(x) = g(x) + c \quad \text{na } (a,b).$$

□

1.11. **L'Hospitalovo pravidlo.** Některé limity typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ lze řešit pomocí tzv. l'Hospitalova pravidla. (Případně i typu $\frac{k}{\pm\infty}$, tyto limity jsou ale automaticky rovny 0.)

Věta 14 (**L'Hospitalovo pravidlo**). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, na ryzím okolí x_0 jsou funkce f, g diferencovatelné a $g'(x) \neq 0$. Dále nechť je*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \textit{typu } \frac{0}{0} \textit{ nebo } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \tag{27}$$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

potom existuje také limita (27) a tyto dvě limity jsou si rovny, tj.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (\in \mathbb{R}^*). \tag{28}$$

Příklad 44.

(a)

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x \quad \Big| \text{ typ } 0 \cdot (-\infty) \Big| = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \Big| \text{ typ } \frac{-\infty}{\infty} \Big| \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

(b)

$$\lim_{x \to 0^+} x^x \quad \Big| \text{ typ } 0^0 \Big| = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{x \ln x} \quad \overset{\text{spojitost } \mathrm{e}^x}{=} \quad \mathrm{e}^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x} \overset{\text{(a)}}{=} \mathrm{e}^0 = 1.$$

□

Poznámka 9. L'Hospitalovo pravidlo říká, že jestliže existuje limita podílu derivací, potom existuje také limita podílu funkcí (a tyto dvě limity jsou si rovny)! Nic víc.

(i) L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, pokud limita podílu derivací neexistuje. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \right| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} \cos x \qquad \text{(neexistuje)}.$$

(ii) L'Hospitalovo pravidlo nelze použít na typ limity $\frac{\text{cokoliv}}{0}$! Pokud je ve jmenovateli typ 0, musí pak být i v čitateli typ 0 (aby bylo možné l'Hospitalovo pravidlo použít). Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} \quad \left| \text{typ } \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \right| = \infty,$$

ale limita podílu derivací je jiná, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{(\operatorname{arccotg} x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1.$$

□

Poznámka 10.

(i) Limity typu $\infty - \infty$ lze převést na typ $\frac{0}{0}$ následovně:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] \quad \left| \text{typ } \infty - \infty \right| = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \quad \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right|.$$

(ii) Limity typu $0 \cdot \infty$ lze převést na typ $\frac{0}{0}$ (viz Příklad 44(a)) nebo na typ $\frac{\infty}{\infty}$ následovně:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] \quad \left| \text{typ } 0 \cdot \infty \right| = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right|,$$

$$\overset{\text{nebo}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

(iii) Limity typu 0^0, ∞^0, 1^∞ lze pomocí exponenciální funkce (viz např. Příklad 44(b)) převést na typ $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\,\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} g(x)\,\ln f(x)} \quad \left| \text{typ } 0 \cdot \infty \text{ nebo } \infty \cdot 0 \right|.$$

□

1.12. **Derivace implicitně zadaných funkcí.** Pokud máme zadánu funkci $f(x)$ vzorcem $y = f(x)$, hovoříme o jejím explicitním zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice $F(x, y) = 0$, kde závislá proměnná y představuje „neznámou“ funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k y, pak hovoříme o funkci zadané implicitně. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat $y'(x)$ (aniž bychom znali explicitní vzorec pro $y(x)$), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 10).

Příklad 45. Rovnice $y^2 = x$ definuje dvě diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí y_1 a y_2 lze derivováním rovnice $y^2 = x$ spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro y' obsahující jak y_1 tak y_2. □

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuje výsledná derivace y' jak proměnnou x tak proměnnou y (na rozdíl od „normálního“ derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná x).

Při derivování implicitně zadaných funkcí musíme brát závislou proměnnou (obvykle) y jako funkci proměnné x, tedy jakýkoliv složitější výraz s y musíme derivovat pomocí pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 10), viz Příklad 45.

Příklad 46. Určete směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$.

Řešení. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A proto je směrnice tečny v bodě P (=derivace v bodě P) rovna

$$y' = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

□

V Příkladech 45 a 46 bylo možné neznámou funkci y explicitně vypočítat (i když jsme to nepotřebovali) a najít tak y' původním způsobem. V následujícím příkladu ale y již vyjádřit nelze, a tudíž je implicitní derivování jediným možným způsobem, jak y' najít.

Příklad 47. Určete derivaci funkce $y = f(x)$, která je zadaná rovnicí $4y = x^3 + \cos y$.

Řešení. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(4y)' = (x^3 + \cos y)' \quad \Rightarrow \quad 4y' = 3x^2 - (\sin y)\, y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{4 + \sin y}.$$

□

Tímto způsobem lze počítat i derivace vyšších řádů.

Příklad 48. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$, která je zadaná rovnicí $3x^4 - 4y^3 = 1$.

Řešení. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(3x^4 - 4y^3)' = (1)' \quad \Rightarrow \quad 12x^3 - 12y^2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - y^2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{x^3}{y^2}}.$$

Opětovným derivováním předposlední uvedené rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(x^3 - y^2y')' = (0)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - (2yy' \cdot y' + y^2 \cdot y'') = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2y\,(y')^2 - y^2\,y'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'' = \frac{3x^2 - 2y\,(y')^2}{y^2}}.$$

Všimněte si, že pro derivaci výrazu y^2y' musíme použít pravidlo součinu, protože obě funkce y^2 a y' jsou funkce proměnné x. Ve výsledku samozřejmě ještě můžeme dosadit za y' z předchozího výpočtu, tj.

$$y'' = \frac{3x^2 - 2y\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2}{y^2} = \frac{3x^2y^3 - 2x^6}{y^5}.$$

□

1.13. **Jednoduché slovní úlohy s derivacemi.** Následující slovní úlohy jsou převzaty z [9].

Příklad 49. Jak rychle klesá voda ve válcové nádrži, jestliže vytéká rychlostí 3000 l/min?

Řešení. Označme r poloměr nádrže [m], $h(t)$ výšku vody v nádrži [m], t čas [min], $V(t)$ objem vody v nádrži [m^3]. Víme, že $V'(t) = -3000$ l/min, tj. $V'(t) = -3$ m^3/min (objem se zmenšuje, jeho derivace je tedy záporná). Hledáme $h'(t)$. Z rovnice pro objem válce

$$V(t) = \pi\, r^2\, h(t)$$

určíme derivováním podle t

$$V'(t) = \pi\, r^2\, h'(t), \qquad \text{tj.} \qquad h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi\, r^2} = \frac{-3}{\pi\, r^2}.$$

Voda tedy klesá (protože je derivace objemu záporná) rychlostí $3/(\pi\, r^2)$ m/min. Pro malé r bude voda klesat rychle, pro velké r bude voda klesat pomalu. Např. pro $r = 10$ cm, tj. $r = 0.1$ m, je $h'(t) = -300/\pi = -95$ m/min, naproti tomu pro $r = 10$ m je $h'(t) = -3/(100\,\pi) = -0.0095$ m/min, tj. $h'(t) = -9.5$ mm/min. □

Příklad 50. Horkovzdušný balón stoupá kolmo vzhůru. Je zachycen radarem, který je 500 metrů od místa vzletu a který v té chvíli udává elevační úhel $\frac{\pi}{4}$, přičemž úhel roste rychlostí 0.14 rad/min. Jak rychle v tomto okamžiku balón stoupá?

Řešení. Označme t čas [min], $h(t)$ výška balónu nad zemí [m], $\varphi(t)$ vertikální elevační úhel radaru [rad]. Potom víme, že $\varphi'(t) = 0.14$ rad/min, když je $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Hledáme $h'(t)$ pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Z pravoúhlého trojúhelníka vidíme, že

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{h(t)}{500}, \qquad \text{tj.} \qquad h(t) = 500\ \operatorname{tg}\varphi(t).$$

Derivováním podle t určíme

$$h'(t) = 500\,\frac{1}{\cos^2\varphi(t)}\,\varphi'(t),$$

tj. v uvedeném okamžiku je

$$h'(t) = 500\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\,(0.14) = 140 \text{ m/min}.$$

V daném okamžiku stoupá balón rychlostí 140 m/min. □

Příklad 51. Policejní auto sleduje auto lupičů. Přijíždí k pravoúhlé křižovatce ze severu, přičemž auto lupičů již ujíždí od křižovatky na východ. Když je policejní auto 0.6 km od křižovatky a auto lupičů 0.8 km od křižovatky, udává radar v policejním autě, že se auto lupičů vzdaluje od jejich auta rychlostí 40 km/h. Policejní auto jede v té chvíli rychlostí 120 km/h. Určete rychlost auta lupičů v tomto okamžiku.

Řešení. Označme $x(t)$ pozici auta lupičů (vodorovně) [km], $y(t)$ pozici policejního auta (svisle) [km], t čas [h], $s(t)$ vzdušnou vzdálenost mezi auty [km]. Potom víme, že $s'(t) = 40$ km/h pro $x = 0.8$ km a $y = 0.6$ km a $y'(t) = -120$ km/h (policejní auto se ke křižovatce přibližuje, proto je derivace jejich pozice $y(t)$ záporná). Hledáme $x'(t)$ v témže okamžiku. Z rovnice

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

obdržíme derivováním podle t

$$2\,s(t)\,s'(t) = 2\,x(t)\,x'(t) + 2\,y(t)\,y'(t), \qquad \text{tj.} \qquad x'(t) = \frac{s(t)\,s'(t) - y(t)\,y'(t)}{x(t)}.$$

Dosazením údajů pro daný okamžik dostaneme

$$x'(t) = \frac{\sqrt{(0.6)^2 + (0.8)^2}\,\cdot\,40 - (0.6)\,(-120)}{0.8} = 140 \text{ km/h}.$$

Auto lupičů ujíždí v daném okamžiku od křižovatky rychlostí 140 km/h. □

Příklad 52. Policejní vrtulník letí 3 km nad rovnou cestou v obci rychlostí 120 km/h. Pilot vidí protijedoucí auto a radarem zjistí, že když je auto od něj 5 km daleko, jejich vzdálenost klesá rychlostí 160 km/h. Určete rychlost auta v tomto okamžiku.

Řešení. Označme $x(t)$ pozici auta (vodorovná) [km], $y(t)$ pozici vrtulníku (vodorovná) [km], t čas [h], $s(t)$ vzdušnou vzdálenost vrtulníku a auta [km]. Potom víme, že $y'(t) = 120$ km/h a $s'(t) = -160$ km/h pro $s = 5$ km (jejich vzdušná vzdálenost se zmenšuje, proto je derivace záporná). Hledáme $x'(t)$ v tomto okamžiku. Z rovnice

$$[x(t) - y(t)]^2 + 3^2 = s^2(t)$$

dostaneme derivováním podle t

$$2\,[x(t) - y(t)]\,[x'(t) - y'(t)] = 2\,s(t)\,s'(t), \qquad \text{tj.} \qquad x'(t) = y'(t) + \frac{s(t)\,s'(t)}{x(t) - y(t)}.$$

Pro $s = 5$ km je $x - y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km, tedy dosazením do výše uvedeného vztahu dostaneme pro daný okamžik, že

$$x'(t) = 120 + \frac{5 \cdot (-160)}{4} = -80 \text{ km/h}.$$

Auto jede (přibližuje se z pohledu pilota vrtulníku) v obci rychlostí 80 km/h. □

Příklad 53. Člověk výšky 180 cm jde rychlostí 1.5 m/s k pouliční lampě, která je 4.8 metrů nad zemí. (a) Jakou rychlostí se pohybuje špička jeho stínu? (b) Jakou rychlostí se mění délka jeho stínu, když je ten člověk 3 metry od stojanu lampy?

Řešení. Označme $x(t)$ pozici člověka [m], $y(t)$ pozici špičky jeho stínu [m], t čas [s]. Potom víme, že $x'(t) = -1.5$ m/s (vzdálenost od lampy se zmenšuje, proto je tato derivace záporná). Hledáme (a) $y'(t)$, (b) $[y(t) - x(t)]'$ pro $x = 3$ m. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků vyplývá, že

$$\frac{4.8}{y(t)} = \frac{1.8}{y(t) - x(t)}, \quad \text{tj.} \quad (4.8)\,[y(t) - x(t)] = (1.8)\,y(t), \quad \text{tj.} \quad y(t) = (1.6)\,x(t).$$

Derivováním podle t obdržíme

$$y'(t) = (1.6)\,x'(t), \quad \text{tj. po dosazení} \quad y'(t) = (1.6) \cdot (-1.5) = -2.4 \text{ m/s}.$$

Špička stínu se pohybuje rychlostí 2.4 m/s (přibližuje se k lampě). Pro druhou otázku máme

$$y(t) - x(t) = \frac{1.8}{4.8}\,y(t) = (0.375)\,y(t),$$

tj. po derivování a dosazení

$$[y(t) - x(t)]' = (0.375)\,y'(t) = (0.375) \cdot (-2.4) = -0.9 \text{ m/s}.$$

Délka stínu klesá rychlostí 0.9 m/s (a tato rychlost nezávisí na vzdálenosti člověka od lampy). □

1.14. **Monotonie funkce a extrémy.**

Definice 7 (Monotonie funkce). Funkce $f(x)$ je

- rostoucí na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- klesající na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- neklesající na intervalu I, pokud $f(x_1) \leq f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- nerostoucí na intervalu I, pokud $f(x_1) \geq f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

□

Věta 15 (Monotonie funkce). *Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.*

(i) *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.*

(ii) *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

(iii) *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$.*

(iv) *Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z (Lagrangeovy) věty o střední hodnotě (Věta 13), neboť

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c),$$

a tedy výraz $f(x_2) - f(x_1)$ má stejné znaménko jako f'. □

Příklad 54. Funkce $f(x) = x + \cos x$ má derivaci $f'(x) = 1 - \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože je hodnota $\sin x \in [-1, 1]$, je $f'(x) \in [0, 2]$ a tedy je $f'(x) \geq 0$ na celém $\mathbb{R}$. Tedy podle Věty 15(i) je funkce $f(x)$ neklesající na $\mathbb{R}$. Navíc, protože rovnost $f'(x) = 0$ znamená, že $\sin x = 1$ a tato rovnost evidentně neplatí na žádném podintervalu $\mathbb{R}$, je podle Věty 15(ii) funkce $f(x)$ rostoucí na $\mathbb{R}$. □

Důsledek 5. *Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.*

(i) *Jestliže $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, potom je funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I.*

(ii) *Jestliže $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$, potom je funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I.*

Tedy pro určení intervalů monotonie funkce $f(x)$ stačí určit body, kdy $\underline{f'(x) \text{ mění znaménko}}$. Zejména to jsou body, ve kterých je $\boxed{f'(x) = 0}$ nebo ve kterých $\boxed{f'(x) \text{ neexistuje}}$.

Příklad 55. Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16} = \frac{x}{(x-8)(x+2)}.$$

Řešení. Vypočteme derivaci:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 6x - 16}\right)' = \cdots = \frac{-x^2 - 16}{(x-8)^2 (x+2)^2} < 0 \qquad \text{pro } x \neq -2,\ 8.$$

(Viz tabulka.) Tedy je tato funkce klesající na intervalu $(-\infty, -2)$, na intervalu $(-2, 8)$ a na intervalu $(8, \infty)$. □

Příklad 56. Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^3 - 6x}.$$

Řešení. Vypočteme derivaci:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^3-6x} \cdot (3x^2 - 6) = 3\,\mathrm{e}^{x^3-6x} \cdot (x^2 - 2) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že $f'(x) = 0$ pouze pro $x = \pm\sqrt{2}$. Na každém z intervalů $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$ určíme znaménko derivace např. výběrem nějakého bodu z tohoto intervalu, protože víme, že se znaménko $f'(x)$ v těchto intervalech již nemění (viz tabulka). Tedy

$f(x)$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2}]$ a na intervalu $[\sqrt{2}, \infty)$,
$f(x)$ je klesající na intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

□

Definice 8 (Lokální extrémy). Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- lokální maximum, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- lokální minimum, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- ostré lokální maximum, pokud $f(x) < f(x_0)$ pro všechna x z nějakého ryzího okolí bodu x_0,
- ostré lokální minimum, pokud $f(x) > f(x_0)$ pro všechna x z nějakého ryzího okolí bodu x_0.

□

Následující věta říká, že tečna v bodech lokálních extrémů (pokud tedy existuje vlastní derivace v takových bodech) musí nutně být vodorovná.

Věta 16. *Existuje-li vlastní derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0, kde má funkce $f(x)$ lokální extrém, potom je nutně* $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají stacionární body funkce $f(x)$.

Opačné tvrzení k Větě 16 neplatí, tj. z $f'(x_0) = 0$ neplyne extrém v bodě x_0. Nejjednodušším příkladem je funkce $f(x) = x^3$, která v počátku nemá extrém, ale je $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$ (tj. tečna v bodě $x_0 = 0$ je vodorovná).

Důsledek 6. *Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.*

Zda v daném stacionárním bodě x_0 nebo v bodě, kde $f'(x_0)$ neexistuje, je nebo není lokální extrém, můžeme určit z chování znaménka $f'(x)$ v okolí bodu x_0.

Věta 17 (Lokální extrémy a derivace). *Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0.*

(i) *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*

- *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*
- *je-li změna $f'(x)$ z $\oplus$ do $\ominus$, potom je v bodě x_0 lokální maximum.*

(ii) *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 stejná znaménka, potom není v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*

- *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 kladné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 rostoucí,*
- *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 záporné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 klesající.*

Příklad 57. Určete lokální extrémy funkce
$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Řešení. Protože
$$\begin{array}{llll} x \geq 0: & f(x) = x - 1 - \sqrt{x} & \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 & \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}, \\ x < 0: & f(x) = x - 1 - \sqrt{-x} & \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = 0 & \text{žádné řešení pro } x < 0. \end{array}$$

Tedy kandidáti na lokální extrémy jsou: stacionární bod $x = \frac{1}{4}$ a bod, kde neexistuje $f'(x)$, tj. $x = 0$.

Volbou např. $x = -1$, $x = \frac{1}{9}$ a $x = 1$ určíme znaménko $f'(x)$ v každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$ a $(\frac{1}{4}, \infty)$ (viz tabulka). Tedy je
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ostré lok. max. v } x = 0, \\ \text{ostré lok. min. v } x = \frac{1}{4}. \end{array}}$$
□

Věta 18 (Lokální extrémy a druhá derivace). *Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.*

(i) *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

(ii) *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz. (i) $f''(x_0) > 0$ a $f'(x_0) = 0$ znamená, že $f'(x)$ roste v bodě x_0 z $\ominus$ do $\oplus$ hodnot, tedy funkce $f(x)$ samotná klesá a pak roste. Tedy je v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(ii) $f''(x_0) < 0$ a $f'(x_0) = 0$ znamená, že $f'(x)$ klesá v bodě x_0 z $\oplus$ do $\ominus$ hodnot, tedy funkce $f(x)$ samotná roste a pak klesá. Tedy je v bodě x_0 ostré lokální maximum. □

Příklad 58. Stejně jako v Příkladu 57 je
$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \Big|_{x=\frac{1}{4}} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ostré lok. min. v } x_0 = \frac{1}{4}.$$
□

Poznámka 11. Obecněji, je-li
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$
potom

- pro k sudé je ostrý lokální extrém v bodě x_0, přičemž
  - pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je v bodě x_0 ostré lokální minimum,
  - pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ je v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- pro k liché není lokální extrém v bodě x_0, přičemž

– pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ funkce $f(x)$ roste v bodě x_0,

– pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ funkce $f(x)$ klesá v bodě x_0.

Všechny tyto případy si můžete lehce ilustrovat na mocninných funkcích x^2, x^3, x^4, x^5, atd. v bodě $x_0 = 0$. □

Definice 9 (Globální extrémy). Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- globální maximum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$,
- globální minimum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$.

□

Poznámka 12.

(i) Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.

(ii) Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.

(iii) Globální max/min nemusí ani existovat (viz Poznámka 3).

(iv) Weierstrassova věta (Věta 5) zaručuje existenci globálního max/min – za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

(v) Pokud víme, že globální extrémy existují, potom musí tyto globální extrémy být

ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde neexistuje $f'(x)$, nebo v krajních bodech

daného intervalu. Nemusíme již pak určovat, jestli jsou ve stacionárních bodech lokální extrémy či nikoliv.

□

Poznámka 13. Z Poznámky 12(v) plyne postup pro nalezení globálních extrémů spojité funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ (z Weierstrassovy věty víme, že globální max/min existuje):

- Najdeme stacionární body funkce $f(x)$ a body, kde neexistuje $f'(x)$.
- V těchto bodech a v krajních bodech intervalu určíme funkční hodnoty.
- Vybereme z nich max a min hodnotu.

□

Příklad 59. Určete globální extrémy funkce
$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Řešení. Protože je $f(x)$ spojitá na intervalu $[-1,1]$, globální extrémy v tomto intervalu existují. Z Příkladu 57 víme, že $x = \frac{1}{4}$ je jediný stacionární bod a $x = 0$ je bod, kde neexistuje $f'(x)$, v intervalu $[-1,1]$. Máme tedy

$$\begin{array}{llll}
\text{stacionární body:} & x = \frac{1}{4}, & f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}, & \\
\nexists\ f'(x) & x = 0, & f(0) = -1, & \leftarrow \text{max} \\
\text{krajní body:} & x = -1, & f(-1) = -1 - 1 - 1 = -3, & \leftarrow \text{min} \\
 & x = 1, & f(1) = 1 - 1 - 1 = -1. & \leftarrow \text{max}
\end{array}$$

Tedy je

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{globální min } -3 \text{ v bodě } x = -1, \\ \text{globální max } -1 \text{ v bodech } x = 0,\ x = 1.\end{array}}$$

□

1.15. **Konvexnost, konkávnost, inflexe.** Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí“. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Definice 10 (Konvexnost, konkávnost). Nechť má funkce $f(x)$ vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ se nazývá

- konvexní na intervalu I, pokud je $f'(x)$ neklesající na I,
- konkávní na intervalu I, pokud je $f'(x)$ nerostoucí na I.

□

Poznámka 14. To, že funkce $f'(x)$ je neklesající na intervalu I (tj. $f(x)$ je konvexní), znamená, že tečny mají „neklesající směrnici“, tj.

graf funkce $f(x)$ „zatáčí doleva“ a tečny leží pod grafem.

To, že funkce $f'(x)$ je nerostoucí na intervalu I (tj. $f(x)$ je konkávní), znamená, že tečny mají „nerostoucí směrnici“, tj.

graf funkce $f(x)$ „zatáčí doprava“ a tečny leží nad grafem.

□

Příklad 60.

(a) Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.

(c) Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.

(d) Funkce $f(x) = ax + b$ má derivaci $f'(x) = a$, což je funkce konstantní (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je $ax + b$ konvexní na $\mathbb{R}$. Současně je konstantní funkce $f'(x) = a$ nerostoucí na $\mathbb{R}$, a proto je $ax + b$ také konkávní na $\mathbb{R}$.

$\square$

Věta 19 (Konvexnost a konkávnost a druhá derivace). *Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.*

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Důkaz. (i) Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, potom je podle Důsledku 5(i) (který aplikujeme na funkci $f'(x)$) funkce $f'(x)$ rostoucí na intervalu I. Tedy je podle Definice 10 funkce $f(x)$ konvexní na intervalu I.

(ii) Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, potom je podle Důsledku 5(ii) (který aplikujeme na funkci $f'(x)$) funkce $f'(x)$ klesající na intervalu I. Tedy je podle Definice 10 funkce $f(x)$ konkávní na I. $\square$

Tam, kde se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, se nacházejí tzv. inflexní body funkce.

Definice 11 (Inflexní bod). Nechť má funkce $f(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x_0)$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní, potom navíc předpokládejme, že je $f(x)$ spojitá v bodě x_0. Bod x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, pokud v nějakém levém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konkávní, nebo naopak. $\square$

Věta 20 (Vlastnosti inflexních bodů).

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace $f''(x_0)$ v inflexním bodě x_0, potom je $f''(x_0) = 0$.*

(ii) *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f''(x)$ mění znaménko v bodě x_0, potom je x_0 inflexní bod.*

(iii) *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom je x_0 inflexní bod.*

Zejména část (ii) v předchozí větě ukazuje, jak inflexní body najít. Současně ze změny znaménka $f''(x)$ (tedy jestli se jedná o změnu z $\ominus$ do $\oplus$ nebo o změnu z $\oplus$ do $\ominus$) poznáme, kterým směrem graf funkce $f(x)$ v bodě x_0 „zatáčí".

Příklad 61. Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Řešení.

- $f'(x) = 1 + \cos x = 0$ implikuje, že $\cos x = -1$, tedy $x = \pi, 3\pi$ jsou stacionární body (v intervalu $[0, 4\pi]$). Body, kde neexistuje $f'(x)$ nejsou. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f'(x)$ v těchto intervalech (viz tabulka). Tedy

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je rostoucí na } [0, 4\pi], \\ f(x) \text{ nemá lokální extrémy.} \end{array}}$$

- $f''(x) = -\sin x = 0$ implikuje, že $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ jsou kandidáti na inflexní body. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f''(x)$ v těchto intervalech (viz tabulka). Tedy

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je konvexní na } [\pi, 2\pi] \text{ a na } [3\pi, 4\pi], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [0, \pi] \text{ a na } [2\pi, 3\pi], \\ f(x) \text{ má inflexi v bodech } x = \pi, 2\pi, 3\pi. \end{array}}$$

- A protože můžeme jednoduše vypočítat funkční hodnoty a hodnoty derivace (pro sklon tečny) ve zmiňovaných stacionárních, inflexních a krajních bodech,

$$\begin{array}{lllll} f(0) = 0, & f(\pi) = \pi, & f(2\pi) = 2\pi, & f(3\pi) = 3\pi, & f(4\pi) = 4\pi, \\ f'_+(0) = 2, & f'(\pi) = 0, & f'(2\pi) = 2, & f'(3\pi) = 0, & f'_-(4\pi) = 2, \end{array}$$

můžeme také načrtnout graf této funkce na intervalu $[0, 4\pi]$.

□

1.16. **Asymptoty.** Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice 12 (Asymptoty funkce).

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

- Přímka $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ je asymptotou se směrnicí v ∞, pokud

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

případně je asymptotou se směrnicí v $-\infty$, pokud

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

□

Příklad 62.

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{ typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty} \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

$\square$

Poznámka 15. Je zřejmé, že asymptoty bez směrnice mohou být pouze v bodech nespojitosti funkce $f(x)$. Viz např. Příklad 62(a). Samozřejmě ne každý bod nespojitosti zadává asymptotu, viz např. Příklad 62(b) a bod $x = 0$. $\square$

Věta 21 (Asymptoty se směrnicí). *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ v ∞ $\Leftrightarrow$*

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]. \tag{29}$$

Podobně, přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ v $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]. \tag{30}$$

Důkaz. Býti asymptotou v ∞ znamená, že

$$f(x) \approx ax + b \qquad \text{pro } x \to \infty. \tag{31}$$

Tedy pokud obě strany podělíme výrazem x, dostaneme, že

$$\frac{f(x)}{x} \approx a + \frac{b}{x} \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

A protože výraz $\frac{b}{x} \to 0$ pro $x \to \infty$, dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu a.

Dále, známe-li koeficient a, potom z vzorce (31) plyne, že

$$f(x) - ax \approx b \qquad \text{pro } x \to \infty,$$

tj. dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu b.

Podobně to platí pro $x \to -\infty$. $\square$

Poznámka 16. Protože se může snadno stát, že limity v (29) a (30) se např. pro koeficient a nebo pro koeficient b liší, používáme ve výpočtu těchto koeficientů značení

$$\boxed{a_+,\, b_+} \text{ pro limity v } \infty \qquad \text{a} \qquad \boxed{a_-,\, b_-} \text{ pro limity v } -\infty.$$

Tedy

$$a_+ = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_+ = \lim_{x\to\infty}[f(x) - a_+ \cdot x], \tag{32}$$

$$a_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_- = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - a_- \cdot x]. \tag{33}$$

$\square$

Samozřejmě, pokud alespoň jedna z limit definujících koeficienty a, b je <u>nevlastní</u> nebo <u>neexistuje</u>, tak potom daná funkce asymptotu v příslušném ∞ nebo $-\infty$ <u>nemá</u>.

Příklad 63. Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení.

- <u>Asymptoty bez směrnice</u>: Protože je funkce $f(x)$ spojitá na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, \infty)$, asymptota bez směrnice může být teoreticky pouze v bodě $x = -2$ (viz Poznámka 15). Spočteme proto jednostranné limity v tomto bodě:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \;\left|\; \text{typ } \frac{-64}{0^+} \;\right| = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \;\left|\; \text{typ } \frac{-64}{0^+} \;\right| = -\infty.$$

Tedy

$$\boxed{x = -2 \text{ je asymptota bez směrnice}}.$$

- <u>Asymptoty se směrnicí</u>:

$$\begin{aligned}
a_+ &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^3}{x\,(x+2)^2} = \cdots = 1, \\
b_+ &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - a_+ \cdot x] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - \frac{x \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-10x^2 + 8x - 8}{(x+2)^2} = -10.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\boxed{y = x - 10 \text{ je asymptota v } \infty}.$$

Výpočty pro a_- a b_- jsou naprosto stejné:

$$\begin{aligned}
a_- &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-2)^3}{x\,(x+2)^2} = \cdots = 1, \\
b_- &= \lim_{x\to-\infty} [f(x) - a_- \cdot x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - \frac{x \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2} \right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-10x^2 + 8x - 8}{(x+2)^2} = -10.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\boxed{y = x - 10 \text{ je asymptota v } -\infty}.$$

$\square$

1.17. **Celkový průběh funkce.**

Příklad 64. Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}, \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Řešení. Určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$), lokální extrémy (pokud použijeme Větu 17 či Důsledek 5),
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy (pokud použijeme Větu 18),
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných“ bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$.

$\square$

Příklad 65. Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení.

- Definiční obor je $\boxed{\mathcal{D}(f) = (0, \infty)}$.
- První derivace
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0,$$
tedy $x = 1$ je jediný stacionární bod. Protože $f'(x) < 0$ na intervalu $(0, 1)$ a $f'(x) > 0$ na intervalu $(1, \infty)$ (viz tabulka),
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je klesající na } (0,1], \\ f(x) \text{ je rostoucí na } [1,\infty), \\ f(x) \text{ má lokální min v bodě } x = 1. \end{array}}$$
[Vzhledem k okolnostem je zřejmě v bodě $x = 1$ globální minimum funkce $f(x)$ na intervalu $(0, \infty)$.]

- Druhá derivace

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} = 0,$$

tedy $x = 2$ je jediný kandidát na inflexní bod. Protože $f''(x) > 0$ na intervalu $(0, 2)$ a $f''(x) < 0$ na intervalu $(2, \infty)$ (viz tabulka),

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je konvexní na } (0,2], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [2,\infty), \\ f(x) \text{ má inflexi v bodě } x = 2. \end{array}}$$

- Asymptoty bez směrnice:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \quad \Big|\ \text{typ } \infty - \infty\ \Big| = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x\,\ln x}{x} \quad \Bigg|\ \text{typ } \frac{1}{0^+}\ \Bigg| = \infty,$$

protože podle Příkladu 44(a) je $\lim_{x\to 0^+} x\,\ln x = 0$. Tedy

$$\boxed{x = 0 \text{ je asymptota bez směrnice}}.$$

Asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}_{=0} + \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \quad \Bigg|\ \text{typ } \frac{\infty}{\infty}\ \Bigg|$$

$$\overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \quad \Big|\ \text{typ } 0 + \infty\ \Big| = \infty.$$

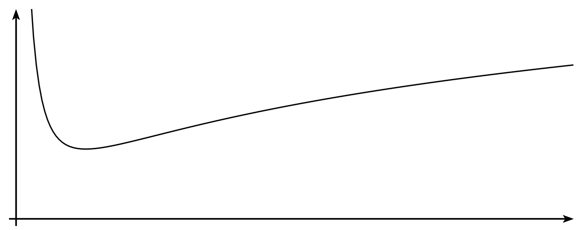
Tedy

$$\boxed{\text{Funkce } f(x) \text{ nemá asymptotu v } \infty}.$$

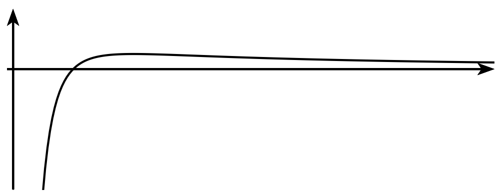
- Hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných“ bodech:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1.19, \quad f'(2) = \frac{1}{4}.$$

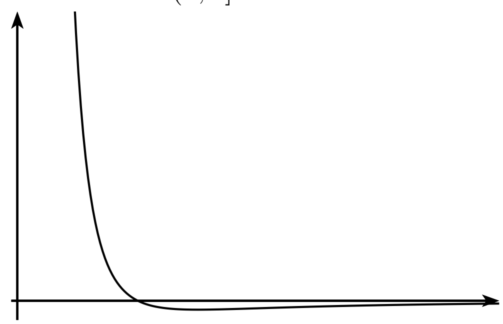
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$:



(A) Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ na intervalu $(0, 8]$.



(B) Graf funkce $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, 8]$.



(C) Graf funkce $f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, 8]$.

□

1.18. **Optimalizace.** V tomto odstavci uvidíme, jak využít znalostí o průběhu funkce či globálních extrémů funkce pro aplikace v „běžném životě“.

Příklad 66 (**Papírová krabice**)**.** Z kartonu tvaru čtverce o straně délky 54 cm vyřízněte v každém rohu stejný čtverec tak, abyste mohli sestrojit krabici (bez víka) s co největším objemem.

Řešení. Označme jako x (v cm) délku strany čtverců, které musíme vyříznout. Potom má zbývající podstava rozměry $54 - 2x$ cm $\times$ $54 - 2x$ cm, přičemž výška krabice bude právě x cm.

Pro objem krabice dostaneme proto vztah

$$V = V(x) = (54 - 2x)^2\, x = (2916 - 216x + 4x^2)\, x = \boxed{4\,(729x - 54x^2 + x^3)}\,.$$

Délka strany vyřízlých čtverců může být nejvýše $54/2 = 27$ cm, a proto musíme najít maximum funkce $V(x)$ na intervalu $[0, 27]$.

Protože je funkce $V(x)$ spojitá na intervalu $[0, 27]$, její maximum existuje (Weierstrassova věta – Věta 5). Podle Poznámky 13 musíme najít stacionární body:

$$V'(x) = 4\,(729 - 108x + 3x^2) = 12\,(243 - 36x + x^2) = 12\,(27 - x)\,(9 - x) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 27, \qquad x_2 = 9.$$

Body, kde $V'(x)$ neexistuje, nejsou.

Body $x_1 = 27$ a $x_2 = 9$ jsou tedy stacionárními body funkce $V(x)$ v intervalu $[0, 27]$, přičemž bod $x_1 = 27$ je současně krajním bodem tohoto intervalu. Hodnoty funkce $V(x)$ v těchto bodech jsou

$$\begin{array}{lll} \text{stacionární body:} & x = 27, & V(27) = (54 - 54)^2\, 27 = 0, \\ & x = 9, & V(9) = (54 - 18)^2\, 9 = 11664, \quad \leftarrow \ \text{max} \\ \text{krajní body:} & x = 0, & V(0) = 0, \\ & x = 27, & V(27) = 0. \end{array}$$

Tedy maximální objem je 11664 cm^3 (téměř 12 litrů) pro krabici o rozměrech 36 cm $\times$ 36 cm $\times$ 9 cm, tj. v každém rohu musíme vyříznout čtverec $\boxed{\text{o straně 9 cm}}$.

Všimněte si, že maximum můžeme také ověřit testem s první derivací (např. Důsledek 5): pro $x \in [0, 9)$ je $V'(x) > 0$, tedy $V(x)$ je rostoucí na intervalu $[0, 9]$, zatímco pro $x \in (9, 27)$ je $V'(x) < 0$ a tedy $V(x)$ je klesající na intervalu $[9, 27]$.

Všimněte si také, že funkce $V(x)$ je konkávní na intervalu $[0, 18]$, konvexní na intervalu $[18, 27]$ a v bodě $x = 18$ má inflexní bod. □

Příklad 67 (Výroba plechovky). Určete rozměry litrové plechovky válcového tvaru tak, aby spotřeba materiálu na její výrobu byla co nejmenší.

Řešení. Označme si jako h (v cm) výšku plechovky a jako r (v cm) poloměr jejího dna (či víčka). Potom je na výrobu takové plechovky potřeba

$$S = S(h, r) = \underbrace{2\,\pi r^2}_{\text{dno + víčko}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{stěna}} \qquad \text{cm}^2 \text{ materiálu.}$$

Protože ale musí mít plechovka objem 1 litr = 1000 cm^3, musí platit

$$V = \pi r^2 h = 1000 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{1000}{\pi r^2},$$

a tedy je

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\, \frac{1000}{\pi r^2} = \boxed{2\pi r^2 + \frac{2000}{r}} \qquad \text{pro } r > 0.$$

Hledáme tedy minimum funkce $S(r)$ pro $r \in (0, \infty)$. Všimněte si, že daný interval není uzavřený ani ohraničený, a proto pro existenci extrému nelze použít Weierstrassovu větu (Věta 5).

Určeme nejdříve stacionární body:

$$S'(r) = (2\pi r^2 + 2000\, r^{-1})' = 4\pi r - 2000\, r^{-2} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad \pi r^3 = 500, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r = r_0 := \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}} \approx 5.42.$$

Dále, protože je

$$S''(x) = (4\pi r - 2000\, r^{-2})' = 4\pi + 4000\, r^{-3} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \qquad \text{pro } r > 0,$$

je funkce $S(r)$ konvexní na celém intervalu $(0, \infty)$. A proto je bod r_0 globální minimum.

Odpovídající výška plechovky je pak

$$h_0 = \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\, \frac{\frac{500}{\pi}}{\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = \boxed{2\, r_0} \approx 10.84.$$

Spotřeba materiálu je tedy minimální, pokud

$\boxed{\text{výška plechovky je rovna průměru podstavy}}$.

$\square$

1.19. **Diferenciál funkce.** Diferenciál funkce je pojem, který se pro funkce jedné proměnné využívá pouze pro potřeby integrování (viz následující kapitola) nebo pro přibližné výpočty. Pro funkce více proměnných má mnohem větší význam a zavádí se velmi podobně.

Definice 13 (Diferenciál). Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce $y = f(x)$. Potom definujeme

- diferenciál $\mathrm{d}x$ (diferenciál nezávislé proměnné) jako $\boxed{dx = x - x_0}$ (pro x blízko x_0),
- diferenciál dy (diferenciál závislé proměnné) jako $\boxed{dy = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x}$.

Alternativní značení pro dy je df, případně $df(x_0)$ pokud chceme zdůraznit, že se jedná o diferenciál v bodě x_0. $\square$

Uvědomte si, že pokud je x napravo od x_0, je $\mathrm{d}x = x - x_0 > 0$, pokud je ale x nalevo od x_0, je $\mathrm{d}x = x - x_0 < 0$.

Příklad 68.

$$\begin{aligned} y &= \sin x, & dy &= (\sin x)' \cdot \mathrm{d}x = (\cos x)\,\mathrm{d}x, \\ y &= -x + x\,\ln x, & dy &= (-x + x\,\ln x)' \cdot \mathrm{d}x = (\ln x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$\square$

Co to vlastně ten diferenciál je (nepleťte si s diferenciálem v automobilu)?

Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě x_0 (viz Poznámka 5), potom máme

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0), \\ y - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0)\,\mathrm{d}x}_{dy} = df(x_0). \end{aligned} \tag{34}$$

Vidíme tedy, že diferenciál dy je změna funkčních hodnot na tečně. A protože hodnoty na tečně aproximují funkční hodnoty $f(x)$ pro x blízko bodu x_0, plyne z (34) vzoreček pro přibližné výpočty:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)}, \qquad \text{tj.} \qquad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{35}$$

(Jedná se vlastně o rovnici tečny zapsanou trošku jiným způsobem). Tedy hodnoty funkce $f(x)$ pro x „blízko" bodu x_0 se přibližně rovnají hodnotám na tečně v bodě x_0, přičemž pro tento výpočet musíme znát hodnotu funkce $f(x_0)$ a derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0.

Diferenciál je tedy přibližná změna funkčních hodnot pro x blízko x_0.

Příklad 69. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Řešení. Protože známe $\sqrt{81} = 9$, položíme $x_0 = 81$ a $x = 85$, tj. $\mathrm{d}x = x - x_0 = 4$. Tedy pro $f(x) = \sqrt{x}$ potom je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a tedy $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$. Ze vzorce (35) potom plyne, že

$$f(85) \approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{tj.}$$

$$\sqrt{85} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222\ldots$$

(Pro srovnání je přesná hodnota $\sqrt{85} = 9.2195\ldots$) □

Příklad 70. Poloměr kruhu se mění z 20 m na 20, 1 m. Odhadněte nárůst jeho plochy.

Řešení. Obsah kruhu je $P = P(r) = \pi r^2$. Položíme $r_0 = 20$, $r = 20.1$, a pak $dr = r - r_0 = 20.1 - 20 = 0.1$. Protože je $P(r_0) = P(20) = 400\pi$ a $P'(r_0) = P'(20) = 2\pi r\big|_{r=20} = 40\pi$, je podle vzorce (35)

$$P(r) \approx P(r_0) + P'(r_0)\,dr = 400\pi + 40\pi \cdot (0.1) = 404\pi. \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{dP(r_0) = 4\pi} \approx P(r) - P(r_0).$$

Odhad nárůstu plochy je asi $4\pi\,\mathrm{m}^2$.

Přibližný procentuální nárůst plochy (vzhledem k původní ploše) je pak

$$\frac{dP(r_0)}{P(r_0)} = \frac{4\pi}{400\pi} = \frac{1}{100} = 1\ \%.$$

Tedy plocha vzroste přibližně o 1 %. □

1.20. **Taylorův polynom.** Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.

Definice 14 (Taylorův polynom). Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n. Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 je polynom

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k,$$

přičemž pro $k = 0$ klademe $0! := 1$ a $f^{(0)}(x) := f(x)$. □

Poznámka 17.

(i) Taylorův polynom stupně $n = 0$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_0(x) = f(x_0),$$

tedy jedná se o konstantní funkci.

(ii) Taylorův polynom stupně $n = 1$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Vidíme tedy, že tento polynom je přesně rovnice tečny (viz Poznámka 5) nebo také vyjadřuje aproximaci funkce $f(x)$ pomocí diferenciálu (viz vzorec (35)).

□

Příklad 71. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \sin x}.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \sin x$ máme

$$\begin{aligned} &f'(x) = \cos x, && f''(x) = -\sin x, && f'''(x) = -\cos x,\\ &f^{(4)}(x) = \sin x = f(x), && f^{(5)}(x) = \cos x = f'(x), && f^{(6)}(x) = -\sin x = f''(x). \end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou

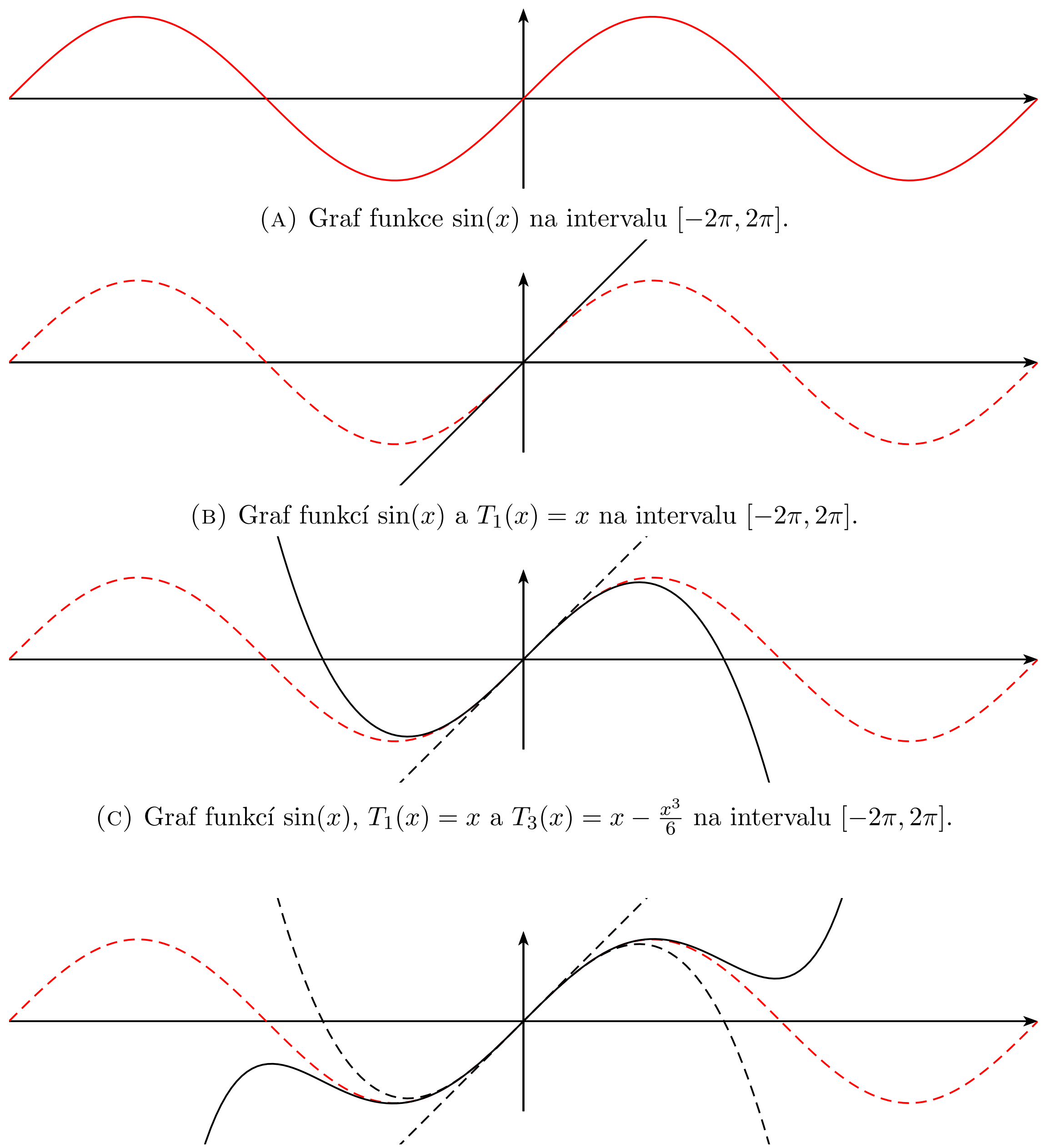
$$\begin{aligned} &f(0) = 0, && f'(0) = 1, && f''(0) = 0, && f'''(x) = -1,\\ &f^{(4)}(0) = 0 = f(0), && f^{(5)}(0) = 1 = f'(0), && f^{(6)}(0) = 0 = f''(0). \end{aligned}$$

Všimněte si, že všechny derivace sudého řádu jsou v bodě $x_0 = 0$ rovny 0, a tedy sudé mocniny x se ve výsledných polynomech nebudou vyskytovat.

Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jsou tedy

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(0) = 0,\\ T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\,x = x,\\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x,\\ T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = x - \frac{1}{6}\,x^3,\\ T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = x - \frac{1}{6}\,x^3,\\ T_5(x) &= T_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5 = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5,\\ T_6(x) &= T_5(x) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}\,x^6 = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5. \end{aligned}$$

Aproximace funkce $\sin x$ pomocí těchto polynomů:



(A) Graf funkce $\sin(x)$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

(B) Graf funkcí $\sin(x)$ a $T_1(x) = x$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

(C) Graf funkcí $\sin(x)$, $T_1(x) = x$ a $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

(D) Graf funkcí $\sin(x)$, $T_1(x) = x$, $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ a $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

OBRÁZEK 3. Ilustrace aproximace funkce $\sin x$ pomocí Taylorových polynomů.

□

Příklad 72. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \cos x}.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \cos x$ máme

$$\begin{aligned}
&f'(x) = -\sin x, && f''(x) = -\cos x, && f'''(x) = \sin x,\\
&f^{(4)}(x) = \cos x = f(x), && f^{(5)}(x) = -\sin x = f'(x), && f^{(6)}(x) = -\cos x = f''(x).
\end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou

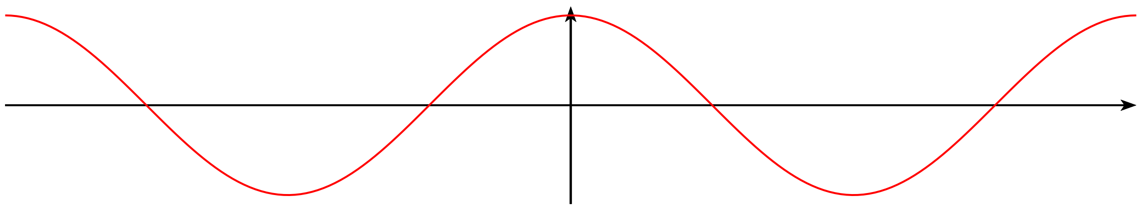
$$\begin{array}{llll} f(0) = 1, & f'(0) = 0, & f''(0) = -1, & f'''(x) = 0, \\ f^{(4)}(0) = 1 = f(0), & f^{(5)}(0) = 0 = f'(0), & f^{(6)}(0) = -1 = f''(0). & \end{array}$$

Všimněte si, že všechny derivace lichého řádu jsou v bodě $x_0 = 0$ rovny 0, a tedy liché mocniny x se ve výsledných polynomech nebudou vyskytovat.

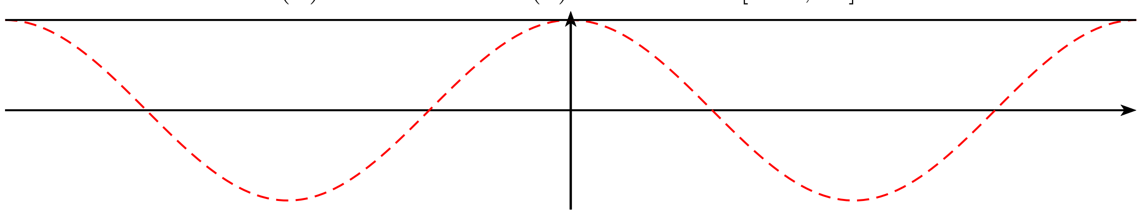
Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jsou tedy

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(0) = 1, \\ T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\,x = 1, \\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2, \\ T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2, \\ T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4, \\ T_5(x) &= T_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4, \\ T_6(x) &= T_5(x) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}\,x^6 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 - \frac{1}{720}\,x^6. \end{aligned}$$

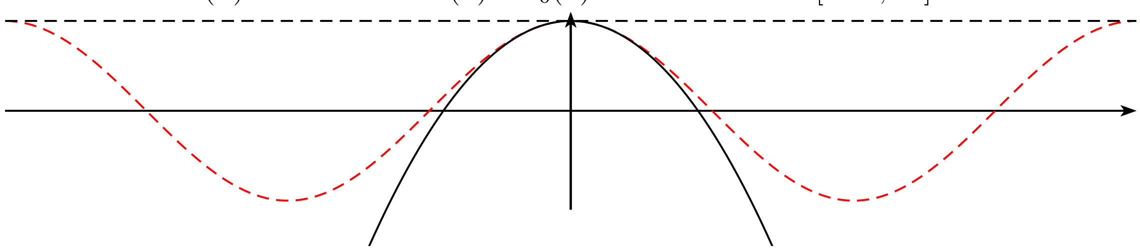
Aproximace funkce $\cos x$ pomocí těchto polynomů:



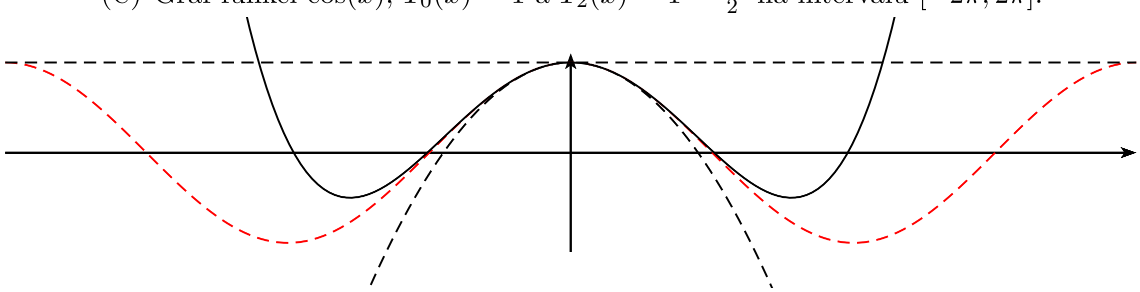
(A) Graf funkce $\cos(x)$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.



(B) Graf funkcí $\cos(x)$ a $T_0(x) = 1$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.



(C) Graf funkcí $\cos(x)$, $T_0(x) = 1$ a $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.



(D) Graf funkcí $\cos(x)$, $T_0(x) = 1$ a $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ a $T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

OBRÁZEK 4. Ilustrace aproximace funkce $\cos x$ pomocí Taylorových polynomů.

$\square$

Příklad 73. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^x}.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ máme

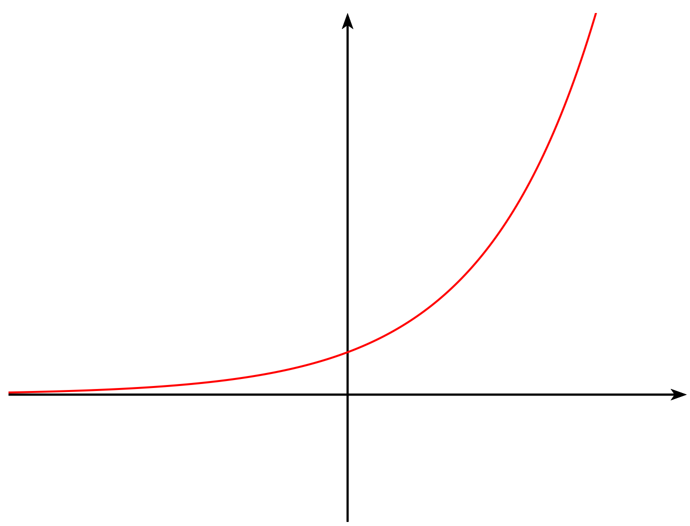
$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^x.$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou všechny rovny $\mathrm{e}^0 = 1$.

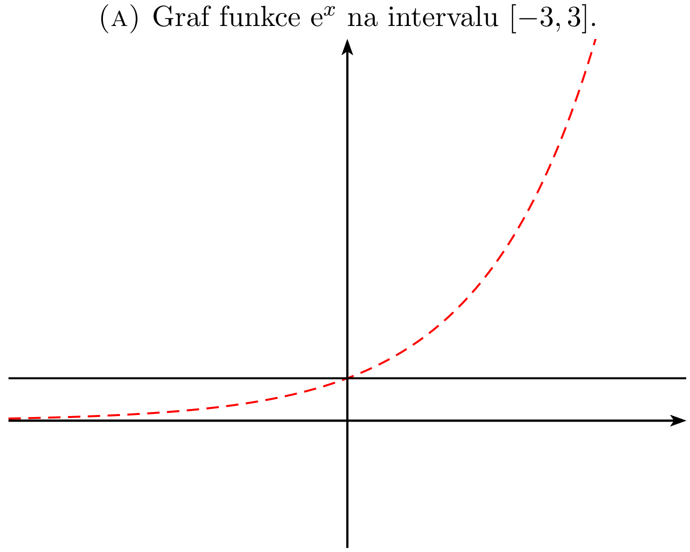
Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou tedy

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= f(0) = 1,\\
T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\,x = 1 + x,\\
T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2,\\
T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3,\\
T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4.
\end{aligned}$$

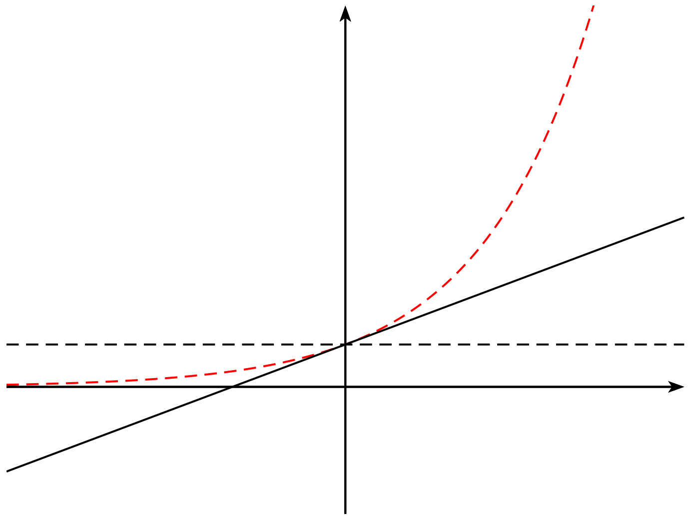
Aproximace funkce e^x pomocí těchto polynomů:



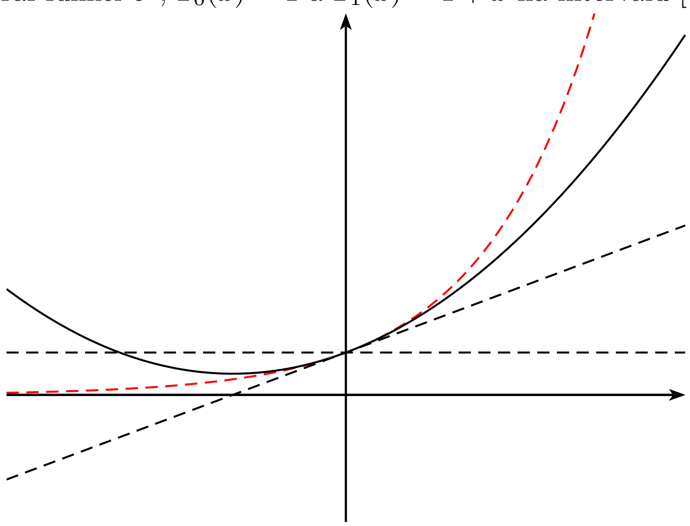
(A) Graf funkce e^x na intervalu $[-3, 3]$.



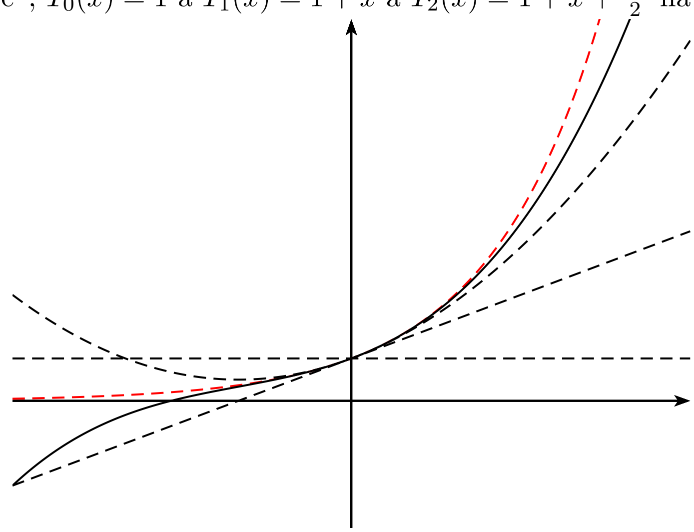
(B) Graf funkcí e^x a $T_0(x) = 1$ na intervalu $[-3, 3]$.



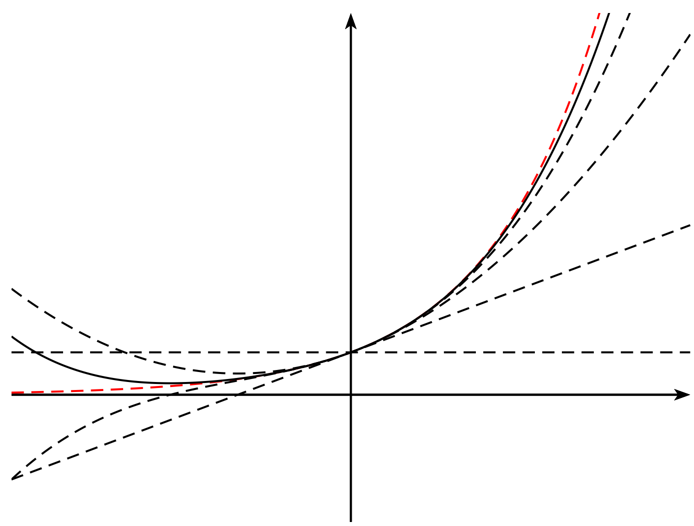
(c) Graf funkcí e^x, $T_0(x) = 1$ a $T_1(x) = 1 + x$ na intervalu $[-3, 3]$.



(d) Graf funkcí e^x, $T_0(x) = 1$ a $T_1(x) = 1 + x$ a $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ na intervalu $[-3, 3]$.



(e) Graf funkcí e^x, $T_0(x) = 1$ a $T_1(x) = 1 + x$, $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ a $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ na intervalu $[-3, 3]$.



(F) Graf funkcí e^x, $T_0(x) = 1$ a $T_1(x) = 1 + x$, $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ a $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ na intervalu $[-3, 3]$.

Obrázek 5. Ilustrace aproximace funkce e^x pomocí Taylorových polynomů.

□

Příklad 74. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \ln(1 + x)}.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ máme

$$f'(x) = (1 + x)^{-1} = \frac{1}{1 + x}, \qquad f''(x) = (-1)\,(1 + x)^{-2} = \frac{-1}{(1 + x)^2},$$
$$f'''(x) = (-1)\,(-2)\,(1 + x)^{-3} = \frac{2}{(1 + x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = 2\,(-3)\,(1 + x)^{-4} = \frac{-6}{(1 + x)^4}.$$

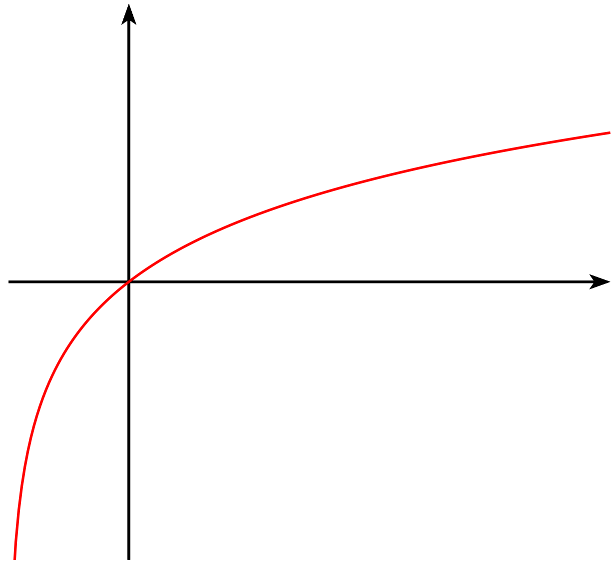
Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

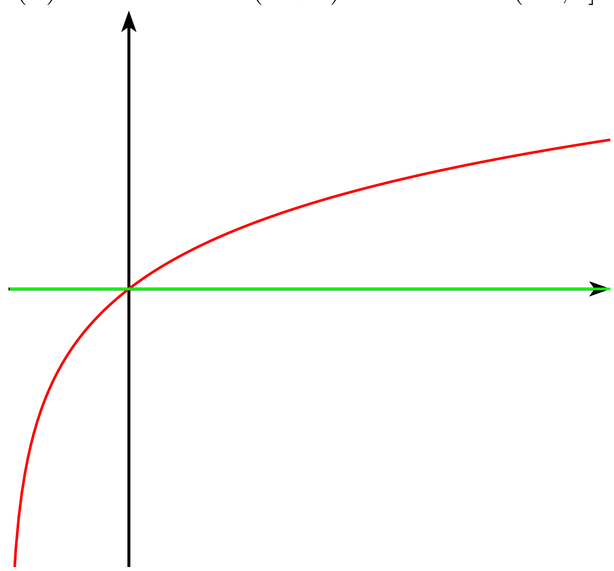
Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou tedy

$$T_0(x) = f(0) = 0,$$
$$T_1(x) = T_0(x) + f'(0)\,x = x,$$
$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x - \frac{1}{2}\,x^2,$$
$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3,$$
$$T_4(x) = T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4.$$

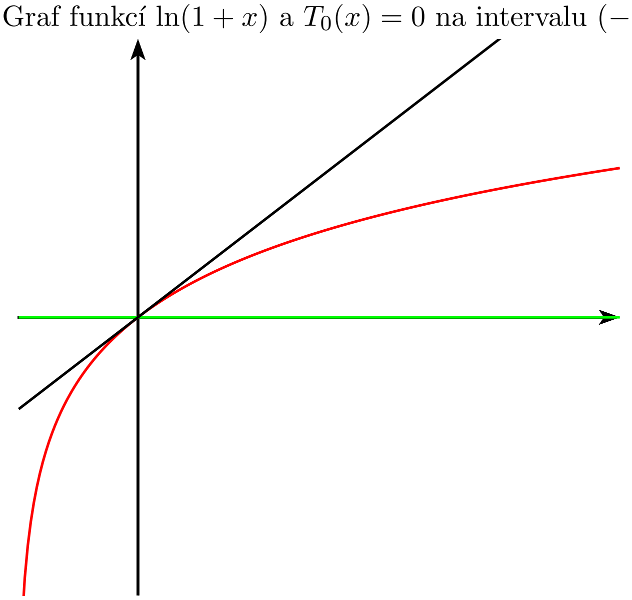
Aproximace funkce $\ln(1 + x)$ pomocí těchto polynomů:



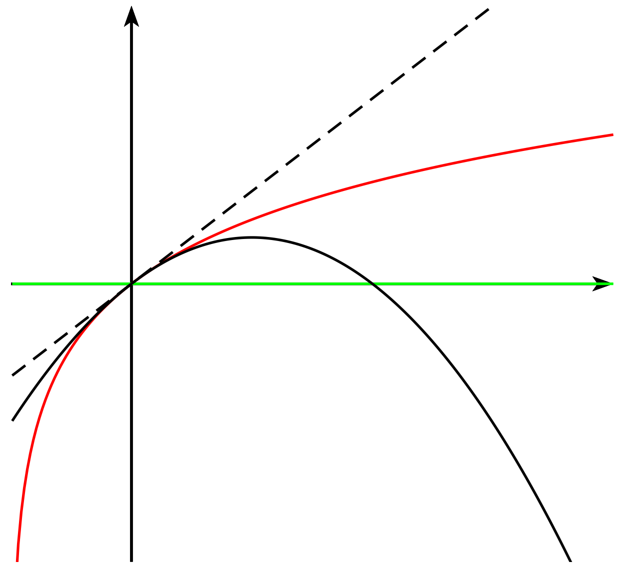
(A) Graf funkce $\ln(x+1)$ na intervalu $(-1, 4]$.



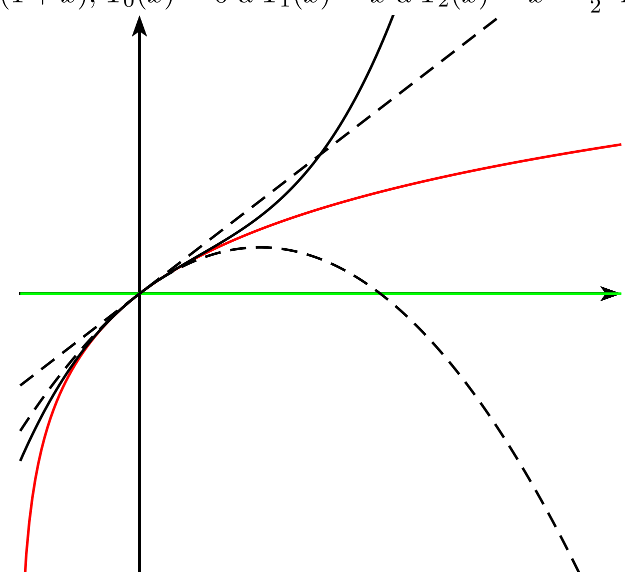
(B) Graf funkcí $\ln(1+x)$ a $T_0(x) = 0$ na intervalu $(-1, 4]$.



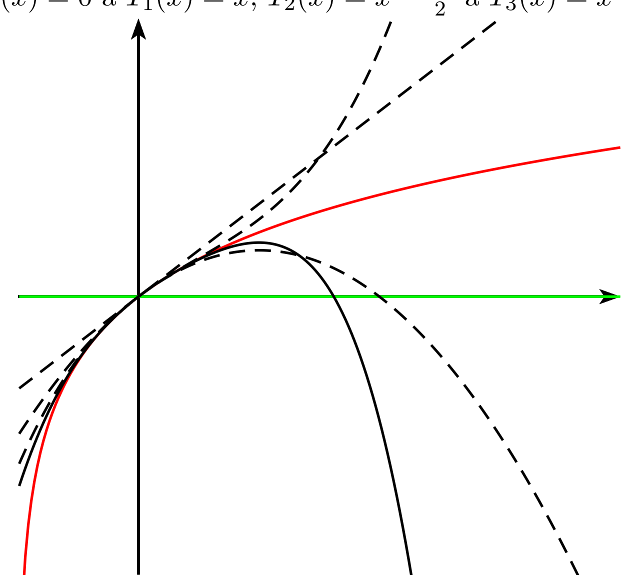
(C) Graf funkcí $\ln(1+x)$, $T_0(x) = 0$ a $T_1(x) = x$ na intervalu $(-1, 4]$.



(D) Graf funkcí $\ln(1+x)$, $T_0(x) = 0$ a $T_1(x) = x$ a $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ na intervalu $(-1, 4]$.



(E) Graf funkcí $\ln(1+x)$, $T_0(x) = 0$ a $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ a $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ na intervalu $(-1, 4]$.



(F) Graf funkcí $\ln(1+x)$, $T_0(x) = 0$ a $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ a $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ na intervalu $(-1, 4]$.

□

Vidíme tedy, že funkce $f(x)$ je aproximována Taylorovým polynomem. Můžeme se ovšem ptát, jak vypadá přesné vyjádření funkce $f(x)$ pomocí Taylorova polynomu. Potom nutně musíme zahrnout do výpočtu výraz pro chybu aproximace – a dostaneme tzv. Taylorův rozvoj se zbytkem.

Věta 22 (**Taylorův rozvoj se zbytkem**). *Nechť $f(x)$ má spojité derivace $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť existuje vlastní derivace $f^{(n+1)}(x)$ na otevřeném intervalu (a,b). Potom pro každý bod $x \in (a,b)$ existuje bod $c \in (a,x)$ tak, že platí rovnost*

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)}, \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}, \tag{36}$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

Důkaz. Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě (Věta 12). Podrobnosti jsou ve skriptech [8, str. 330-331]. □

Výraz $R_n(x)$ ve vzorci (36) se nazývá Taylorův zbytek (se středem v bodě x_0) a vyjadřuje chybu aproximace Taylorovým polynomem $T_n(x)$. O odhadu velikosti $R_n(x)$ (a tudíž velikosti chyby aproximace Taylorovým polynomem) je celá matematická teorie.

Příklad 75. Pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ a Taylorův polynom $T_n(x)$ se středem v bodě 0 (viz Příklad 73) je zřejmě pro libovolné $x \in \mathbb{R}$

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \qquad \text{kde } c \text{ leží mezi } 0 \text{ a } x.$$

Všimněte si, že pro $x > 0$ je vždy $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ (neboť $c \in (0,x)$ a exponenciální funkce je rostoucí), a tedy platí odhad

$$R_n(x) \le \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \qquad x > 0,$$

zatímco pro $x < 0$ je vždy $\mathrm{e}^c < 1$ (neboť v tomto případě je $c \in (x,0)$), a tedy platí odhad

$$R_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}, \qquad x < 0.$$

V obou dvou případech (jak pro $x > 0$ tak pro $x < 0$) ale vidíme, že pro pevně zvolené x se bude s rostoucím n výraz $R_n(x)$ blížit k nule, protože lze ukázat, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

□

Poznámka 18. S rostoucím n se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro $n \to \infty$ dostáváme v polynomu $T_n(x)$ k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. nekonečné řadě. Více o tomto tématu probereme v Odstavci 7.5. □

Příklad 76. Odhadněte chybu v bodě $x = \frac{\pi}{4}$ Taylorova polynomu stupně $n = 6$ funkce $f(x) = \cos x$ se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Z Příkladu 72 víme, že příslušný Taylorův polynom je

$$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 - \frac{1}{720}\,x^6,$$

přičemž $f^{(6)}(x) = -\cos x$.

Pro zbytek $R_6(x)$ pak podle vzorce (36) platí, že

$$R_6(x) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}\,x^7 = \frac{\sin c}{7!}\,x^7,$$

kde číslo c leží mezi 0 a x. A protože pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí $|\sin c| \leq 1$, potom pro $x = \frac{\pi}{4}$ máme

$$\left| R_6\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \approx 0.0000366.$$

□

2. Integrální počet

Integrální počet se zabývá studiem funkcí a jejich aplikací, pokud známe hodnotu derivace.

2.1. **Primitivní funkce.**

Základní otázkou tohoto odstavce je následující: Známe-li funkci $f(x)$, jak lze najít (pokud vůbec existuje) funkci $F(x)$ tak, že $F'(x) = f(x)$?

Příklad 77. Pro jakou funkci $F(x)$ platí, že $\boxed{F'(x) = f(x)}$, kde

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^2, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \cos x.$$

Řešení.

(a)

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \frac{x^3}{3} + 1, \quad \frac{x^3}{3} - \pi, \qquad \text{neboť} \quad F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x),$$

či nejobecněji

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

(b)

$$F(x) = \sin x, \quad \sin x + 1, \quad \sin x - \pi, \qquad \text{neboť} \quad F'(x) = \cos x + 0 = \cos x = f(x),$$

či nejobecněji

$$F(x) = \sin x + C, \quad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

□

Definice 15 (Primitivní funkce). Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I. \tag{37}$$

□

Příklad 78. Z pravidel pro derivování elementárních funkcí (viz Odstavec 1.9) snadno dostáváme následující „tvrzení“.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$ pro $n \neq -1$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$. Funkce $\ln(-x)$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$. Dohromady zapsáno: Funkce $\ln |x|$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

(e) Funkce C (konstantní funkce) je primitivní k funkci 0 na $\mathbb{R}$.

□

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

Věta 23 (O existenci primitivní funkce). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

Důkaz. Uvedeme později, viz Poznámka 28(ii) v Odstavci 2.5. $\square$

Poznámka 19.

(i) Věta 23 udává postačující podmínku pro existenci primitivní funkce. Spojitost není nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce. Např. funkce

$$f(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x = 0$, protože

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \Big(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}} \Big) \qquad \text{neexistuje.}$$

Na druhé straně, funkce

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \tag{38}$$

je primitivní k $f(x)$ na celém $\mathbb{R}$, neboť pro $x \neq 0$ je

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x),$$

a pro $x = 0$ je

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

(ii) Je-li $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, potom je $F(x) + C$ také primitivní k $f(x)$ na intervalu I pro libovolnou konstantu $C \in \mathbb{R}$.

(iii) Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na I, potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + C$ pro všechna $x \in I$ (tedy funkce $F(x)$ a $G(x)$ se liší o konstantu na celém intervalu I).

(iv) Důsledkem částí (ii) a (iii) je, že je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, potom

$$\{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech primitivních funkcí k $f(x)$ na intervalu I. Tuto množinu budeme nazývat neurčitý integrál.

$\square$

Příklad 79. Protože mají funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$ stejnou derivaci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (viz Tvrzení 4), musí se tyto funkce lišit o konstantu, tj.

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Konstantu C můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě $x = 0$,

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \qquad \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\pi}{2},$$

neboli platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Definice 16 (**Neurčitý integrál**)**.** Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I se nazývá neurčitý integrál z funkce $f(x)$ na intervalu I. Tuto množinu budeme značit (zkráceně) jako

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \big\{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\big\} = F(x) + C,$$

tedy symbol množiny { } budeme (kvůli stručnosti) vynechávat. □

Příklad 80. Z pravidel pro derivování elementárních funkcí (Odstavec 1.9, viz také Příklad 78) snadno dostáváme následující.

$$\begin{aligned}
\int x^n\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\\
\int \sin x\,\mathrm{d}x &= -\cos x + C,\\
\int \cos x\,\mathrm{d}x &= \sin x + C,\\
\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x + C,\\
\int a^x\,\mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln a} + C,\\
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln|x| + C, \qquad (39)\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{arctg} x + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \arcsin x + C,\\
\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \ln\big|f(x)\big| + C.
\end{aligned}$$

Ve vzorci (39) si všimněte, že na pravé straně je v logaritmu absolutní hodnota, neboť pro $x > 0$ je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ a pro $x < 0$ je $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. □

2.2. **Základní integrační metody.**

Věta 24 (Pravidla pro neurčitý integrál).

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$, potom je $c \cdot F(x)$ primitivní k $c \cdot f(x)$.

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\int \big[f(x) \pm g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ a je-li $G(x)$ primitivní k $g(x)$, potom je $F(x) \pm G(x)$ primitivní k $f(x) \pm g(x)$.

Důkaz. Obě pravidla jsou jednoduchým důsledkem příslušného pravidla pro derivace (viz Věta 9):

$$[c \cdot F(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$$
$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

□

Příklad 81. Platí

(a)
$$\int (x^3 - 3x^2 + 5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C,$$

(b)
$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^6\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + 2x^6\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 2\,\frac{x^7}{7} + C,$$

(c)
$$\int \left(2^x - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} - 2\,\ln|x| + C,$$

(d)
$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\,\arcsin x + 5\,\operatorname{arctg} x + C,$$
$$= -2\,\arccos x - 5\,\operatorname{arccotg} x + C.$$

□

Další integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z „jednoduššího“ součinu (viz příklady dále).

Věta 25 (Metoda per partes pro neurčitý integrál). *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I. Potom platí*

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu (viz Věta 9(iii)) a pravidla pro integrál součtu (viz Věta 24(ii)):

$$[u\,v]' = u'\,v + u\,v', \quad \Rightarrow \quad \int [u\,v]' = \int (u'\,v + u\,v') \quad \Rightarrow \quad u\,v + C = \int u'\,v + \int u\,v'.$$

□

Příslušné výpočty pro metodu per partes budeme stejně jako u typu limity psát ve výpočtu mezi dvě svislé čáry, viz následující příklad.

Příklad 82. Platí

(a)

$$\int x\,\cos x\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x\,\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\,\sin x - (-\cos x) + C = \boxed{x\,\sin x + \cos x + C}.$$

(b)

$$\int x\,\ln x\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + C}.$$

(c)

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right|$$

$$= x\,\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\,\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = \boxed{x\,\ln x - x + C}.$$

(d)

$$\underbrace{\int \mathrm{e}^x\,\sin x\,\mathrm{d}x}_{\text{označme jako } I} \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x & u = \mathrm{e}^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right|$$

$$= \mathrm{e}^x\,\sin x - \int \mathrm{e}^x\,\cos x\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x & u = \mathrm{e}^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right|$$

$$= \mathrm{e}^x\,\sin x - \left\{ \mathrm{e}^x\,\cos x - \int \mathrm{e}^x\,(-\sin x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

$$= \mathrm{e}^x\,\sin x - \mathrm{e}^x\,\cos x - \underbrace{\int \mathrm{e}^x\,\sin x\,\mathrm{d}x}_{=I}$$

Tedy pro neznámý integrál I dostáváme rovnici

$$I = \mathrm{e}^x\,(\sin x - \cos x) - I \quad \Rightarrow \quad 2I = \mathrm{e}^x\,(\sin x - \cos x) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\,(\sin x - \cos x),$$

a proto je

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2} \mathrm{e}^x (\sin x - \cos x) + C}.$$

Ve všech příkladech ověřte, že zpětným derivováním výsledku dostanete příslušnou funkci v integrálu. □

Poznámka 20.

(i) Metoda per partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x, \quad \int x^n \cos(ax) \, \mathrm{d}x, \quad \int x^n \sin(ax) \, \mathrm{d}x,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax) \, \mathrm{d}x, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax) \, \mathrm{d}x, \quad \int x^a \ln^n x \, \mathrm{d}x.$$

(ii) Metoda per partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál (viz Příklad 82(d)), např.

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx) \, \mathrm{d}x.$$

(iii) Metoda per partes vede někdy na rekurentní formuli pro neznámý integrál (viz následující Příklad 83).

□

Příklad 83. Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Zřejmě je

$$K_0(x) = \int 1 \, \mathrm{d}x = \boxed{x + C},$$

$$K_1(x) = \int \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \boxed{\operatorname{arctg} x + C}.$$

Neznámý integrál K_n (pro $n \geq 2$) vypočítáme metodou per partes:

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \int 1 \cdot (x^2+1)^{-n} \, \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = (x^2+1)^{-n} & v' = -n(x^2+1)^{-n-1} \cdot 2x \end{array} \right| \\
&= x\,(x^2+1)^{-n} - \int x \cdot (-n)\,(x^2+1)^{-n-1} \cdot 2x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \left[K_n(x) - K_{n+1}(x) \right] = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\, K_n(x) - 2n\, K_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Tedy platí vztah

$$2n\,K_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)\,K_n(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot K_n(x)}.$$

Např. volbou $n=1$ vypočítáme integrál $K_2(x)$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = K_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot K_1(x) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C}.$$

□

Další dvě integrační metody (Věta 26 a Věta 27) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce (Věta 10).

Věta 26 (**Substituce pro neurčitý integrál**). *Nechť je funkce $f(t)$ definovaná na intervalu I a nechť $\varphi(x)$ je definovaná na intervalu J a $\varphi(J) \subseteq I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $f(t)$ na intervalu I, potom je funkce $(F\circ\varphi)(x)$ primitivní k funkci $[(f\circ\varphi)(x)]\cdot\varphi'(x)$ na intervalu J, tj.*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t \quad \Big[= F(t) = F\big(\varphi(x)\big)\Big].$$

Neboli v daném integrálu volíme <u>*substituci*</u> $\boxed{t=\varphi(x)}$.

Důkaz. Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci složené funkce (viz Věta 10):

$$[F\big(\varphi(x)\big)]' = F'\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int [F\big(\varphi(x)\big)]'\,\mathrm{d}x}_{=F\left(\varphi(x)\right)} = \int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

Příklad 84. Platí

(a)

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \int t^{-2}\ \mathrm{d}t = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C = \boxed{-\frac{1}{x^2+1} + C}$$

(b)

$$\int x^2\cos x^3\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \cos t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sin t + C = \boxed{\frac{1}{3}\sin x^3 + C}.$$

□

Poznámka 21.

(i) Ve výpočtu pomocí substituční metody se používá vzoreček pro <u>diferenciál</u> (viz Definice 13), neboli

$$t = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dt = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x}.$$

(ii) Substituce uvedená ve Větě 26 je tedy tvaru

„nová proměnná“ t = funkce „staré proměnné“ x.

Integrál po substituci již <u>nesmí</u> obsahovat „starou proměnnou“ x a musí již být zapsán pouze pomocí „nové proměnné“ t.

(iii) Pokud bychom jako „novou proměnnou“ zvolili jiné písmenko, např. $s = \varphi(x)$, potom je samozřejmě $ds = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ a nový integrál bude v proměnné s.

□

Druhá substituční metoda je opět důsledkem pravidla o derivaci složené funkce.

Věta 27 (Substituce pro neurčitý integrál). *Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu I a nechť $\psi(t)$ má <u>nenulovou</u> derivaci na intervalu J a $\psi(J) = I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $[(f \circ \psi)(t)] \cdot \psi'(t)$ na intervalu J, potom je funkce $(F \circ \psi^{-1})(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, tj.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\psi(t)\big) \cdot \psi'(t)\ \mathrm{d}t = \quad \Big[= F(t) = F\big(\psi^{-1}(x)\big)\Big].$$

Neboli v daném integrálu volíme <u>substituci</u> $\boxed{x = \psi(t)}$, tj. $t = \psi^{-1}(x)$ (inverzní funkce).

Poznámka 22.

(i) Taktéž ve výpočtu pomocí druhé substituční metody se používá vzoreček pro <u>diferenciál</u> (viz Definice 13), neboli

$$x = \psi(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}x = \psi'(t)\ \mathrm{d}t}.$$

(ii) Substituce uvedená ve Větě 27 je tedy tvaru

„stará proměnná“ x = funkce „nové proměnné“ t.

Integrál po substituci již <u>nesmí</u> obsahovat „starou proměnnou“ x a musí již být zapsán pouze pomocí „nové proměnné“ t.

(iii) Pokud bychom jako „novou proměnnou“ zvolili jiné písmenko, např. $x = \psi(u)$, potom je samozřejmě $\mathrm{d}x = \psi'(u)\,du$ a nový integrál bude v proměnné u.

(iv) U druhé substituční metody (tj. ve Větě 27) je nutné dávat pozor na interval, kde $\psi'(t) \neq 0$. Tato podmínka zaručuje monotonii funkce $\psi(t)$ a tedy existenci inverzní funkce $\psi^{-1}(x)$.

□

Příklad 85.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = (\cos t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$$

$$= \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t)(\cos t) + C$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t} + C \quad \left|\ t = \arcsin x\ \right|$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}.$$

Ověřte si derivováním výsledku, že je tento výpočet skutečně správně. □

2.3. **Rozklad na parciální zlomky.** Jsou-li $P(x)$ a $Q(x)$ polynomy, $Q(x) \not\equiv 0$ (tj. polynom Q není identicky roven nulovému polynomu), potom se výraz

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{nazývá } \underline{\text{racionální lomenou funkcí}}.$$

Je-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, pak $R(x)$ nazýváme ryze lomenou.

Pokud nemají polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ společný kořen (tj. ve funkci $R(x)$ již nejde žádný výraz s proměnnou x pokrátit), potom každou takovou ryze racionální lomenou funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Tento součet je až na pořadí jednotlivých zlomků určen jednoznačně.

Tvar jednotlivých parciálních zlomků najdeme podle kořenů a násobností jmenovatele, tj. podle funkce $Q(x)$. Elementární kořenové činitele polynomu $Q(x)$ lze nad $\mathbb{R}$ uvažovat buď lineární (odpovídající reálným kořenům) nebo kvadratické (odpovídající dvojicím komplexně sdružených komplexních kořenů).

- Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ reálný kořen násobnosti k, potom polynom $Q(x)$ obsahuje činitel $(x-\alpha)^k$, a příslušné parciální zlomky jsou tvaru
$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^{k-2}} + \cdots + \frac{A_k}{x-\alpha}.$$

- Je-li $\beta \pm \gamma i \in \mathbb{C}$ dvojice komplexně sdružených komplexních kořenů násobnosti k (každý z nich), potom polynom $Q(x)$ obsahuje činitel $(x^2+px+q)^k$, jehož diskriminant je záporný, a příslušné parciální zlomky jsou tvaru
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+px+q)^{k-2}} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{x^2+px+q}.$$

Je nutné vždy zahrnout všechny parciální zlomky (až do stupně k)!

Příklad 86.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^2+7x+1}{x\,(x-1)^3\,(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

□

Neznáme koeficienty u parciálních zlomků hledáme buď převodem nazpět na společného jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin (což vede na systém lineárních rovnic), nebo jednodušeji dosadíme za proměnnou x hodnoty kořenů polynomu $Q(x)$.

Příklad 87.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x+1}{(x-1)\,(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A\,(x-2)^2 + B\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x-2)^2} \end{aligned}$$

Porovnáváme polynomy v čitateli:

$$x+1 = A\,(x-2)^2 + B\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x-2).$$

Volbou $x=1$ dostaneme $A=2$, volbou $x=2$ dostaneme $B=3$. Další kořeny již jmenovatel nemá, zvolíme proto libovolnou jinou „jednoduchou“ hodnotu, např. $x=0$ a dostaneme $4A-B+2C=1$, tj. $C=-2$. Je tedy

$$R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2}.$$

□

2.4. **Integrování racionálních lomených funkcí.** Je-li $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ racionální lomená funkce (viz Odstavec 2.3), provedeme nejprve dělení, abychom dostali ryze racionální lomenou funkci.

Příklad 88.

$$\frac{x^3+x^2}{x^2+1} = \underbrace{x+1}_{\substack{\text{umíme}\\ \text{integrovat}}} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

□

Dále ryze racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky, přičemž v Odstavci 2.3 jsme viděli, že tyto parciální zlomky mají jeden z následujících tvarů.

- Pro reálný jednoduchý kořen x_0:

$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{A}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \boxed{A\,\ln|x-x_0|}.$$

- Pro <u>reálný vícenásobný kořen</u> x_0 $(n \geq 2)$:

$$\frac{A}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{B}{(x-x_0)^{n-1}}, \quad \dots, \frac{C}{x-x_0} \qquad \Rightarrow \qquad \text{pro } k=2,\dots,n:$$

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = A\int (x-x_0)^{-k}\,\mathrm{d}x = A\,\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} = \boxed{\frac{A}{(1-k)\,(x-x_0)^{k-1}}}.$$

- Pro dvojici <u>jednoduchých komplexně sdružených kořenů</u> $\alpha \pm \beta i$:

$$\frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x$$

  Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar t^2+1, kde $t=\frac{x-\alpha}{\beta}$. Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Dt+E}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = D\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + E\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{D}{2}\,\ln(t^2+1)} + \boxed{E\,\operatorname{arctg} t}.$$

- Pro dvojici <u>vícenásobných komplexně sdružených kořenů</u> $\alpha \pm \beta i$ $(n \geq 2)$:

$$\frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}, \quad \frac{Dx+E}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{Fx+G}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{pro } k=2,\dots,n:$$

$$\int \frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\,\mathrm{d}x$$

  Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar $(t^2+1)^k$, kde $t=\frac{x-\alpha}{\beta}$. Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Ht+J}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t = H\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t + J\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t,$$

  přičemž první z uvedených integrálů vypočteme substitucí $s=t^2+1$ (potom $ds = 2t\ \mathrm{d}t$) a druhý z uvedených integrálů je integrál $K_n(x)$ z Příkladu 83 (přesněji v tomto případě $K_k(t)$), který vede na rekurentní formuli.

Příklad 89. Vypočtěte

$$\int \frac{x^3+6x^2+5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{x^3+6x^2+5}{(x+1)^2\,(x^2+4)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Odsud plyne, že $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 1$ a tedy je

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+4} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \boxed{\frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C},$$

přičemž předposlední integrál jsme spočítali pomocí substituce $t = x^2 + 4$ (tj. $dt = 2x\,\mathrm{d}x$) a poslední integrál pomocí substituce $t = \frac{x}{2}$ (tj. $dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$). □

Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech [8, Odstavec 6.2].

Poznámka 23. Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{x}{\ln x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Z věty o existenci primitivní funkce (Věta 23) ale víme, že k uvedeným funkcím existuje primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají vyšší funkce (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).

Pozn.: Pozor ale na

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\ln^2 x + C, \qquad \text{(není to vyšší funkce)!}$$

□

2.5. **Riemannův integrál.** V tomto odstavci budou uvažované funkce vždy ohraničené.

Základní otázka tohoto odstavce zní: Jaká je plocha mezi $f(x)$ a osou x (na intervalu $[a, b]$)?

Příklad 90.

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $\boxed{P = 4}$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $\boxed{P = k\,(b-a)}$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = \boxed{8}$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = \boxed{6}$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $0 \le a \le b$, $\boxed{P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2}$.

(f) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pro $x \in [-1,1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

(g) $f(x) = -2x+1$ pro $x \in [1,2]$, $P = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 2$. Ale protože je plocha pod osou x, klademe $\boxed{P = -2}$.

(h) $f(x) = x^3$ pro $x \in [-1,1]$, plocha je stejná nad i pod osou x, a proto klademe $\boxed{P = 0}$.

□

Tato „orientovaná plocha" se nazývá určitý integrál (též Riemannův integrál) z funkce $f(x)$ přes interval $[a,b]$ a značíme ji

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{array}{l}\text{orientovaná plocha mezi grafem}\\ \text{funkce } f(x) \text{ a osou } x\end{array}.$$

Příklad 91. Tedy výpočty uvedené v Příkladu 90 můžeme alternativně zapsat následovně:

(a) $\boxed{\int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}x = 4}$,

(b) $\boxed{\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k\,(b-a)}$,

(c) $\boxed{\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = 8}$,

(d) $\boxed{\int_2^4 x\,\mathrm{d}x = 6}$,

(e) $\boxed{\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2}$,

(f) $\boxed{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$,

(g) $\boxed{\int_{-1}^{1} (-2x+1)\,\mathrm{d}x = -2}$,

(h) $\boxed{\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0}$.

□

Skutečnou plochu mezi $f(x)$ a osou x odhadneme pomocí „vepsaných" a „opsaných" obdélníků, čímž dostaneme dolní odhad $s(D,f)$ pro skutečnou plochu a horní odhad $S(D,f)$ pro skutečnou plochu.

Definice 17 (Dělení intervalu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dělením intervalu $[a, b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a, b]$ s vlastností $a, b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad \text{kde} \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se nazývají dělící body a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá dělící (pod)interval.

Délka největšího dělícího podintervalu je pak norma dělení D, tj. je to číslo

$$n(D) := \max_{k=1,\ldots,n} \{x_k - x_{k-1}\}. \tag{40}$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ označujeme jako $\mathbb{D}[a, b]$ či jenom jako $\mathbb{D}$. □

Pro ohraničenou funkci $f(x)$ na $[a, b]$ a dělení D intervalu $[a, b]$ zaveďme označení

$$\begin{aligned}
m_k &:= \inf\big\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\big\}, \\
M_k &:= \sup\big\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\big\}, \\
s(D, f) &:= \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}), && \text{dolní součet funkce } f(x) \text{ při dělení } D, \\
S(D, f) &:= \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}), && \text{horní součet funkce } f(x) \text{ při dělení } D.
\end{aligned}$$

Tvrzení 5. *Nechť $c \le f(x) \le d$ pro každé $x \in [a, b]$. Potom pro každá dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathbb{D}[a, b]$ platí*

$$c\,(b - a) \le s(D_1, f) \le S(D_2, f) \le d\,(b - a),$$

tj. dolní součet libovolného dělení je nejvýše roven hornímu součtu libovolného dělení, přičemž všechny dolní součty jsou zdola ohraničeny číslem $c\,(b-a)$ a všechny horní součty jsou shora ohraničeny číslem $d\,(b - a)$.

Při vzrůstajícím počtu dělících bodů x_k v dělení D_1, D_2 se bude dolní součet $s(D_1, f)$ zvětšovat a zároveň horní součet $S(D_2, f)$ zmenšovat.

Definice 18 (Dolní a horní integrál). Číslo

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\big\{s(D, f),\ D \in \mathbb{D}\big\}$$

nazýváme dolním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Číslo

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\big\{S(D, f),\ D \in \mathbb{D}\big\}$$

nazýváme horním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. □

Současně víme, že vždy je

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f.$$

Navíc, pokud je $c \le f(x) \le d$ na intervalu $[a,b]$, potom podle Tvrzení 5 je

$$c\,(b-a) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le d\,(b-a). \tag{41}$$

Definice 19 **(Určitý (Riemannův) integrál).** Je-li

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná (v Riemannově smyslu) na $[a,b]$ a toto společné číslo značíme

$$\boxed{\int_a^b f} := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Množinu všech (riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a,b]$.

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ není integrovatelná na $[a,b]$. □

Riemannův integrál přes interval $[a,b]$ je tedy číslo. Zápis pro Riemannův integrál budeme používat také ve tvaru s integrační proměnnou, např.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b f(t)\;\mathrm{d}t, \qquad \text{a podobně.}$$

Příklad 92.

(a) Pro konstantní funkci $f(x) = c$ máme $m_k = M_k = c$ pro všechny k a tedy je

$$s(D,f) = c\,(b-a), \quad S(D,f) = c\,(b-a), \qquad \forall D \in \mathbb{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{c\,(b-a)\} = c\,(b-a), \qquad \overline{\int_a^b} f = \inf\{c\,(b-a)\} = c\,(b-a) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{c \in \mathcal{R}[a,b]} \quad \text{a platí} \quad \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \boxed{c\,(b-a)}.$$

Viz Příklad 91(b).

(b) Dirichletova funkce χ [chí]

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{I} \cap [a,b], \end{cases}$$

Potom $m_k = 0$ a $M_k = 1$ pro všechna k a tedy je

$$s(D,\chi) = 0, \quad S(D,\chi) = b-a, \qquad \forall D \in \mathbb{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} \chi = \sup\{s(D,\chi)\} = \sup\{0\} = 0, \qquad \overline{\int_a^b} \chi = \inf\{S(D,\chi)\} = \inf\{b-a\} = b-a \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} \chi < \overline{\int_a^b} \chi \quad \text{a tedy} \quad \boxed{\chi \notin \mathcal{R}[a,b]} \quad (\chi \text{ není integrovatelná}).$$

□

Jak ale obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

Nulová posloupnost dělení $D_k \in \mathbb{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $\boxed{n(D_k) \to 0}$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení (viz vzorec (40)) jde k nule.

Věta 28. *Nechť je funkce $f(x)$ ohraničená na intervalu $[a,b]$. Potom pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $D_k \in \mathbb{D}$ platí, že*

$$s(D_k, f) \to \underline{\int_a^b} f, \qquad S(D_k, f) \to \overline{\int_a^b} f \qquad \text{pro } k \to \infty.$$

Je-li navíc $f(x)$ integrovatelná na $[a,b]$, potom dolní součty $s(D_k,f)$ i horní součty $S(D_k,f)$ konvergují (ve smyslu existence vlastní limity) k číslu $\int_a^b f$.

Z Věty 28 vyplývá, že pokud víme, že je $f(x)$ integrovatelná na $[a,b]$, potom lze $\int_a^b f$ určit limitním přechodem pomocí libovolné nulové posloupnosti dělení intervalu $[a,b]$.

Příklad 93. Víme-li, že je funkce $f(x) = x^2$ integrovatelná na intervalu $[0,1]$ (viz např. Věta 29 uvedená níže), potom určete $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Připomeňme si vzorec

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \tag{42}$$

Rozdělíme interval $[0,1]$ na n stejných dělících intervalů délky $\frac{1}{n}$. Potom jsou dělící body $x_k = \frac{k}{n}$ pro $k = 0,1,\ldots,n$ a norma takového dělení je právě číslo $\frac{1}{n}$. Tedy jedná se o nulovou posloupnost dělení.

Navíc, protože je funkce x^2 rostoucí, je její infimum na k–tém dělícím intervalu dosaženo v levém krajním bodě. Tedy platí, že pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n$ je $m_k = x_{k-1}^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}$, a proto

$$\begin{aligned} s(D_n, f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \overset{(42) \text{ s } n-1}{=} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A proto je

$$\boxed{\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}}.$$

□

Zásadní otázku, které funkce jsou vlastně (riemannovsky) integrovatelné, zodpovídá následující tvrzení.

Věta 29.

(i) *Každá spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná, neboli*

$$\boxed{C[a, b] \subseteq \mathcal{R}[a, b]}.$$

(ii) *Každá monotónní funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná.*

Poznámka 24. Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě nezmění, pokud je integrovatelná funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině „míry nula“). Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů (a, b), $(a, b]$ i $[a, b)$ je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu $\int_a^b f$, tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval $[a, b]$. □

Příklad 94. Pro nespojitou funkci $\operatorname{sgn} x$ (viz Příklad 7(a)) platí

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = 3 + (-2) = \boxed{1}.$$

Obdobně lze ukázat (rozvažte si to), že pro $a < 0 < b$ je

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = a + b.$$

□

2.6. **Vlastnosti Riemannova integrálu.** V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti Riemannova integrálu. Stále mějte na paměti, že se vlastně jedná o „orientovanou plochu“ mezi grafem funkce a osou x.

Věta 30. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná a ohraničená na intervalu $[a,b]$, tj. $c \le f(x) \le d$ pro všechna $x \in [a,b]$, potom*

$$c\,(b-a) \le \int_a^b f \le d\,(b-a).$$

Důkaz. Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem nerovnosti (41), neboť nyní předpokládáme, že je funkce $f(x)$ integrovatelná. □

Důsledek 7. *Je-li $f \in \mathcal{R}[a,b]$, potom platí*

$$f(x) \ge 0 \quad \text{na } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \ge 0,$$ *(tj. orientovaná plocha pod nezápornou funkcí je nezáporná),*

$$\big|f(x)\big| \le c \quad \text{na } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b f\right| \le c\,(b-a).$$

Věta 31 (Pravidla pro určitý integrál). *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ ($f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné) a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.*

(i) *Pravidlo konstantního násobku: $c \cdot f \in \mathcal{R}[a,b]$ a platí*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu: $f \pm g \in \mathcal{R}[a,b]$ a platí*

$$\int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) *Pravidlo monotonie: je-li $f(x) \le g(x)$ na $[a,b]$, potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iv) *Pravidlo absolutní hodnoty: $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(v) *Pravidlo součinu: $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(vi) *Pravidlo podílu: je-li $g(x) \ge c$ na intervalu $[a,b]$ pro nějaké $c > 0$, potom je $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(vii) *Pravidlo návaznosti: je-li $a < c < b$, potom je $f \in \mathcal{R}[a,c]$, $f \in \mathcal{R}[c,b]$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 25. Všimněte si, že pravidla (i) a (ii) vlastně říkají, že operace „určitý integrál“ je lineární. Tj. zobrazení

$$I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad I(f) := \int_a^b f$$

je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\mathcal{R}[a,b]$ a $\mathbb{R}$. □

Poznámka 26.

(i) V pravidle součinu (Věta 31(v)) pro určitý integrál je zřejmě (obecně)

$$\int_a^b f \cdot g \neq \Big(\int_a^b f\Big) \cdot \Big(\int_a^b g\Big).$$

(ii) V pravidle podílu (Věta 31(vi)) nestačí, aby $g(x) > 0$ na intervalu $[a,b]$, tj. je nutné, aby byla funkce ve jmenovateli „odražena od 0“. Např. pro funkce

$$f(x) := 1 \quad \text{na } [0,1], \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ x & \text{pro } x \in (0,1], \end{cases}$$

platí, že $f \in \mathcal{R}[0,1]$, $g \in \mathcal{R}[0,1]$, protože $\int_0^1 f = 1$ a $\int_0^1 g = \frac{1}{2}$. Dále je $g(x) > 0$ na celém intervalu $[0,1]$, ale funkce

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0,1], \end{cases}$$

není integrovatelná na intervalu $[0,1]$, protože

$$\int_0^1 \frac{f}{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty, \qquad \text{(viz Odstavec 2.11).}$$

Funkci $g(x)$ nelze „odrazit od 0“, protože se k nule blíží (a tedy je funkce $\frac{1}{g(x)}$ neohraničená).

(iii) Pravidlo návaznosti (Věta 31(vii)) lze jednoduše rozšířit na libovolné hodnoty $a, b, c \in \mathbb{R}$ (dokonce mohou být některá tato čísla stejná), pokud definujeme

$$\int_a^a f := 0, \qquad \text{(tj. „plocha“ pod jediným bodem je nulová),}$$

$$\int_b^a f := -\int_a^b f. \qquad \text{(tj. záměna integračních mezí mění znaménko určitého integrálu).}$$

Potom podle pravidla návaznosti zřejmě platí

$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0.$$

□

Příklad 95.

(a) Podle pravidla součtu a podle Příkladů 93 a 91(e) je

$$\int_0^1 (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

(b) Podle pravidla konstantního násobku a podle Příkladu 93 je

$$\int_0^1 2x^2 \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

(c) Podle pravidla rozdílu a podle Příkladu 93 je

$$\int_0^1 (1 - x^2) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

□

2.7. **Věty o střední hodnotě.** Stejně tak jako má diferenciální počet své věty o střední hodnotě (viz Odstavec 1.10), jsou podobné věty důležité i v integrálním počtu.

Začněme následujícím motivačním příkladem. Pokud máme konečně mnoho čísel $a_1, \ldots, a_n$, potom jejich průměrná hodnota je

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Tedy průměrná hodnota čísel $f(c_1), \ldots, f(c_n)$ je pak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k).$$

Položme si otázku, co by se stalo, kdybychom nahradili konečně mnoho čísel $f(c_1), \ldots, f(c_n)$ nekonečně mnoha funkčními hodnotami $f(x)$, tj. analyzujme limitu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\substack{\text{délka dělících} \\ \text{subintervalů}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \big(\text{Riemannův součet, ale místo } m_k \text{ či } M_k \text{ je zde } f(c_k)\big) \\
&\to \frac{1}{b-a} \int_a^b f.
\end{aligned}$$

Definice 20 (Průměr funkce). Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom číslo

$$av(f) = av_{[a,b]}(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

nazýváme průměrnou hodnotou (též střední hodnotou) funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Označení je z angličtiny „average value“. □

Příklad 96.

(a) Pro funkci $f(x) = c$ na intervalu $[a, b]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b c \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot c\,(b-a) = \boxed{c},$$

tj. průměrná hodnota konstantní funkce je samozřejmě tatáž konstanta.

(b) Pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $[a, b]$ platí (viz Příklad 91(e))

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \boxed{\frac{b+a}{2}}.$$

(c) Pro funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

□

V dalším textu označme

$$m := \inf \big\{ f(x),\ x \in [a, b] \big\}, \quad M := \sup \big\{ f(x),\ x \in [a, b] \big\},$$

tj. platí pak $m \leq f(x) \leq M$ na intervalu $[a, b]$.

Nyní uvedeme důležitou větu o střední hodnotě integrálního počtu. I když tato věta plyne až z následující věty, uvádíme ji jako první, protože bude pro nás velmi důležitá.

Věta 32 (**O střední hodnotě integrálního počtu**).

(i) *Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$, takové, že*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = c\,(b-a), \qquad \textit{tj.} \qquad c = av(f),$$

tj. plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x je rovna obsahu obdélníka se základnou $[a, b]$ a výškou c.

(ii) *Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ s vlastností, že*

$$f(x_0) = c = av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

tj. spojitá funkce $f(x)$ nabývá svou průměrnou hodnotu v intervalu $[a, b]$.

Důkaz. Plyne z následující Věty 33 volbou $g(x) \equiv 1$ na $[a, b]$. □

Příklad 97. Funkce $f(x) = 4 - x^2$ má na intervalu $[0, 3]$ průměrnou hodnotu

$$av(f) = \frac{1}{3} \int_0^3 (4 - x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \left(\int_0^3 4 \, \mathrm{d}x - \int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{3} \cdot (12 - 9) = 1,$$

(Integrál $\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = 9$ lze spočítat podobně jako Příklad 93.)

Podle Věty 32(i) tedy pro číslo $c = av(f) = 1$ platí, že

$$\int_0^3 (4 - x^2) \, \mathrm{d}x = c\,(b-a) = 1 \cdot 3 = 3.$$

Dále, protože je funkce $4 - x^2$ spojitá na intervalu $[0,3]$, existuje podle Věty 32(ii) bod $x_0 \in [0,3]$ s vlastností, že $f(x_0) = 4 - x_0^2 = 1$. Zřejmě se jedná o bod $x_0 = \sqrt{3}$. □

Poznámka 27. To, že spojitá funkce nabývá svou průměrnou hodnotu, je vlastnost, která obecně neplatí pro konečně mnoho hodnot. Je to velmi důležitá vlastnost! □

Příklad 98. Pokud je funkce $f(x)$ nespojitá na intervalu $[a,b]$, potom svou průměrnou hodnotu nabývat nemusí. Např. pro funkci $f(x)$ na intervalu $[-1,1]$ definovanou jako

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in [-1,0), \\ 1 & \text{pro } x \in [0,1], \end{cases}$$

je

$$av(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$

ale funkce $f(x)$ nenabývá hodnotu 0 nikde v intervalu $[-1,1]$. □

Věta 33. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $g(x) \geq 0$ na $[a,b]$.*

(i) *Existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$, takové, že*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá na $[a,b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a,b]$ s vlastností, že $f(x_0) = c$, tj.*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (i) Protože je $m \leq f(x) \leq M$ a současně $g(x) \geq 0$ na intervalu $[a,b]$, platí nerovnosti

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \qquad \text{pro } x \in [a,b].$$

Je-li $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, potom z pravidla monotonie určitého integrálu (Věta 31(iii)) je

$$0 = m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a tudíž číslo c můžeme zvolit libovolně.

Je-li $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ (neboť $g(x) \geq 0$ na $[a,b]$), potom platí nerovnosti

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \Rightarrow \qquad m \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M,$$

a tudíž číslo

$$c := \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

splňuje tvrzení této věty.

(ii) Je-li $f(x)$ spojitá na $[a,b]$, potom podle Weierstrassovy věty (Věta 5) nabývá $f(x)$ svého maxima ($=M$) a minima ($=m$) v intervalu $[a,b]$. Dále, podle Bolzanovy věty (Věta 6) nabývá $f(x)$ všech hodnot mezi m a M, a tedy nabývá i hodnotu c, tj. $f(x_0)=c$ pro nějaký bod $x_0 \in [a,b]$. $\square$

2.8. **Integrál jako funkce horní meze.** Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na $[a,b]$, potom je podle Věty 31(vii) také integrovatelná na intervalu $[a,x]$ pro každé $x \in [a,b]$. Tedy předpis

$$\boxed{F(x) := \int_a^x f} = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

definuje funkci $F(x)$, která je řádně definovaná pro všechna $x \in [a,b]$.

Zřejmě je

$$F(a) = \int_a^a f = 0 \quad \text{a} \quad F(b) = \int_a^b f.$$

V tomto odstavci budeme studovat vlastnosti této funkce $F(x)$.

Zřejmě je hodnota $F(x)$ obsah (orientované) plochy mezi grafem funkce $f(t)$ na intervalu $[a,x]$.

Příklad 99. Pro (nespojitou) funkci

$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{pro } x \in [0,1), \\ 10 & \text{pro } x \in [1,2] \end{cases}$$

je

$$F(x) := \begin{cases} 5x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 10x-5 & \text{pro } x \in [1,2]. \end{cases}$$

$\square$

V následujích dvou tvrzeních uvidíme, že funkce $F(x)$ „vylepšuje“ vlastnosti funkce f. Viz např. předchozí Příklad 99, kdy z nespojité funkce $f(x)$ dostaneme spojitou funkci $F(x)$.

Věta 34. *Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (tedy funkce $f(x)$ může být i nespojitá). Potom je funkce*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

spojitá na intervalu $[a,b]$.

Důkaz. Důkaz provedeme pro ohraničenou funkci $f(x)$, tj. $|f(x)| \le c$ na intervalu $[a,b]$ pro nějaké $c>0$. Obecný případ (bez předpokladu ohraničenosti funkce $f(x)$) lze najít v literatuře o integrálním počtu.

Nechť $x_0 \in [a,b]$ je libovolný bod. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, neboli že

$$F(x) - F(x_0) \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to x_0.$$

Platí, že

$$\big|F(x)-F(x_0)\big| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \le \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \le \left| \int_{x_0}^x c \right| = c\, \underbrace{|x-x_0|}_{\to 0} \to 0.$$

Tedy je funkce $F(x)$ spojitá v bodě x_0. A protože byl tento bod vybrán v intervalu $[a,b]$ libovolně, je $F(x)$ spojitá na $[a,b]$. □

Další otázkou je, jak rychle se mění funkce $F(x)$? Takto jednoduše položená otázka je ale jednou z nejdůležitějších v tomto předmětu. Odpověď zní: Tak rychle, jaké jsou hodnoty funkce $f(x)$.

Věta 35. *Je-li $f(x)$ spojitá na nějakém okolí bodu x_0, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Důkaz. Podle Poznámky 4(v) je

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\begin{array}{l} \text{průměrná hodnota} \\ \text{funkce } f(t) \text{ na} \\ \text{intervalu } [x_0, x_0+h] \end{array} \right) = \lim_{h\to 0} av_{[x_0,x_0+h]}(f) = \lim_{h\to 0} f(t_0),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o střední hodnotě integrálního počtu ($f(x)$ je spojitá na intervalu $[x_0, x_0+h]$ pro h dostatečně malé, a tudíž nabývá v tomto intervalu svou střední hodnotu, viz Věta 32(ii)), kde bod t_0 leží mezi body x_0 a x_0+h.

Všimněte si, že číslo h ve výše uvedené limitě nemusí být nutně kladné. Ale i pro $h < 0$ či pro $h = 0$ jsme příslušné integrály definovali v Poznámce 26(iii).

Tedy platí, že

$$\begin{aligned} x_0 \le t_0 \le x_0 + h \qquad & \text{pro } h > 0, \\ x_0 + h \le t_0 \le x_0 \qquad & \text{pro } h < 0. \end{aligned}$$

Odsud ale plyne, že jakmile $h \to 0$, pak $t_0 \to x_0$. A protože je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, platí $f(t_0) \to f(x_0)$, neboli

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} f(t_0) = \lim_{t_0 \to x_0} f(t_0) = f(x_0).$$

□

Důsledek 8 (Fundamentální vztah integrálního počtu). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f$ spojitou derivaci $F'(x) = f(x)$ na $[a,b]$, tj. platí vztah*

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t\right)' = f(x)}. \tag{43}$$

Poznámka 28.

(i) Vztah (43) v sobě soustřeďuje poznatky o

- derivaci – protože tento vztah obsahuje derivaci,

- neurčitém integrálu – protože je funkce $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ primitivní k funkci $f(x)$,
- určitém integrálu – protože tento vztah obsahuje určitý integrál,
- spojitosti – protože je tento vztah založen na spojitosti funkce $f(x)$.

(ii) Důsledek 8 je vlastně důkaz věty o existenci primitivní funkce (Věta 23), protože říká nejen to, že primitivní funkce $F(x)$ ke spojité funkci na $[a, b]$ existuje, ale dokonce udává návod, jakým způsobem tuto primitivní funkci zkonstruovat (pomocí určitého integrálu s proměnnou horní mezí).

(iii) Místo $\int_a^x f$ můžeme vzít také $F(x) = \int_c^x f$ pro libovolné $c \in [a, b]$, protože podle pravidla návaznosti (Věta 31(vii)) je

$$\left(\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = \Bigg(\underbrace{\int_c^a f(t)\ \mathrm{d}t}_{\substack{\text{konstanta}\\ \text{vzhledem k } x}} + \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\Bigg)' = 0 + \left(\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

(iv) Vzorec (43) udává, že operace určitého integrování (= výpočet plochy) a derivování jsou v tomto pořadí inverzní, tj. když začneme se spojitou funkcí $f(t)$ na $[a, b]$, kterou nejprve integrujeme přes interval $[a, x]$ (tím vznikne funkce $F(x)$ udávající orientovanou plochu pod $f(t)$ na intervalu $[a, x]$ a poté funkci $F(x)$ zderivujeme, tak se vždy opět vrátíme k původní funkci $f(x)$. Opačné pořadí operací, tj. diferencovatelnou funkci $f(x)$ napřed zderivujeme, a pak její derivaci $f'(t)$ integrujeme (Riemannovým integrálem) na $[a, x]$, pak výsledná funkce nemusí být rovna původní funkci $f(x)$, tj. obecně je

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \neq f(x) - f(a).$$

Toto je jedna z „vad" Riemannova integrálu, která je odstraněna obecnějšími typy integrálů, např. integrálem Lebesgueovým. Takováto funkce $f(t)$ musí mít ale dostatečně „škaredou" derivaci $f'(t)$. Pro „pěkné" funkce $f(t)$, např. pro funkce se spojitou derivací $f'(t)$ na $[a, b]$, výše uvedný vztah platí jako rovnost.

□

Poznámka 29. Vztah (43) lze jednoduše použít pro rychlý zápis primitivní funkce, např. primitivní funkce k funkci

$$\text{(a)}\quad x^2 \quad \text{je} \quad F(x) = \int_0^x t^2\ \mathrm{d}t, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Tyto primitivní funkce lze ovšem vypočítat (viz následující Odstavec 2.9), např.

$$\text{(a)} \int_0^x t^2\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{x^3}{3}, \qquad \text{tedy} \quad \left(\int_0^x t^2\ \mathrm{d}t\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2,$$

$$\text{(b)} \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \big[\ln t\big]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x, \qquad \text{tedy} \quad \left(\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\right)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

a ověřit tak přímo platnost vztahu (43).

Na druhou stranu lze vztah (43) využít i pro konstrukci primitivních funkcí k vyšším funkcím (viz Poznámka 23), např. primitivní funkce k funkci

$$\text{(a)}\quad \frac{\sin x}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t, \qquad \text{(b)}\quad \cos(x^2) \quad \text{je} \quad F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\ \mathrm{d}t,$$

kde dané integrály vypočítat nelze.

(Výše uvedené integrály je možné ale vyjádřit pomocí nekonečné mocninné řady, viz dále Odstavec 7.5.) □

Příklad 100. Bez výpočtu, tedy pouze na základě znalosti vztahu (43), můžeme proto psát např.

$$\left(\int_0^x t^2 \sin t\ \mathrm{d}t\right)' = x^2 \sin x, \qquad \left(\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\ \mathrm{d}t\right)' = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

□

Protože je $\boxed{\int_c^x f = -\int_x^c f}$, pro integrál jako funkci dolní meze platí

$$G(x) := \int_x^c f, \qquad G'(x) = \left(\int_x^c f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = \left(-\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = -\left(\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = -f(x),$$

a tedy je

$$\boxed{\left(\int_x^c f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = -f(x)}. \tag{44}$$

To znamená, že

> při derivování integrálu podle horní meze dostaneme původní funkci $f(x)$, zatímco při derivování integrálu podle dolní meze dostaneme $-f(x)$.

Příklad 101. Pro pokročilejší: Zkuste si rozmyslet, jak by vypadala derivace funkcí

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_{\sin x}^1 \arcsin t\ \mathrm{d}t, \qquad H(x) = \int_x^{x^2} \ln t\ \mathrm{d}t.$$

Řešení. Podle pravidla pro derivování složené funkce (Věta 10) je

$$F'(x) = \left(\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\right)' = \frac{1}{x^2}\cdot(x^2)' = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x},$$

$$G'(x) = \left(\int_{\sin x}^1 \arcsin t\ \mathrm{d}t\right)' = -(\underbrace{\arcsin \sin x}_{=x})\cdot(\sin x)' = -x\cos x,$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\int_x^{x^2} \ln t\ \mathrm{d}t\right)' = \left(\int_x^1 \ln t\ \mathrm{d}t + \int_1^{x^2} \ln t\ \mathrm{d}t\right)' \\ &= \left(\int_x^1 \ln t\ \mathrm{d}t\right)' + \left(\int_1^{x^2} \ln t\ \mathrm{d}t\right)' = -\ln x + (\ln x^2)\cdot(x^2)' \\ &= -\ln x + 2\,(\ln x)\cdot 2x = (4x-1)\,\ln x. \end{aligned}$$

□

2.9. **Metody výpočtu určitého integrálu.** To, že jsme schopni najít primitivní funkci pomocí určitého integrálu, vede k jednoduché metodě výpočtu určitého integrálu pomocí libovolné primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Věta 36 (Newtonův-Leibnizův vzorec). *Je-li $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a je-li $F(x)$ libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na (a,b), přičemž $F(x)$ je spojitá na $[a,b]$, potom je*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}.$$

Důkaz. Všimněte si, že ve větě stačí $f(x)$ integrovatelná, nemusí být spojitá. Důkaz ale provedeme pouze pro spojitou funkci $f(x)$, obecnější důkaz lze najít v literatuře.

Je-li $f(x)$ spojitá na $[a,b]$, potom má $f(x)$ podle Věty 23 na $[a,b]$ primitivní funkci, označme ji $F(x)$. Dále, protože je podle Důsledku 8 funkce $\int_a^x f$ také primitivní k $f(x)$ na $[a,b]$, musí se tyto dvě primitivní funkce navzájem lišit o konstantu, viz Poznámka 19(iii). Tedy platí, že $F(x) = \int_a^x f + C$ pro každé $x \in [a,b]$, a proto je

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f + C\right) - \left(\int_a^a f + C\right) = \int_a^b f.$$

$\square$

Výpočet určitého integrálu podle Newtonova-Leibnizova vzorce značíme jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a). \tag{45}$$

Příklad 102. Protože je funkce $\frac{x^3}{3}$ primitivní k funkci x^2 na $[0,1]$, platí

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}},$$

viz také Příklad 93. $\square$

Věta 37 (Metoda per partes pro určitý integrál). *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $[a,b]$ a $u', v' \in \mathcal{R}[a,b]$. Potom platí*

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\cdot v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle Věty 25 je funkce

$$F(x) := u(x)\cdot v(x) - \int_a^x u\cdot v'$$

primitivní k funkci $f(x) = u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$ na intervalu $[a, b]$. A proto podle Newtonova-Leibnizova vzorce (45) je

$$\int_a^b u' \cdot v = F(b) - F(a) = \left(u(b) \cdot v(b) - \int_a^b u \cdot v'\right) - \left(u(a) \cdot v(a) - \int_a^a u \cdot v'\right)$$
$$= \big[\, u \cdot v \,\big]_a^b - \int_a^b u \cdot v'.$$

□

Pomocí Věty 37 lze tedy počítat daný integrál metodou per partes přímo. Druhá možnost je pak vypočítat nejprve primitivní funkci pomocí metody per partes pro neurčitý integrál (Věta 25) a potom aplikovat Newtonův-Leibnizův vzorec (45).

Příklad 103. (Srovnejte s Příkladem 82.)

(a)

$$\int_0^\pi x \cos x \,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \big[\, x \sin x \,\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$$
$$= \underbrace{\pi \sin \pi}_{=0} - \underbrace{0 \sin 0}_{=0} - \big[-\cos x \,\big]_0^\pi = \big[\cos x \,\big]_0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = \boxed{-2}.$$

(b)

$$\int_1^e x \ln x \,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2}{2} \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1}{2} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2} \int_1^e x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}}.$$

□

Věta 38 (Substituce pro určitý integrál). *Nechť je funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $[c, d]$ a nechť má funkce $\varphi(x)$ integrovatelnou derivaci na intervalu $[a, b]$ a $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$. Potom platí*

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Neboli v daném integrálu volíme substituci $\boxed{t = \varphi(x)}$ *a transformujeme nejen integrál, ale i meze (v tomtéž pořadí mezí).*

Příklad 104. Vypočtěte

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Tento příklad můžeme vyřešit dvěma způsoby. Buď přímo z Newtonova-Leibnizova vzorce (45) (výpočtem primitivní funkce se substitucí v neurčitém integrálu) nebo pomocí substituce v určitém integrálu.

1. způsob: Z Příkladu 85 víme, že

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Potom je

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\,1\sqrt{1-1^2}\right) - \left(\frac{1}{2}\arcsin 0 + \frac{1}{2}\,0\sqrt{1-0^2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2. způsob: Při substituci v určitém integrálu transformujeme i meze (a již se pak ke „staré“ proměnné x nevracíme), tj.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \left|\begin{array}{l} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = (\cos t)\ \mathrm{d}t \\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = 0 \\ x = 1 \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t}\cdot\underbrace{\cos t\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\ \mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin\pi}{4}}_{=0}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Protože je jedná o obsah čtvrtkruhu s poloměrem $r = 1$, je výsledná hodnota $\frac{\pi}{4}$ očekávaná. □

Příklad 105. Vypočtěte obsah kruhu s poloměrem $r > 0$.

Řešení. Obsah kruhu vypočítáme jako 2-krát obsah půlkruhu nebo jako 4-krát obsah čtvrtkruhu. Podle první možnosti je pak

$$P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \left|\begin{array}{l} x = r\sin t \\ \mathrm{d}x = (r\cos t)\ \mathrm{d}t \\ x = -r \ \Rightarrow\ t = -\frac{\pi}{2} \\ x = r \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}}_{=r\cos t}\cdot\underbrace{r\cos t\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\ \mathrm{d}t = 2\,r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = 2\,r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\ \mathrm{d}t$$

$$= 2\,r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\,r^2\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin\pi}{4}}_{=0}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin(-\pi)}{4}}_{=0}\right)\right\}$$

$$= 2\,r^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\pi r^2}.$$

□

2.10. **Aplikace určitého integrálu.** Víme, že určitý integrál $\int_a^b f$ byl zkonstruován jako orientovaná plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $[a,b]$. Tato orientovaná plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je $f(x) \geq 0$ na $[a,b]$.

• Plocha mezi dvěma grafy. Pokud nás zajímá velikost plochy mezi grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$, určíme ji pomocí vepsaných a opsaných obdélníků (stejně jako při konstrukci Riemannova integrálu v Odstavci 2.5), avšak nyní bude obsah každého takového obdélníka tvaru

$$[f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \text{Riemannův součet je pak} \quad \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1}).$$

Tyto úvahy vedou k odvozeni následujícího vzorce.

Tvrzení 6 (Plocha mezi grafy). *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$. Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu $[a,b]$ velikost*

$$\boxed{P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x} = \int_a^b [\ \textit{horní funkce} \ - \ \textit{dolní funkce}\ ]\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě je zřejmě vždy $P \geq 0$.

Příklad 106. Určete plochu mezi grafy funkcí $y = 1 - x^2$ a $y = -3$.

Řešení. Oba grafy se protínají v bodech $x = -2$ a $x = 2$, přičemž funkce $y = 1 - x^2$ je horní funkce na intervalu $[-2, 2]$. A proto je hledaná plocha

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{2} [(1 - x^2) - (-3)]\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\, 4x - \frac{x^3}{3} \,\right]_{-2}^{2} \\ &= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}. \end{aligned}$$

□

Příklad 107. Určete plochu mezi grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

Řešení. Oba grafy se protínají v bodech $x = \pi$ a $x = 2\pi$, přičemž funkce $y = \sin x$ je horní funkce na tomto intervalu. A proto je hledaná plocha

$$\begin{aligned} P &= \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,\mathrm{d}x = \big[\cos x\,\big]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = \boxed{2}. \end{aligned}$$

□

• Délka křivky. Křivka C v rovině, $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, je zadána parametricky jako zobrazení $C : t \mapsto [x(t), y(t)]$.

Příklad 108. Křivka $C : \ t \mapsto [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice o poloměru $r = 1$ se středem v počátku. □

Zvolme libovolné dělení $D = \{\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta\}$ intervalu $[\alpha, \beta]$. Na křivce C vyznačíme body odpovídající hodnotám parametru $t = t_k$.

Zvolme nyní nějaké dva dělící body t_{k-1} a t_k a označme příslušné body na křivce C jako $M = [x(t_{k-1}), y(t_{k-1})]$ a $N = [x(t_k), y(t_k)]$. Podle Pythagorovy věty má potom úsečka MN velikost

$$|MN| = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}.$$

Délka celé křivky je pak aproximována délkou lomené čáry při dělení D, tedy číslem

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[x(t_k) - x(t_{k-1})\big]^2 + \big[y(t_k) - y(t_{k-1})\big]^2} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 (t_k - t_{k-1})^2 + \left[\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 + \left[\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\
&\quad = \text{ Riemannův součet s výškou „obdélníka" danou výrazem} \\
&\qquad\qquad \sqrt{\left[\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 + \left[\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2}
\end{aligned}$$

Tedy pro $n \to \infty$ (zvyšující se počet dělících bodů a normu dělení $n(D) \to 0$) je

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \to x'(t), \qquad \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \to y'(t), \qquad t_k - t_{k-1} \to dt,$$

a proto dostáváme následující vzorec.

Tvrzení 7 (Délka křivky v rovině). *Nechť C je křivka v rovině a $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [\alpha, \beta]$ její parametrizace. Mají-li souřadné funkce $x(t)$ a $y(t)$ spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, potom má křivka C konečnou délku a platí*

$$\boxed{d(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ \mathrm{d}t}.$$

Příklad 109. Určete délku jednotkové půlkružnice (tj. $r = 1$).

Řešení. Půlkružnice má parametrizaci $[x(t), y(t)] = [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, \pi]$. Tyto funkce mají spojitou derivaci $[x'(t), y'(t)] = [-\sin t, \cos t]$ na $[0, \pi]$, a proto je délka půlkružnice rovna

$$d = \int_0^{\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 1\ \mathrm{d}t = \big[\, t \,\big]_0^{\pi} = \boxed{\pi}.$$

(Obvod celé jednotkové kružnice je pak zřejmě 2π.) $\square$

Příklad 110. Určete obvod kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení. Kružnice má parametrizaci $[x(t), y(t)] = [r\cos t, r\sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$. Tyto funkce mají spojitou derivaci $[x'(t), y'(t)] = [-r\sin t, r\cos t]$ na $[0, 2\pi]$, a proto je obvod kružnice roven

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\ \mathrm{d}t = \big[\, r\, t\,\big]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi r}. \end{aligned}$$

□

Graf funkce $f(x)$ můžeme chápat jako množinu bodů $[x, f(x)]$, tedy je to speciální případ křivky v rovině, která má parametrizaci $[t, f(t)]$ pro $t \in [a, b]$ (v tomto případě tuto parametrizaci ale píšeme s proměnnou x). A protože má tato parametrizace derivaci $[(t)', f'(t)] = [1, f'(t)]$, dostáváme z Tvrzení 7 následující vzorec.

Důsledek 9 (Délka grafu). *Má-li funkce $f(x)$ spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$, potom má její graf na intervalu $[a, b]$ konečnou délku a platí*

$$\boxed{d(\mathrm{Gr}\, f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ \mathrm{d}x}.$$

Příklad 111. Určete délku grafu paraboly $f(x) = \frac{1}{2}\, x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. Délka grafu bude zřejmě číslo mezi $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$ a $1 + \frac{1}{2} = 1.5$. Protože je $f'(x) = x$ spojitá funkce na intervalu $[0, 1]$, je délka tohoto grafu rovna

$$d(\mathrm{Gr}\, f) = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Ověřte si zpětným derivováním, že primitivní funkce k funkci $\sqrt{1 + x^2}$ je

$$F(x) = \frac{1}{2}\, x\, \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

A proto je podle Newtonova-Leibnizova vzorce (45)

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Gr}\, f) &= \left[\frac{1}{2}\, x\, \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\, 1\, \sqrt{2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\, 0\, \sqrt{1} + \frac{1}{2}\, \underbrace{\ln 1}_{=0}\right) \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)} \approx 1.15. \end{aligned}$$

□

• Objem rotačního tělesa. Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x kolem osy x na intervalu $[a,b]$. Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a,b]$, tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Zvolíme-li nějaké dělení $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ intervalu $[a,b]$, potom má jeden „objemový dílek" šířku $x_k - x_{k-1}$ a poloměr $f(c_k)$. Tedy objem takového dílu je

$$\pi\,[f(c_k)]^2\,(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{(obsah „podstavy" krát šířka).}$$

Objem celého rotačního tělesa je pak aproximován číslem

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(c_k)]^2\,(x_k - x_{k-1}) = \text{ Riemannův součet s výškou „obdélníka" danou výrazem } \pi\,[f(c_k)]^2.$$

Tedy pro $n \to \infty$ (zvyšující se počet dělících bodů a normu dělení $n(D) \to 0$) dostáváme následující vzorec.

Tvrzení 8 (Objem rotačního tělesa). *Nechť $f(x)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $[a,b]$. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi* $\operatorname{Gr} f$ *a osou x na intervalu $[a,b]$ kolem osy x, je*

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Příklad 112. Určete objem jednotkové koule.

Řešení. Objem určíme jako dvojnásobek objemu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0,1]$. Je tedy

$$V = 2\,\pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\,\pi}\,.$$

□

Příklad 113. Určete objem koule o poloměru r.

Řešení. Objem určíme jako dvojnásobek objemu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0,r]$. Je tedy

$$V = 2\,\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r (r^2-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\,\pi r^3}\,.$$

□

Příklad 114. Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací řetězovky $f(x) = \cosh x$ kolem osy x na intervalu $[-1,1]$.

Řešení. Funkce $\cosh x$ je zadána pomocí exponenciální funkce jako aritmetický průměr e^x a e^{-x}, tj.

$$\cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 x \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \big(\mathrm{e}^{2x} + \underbrace{2\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x}}_{=2} + \mathrm{e}^{-2x}\big) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 2x + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} + 2 + \frac{\mathrm{e}^{-2}}{-2}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} - 2 + \frac{\mathrm{e}^2}{-2}\right)\right] \\ &= \boxed{\frac{\pi}{4} \big(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} + 4\big)} \approx 8.83865. \end{aligned}$$

Uvedený integrál lze spočítat i pomocí hyperbolických funkcí. Objem je pak

$$V = \pi \left[(\cosh 1)(\sinh 1) + 1\right] \approx 8.83865.$$

□

• Povrch (obsah pláště) rotačního tělesa. Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a,b]$, tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Zvolíme-li nějaké dělení $D = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ intervalu $[a,b]$, potom má jeden dílek „šířku“ (délka grafu)

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\, (x_k - x_{k-1}) \\ &\approx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

a poloměr $f(c_k)$. Tedy obsah pláště takového dílu je

$$2\pi\, f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\, (x_k - x_{k-1}).$$

Obsah pláště celého rotačního tělesa je pak aproximován číslem

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi\, f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\, (x_k - x_{k-1})$$

$$= \text{ Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem}$$

$$2\pi\, f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}.$$

Tedy pro $n \to \infty$ (zvyšující se počet dělících bodů a normu dělení $n(D) \to 0$) dostáváme následující vzorec.

Tvrzení 9 (Obsah pláště rotačního tělesa). *Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce se spojitou derivací $f'(x)$ na intervalu $[a,b]$. Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $\mathrm{Gr}\, f$ na intervalu $[a,b]$ kolem osy x, je*

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x}.$$

Příklad 115. Určete povrch jednotkové koule.

Řešení. Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0,1]$. Protože platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\frac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\pi \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 4\pi\,\big[\,x\,\big]_0^1 = \boxed{4\pi}. \end{aligned}$$

□

Příklad 116. Určete povrch koule o poloměru r.

Řešení. Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0,r]$. Protože platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\sqrt{\frac{(r^2-x^2)+x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\pi \int_0^r r\,\mathrm{d}x = 4\pi\,\big[\,rx\,\big]_0^r = \boxed{4\pi r^2}. \end{aligned}$$

□

Příklad 117. Určete obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací řetězovky $f(x) = \cosh x$ kolem osy x na intervalu $[-1,1]$.

Řešení. Funkce $\cosh x$ je zadána v Příkladu 114. Hodnota v krajních bodech intervalu $[-1,1]$ je $\cosh(\pm 1) = (e+1/e)/2 \approx 1.54$. Protože platí

$$f'(x) = \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{a} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

je tedy

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \cosh x\,\underbrace{\sqrt{1+(\sinh x)^2}}_{=\cosh x}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-1}^1 \cosh^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} + 4\right)} \approx 17.6773, \end{aligned}$$

viz Příklad 114, kde jsme vypočítali integrál $\int_{-1}^1 \cosh^2 x\,\mathrm{d}x$.

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že řetězovka vytváří těleso s nejmenším pláštěm mezi všemi rotačními tělesy, jejichž „generující graf“ začíná a končí ve stejných bodech, jako uvedená řetězovka. To se využívá např. při konstrukci visutých mostů (souvisí to s minimalizací potenciální energie použitého materiálu).

Obrázek 7. Obrázek vpravo převzat z http://goo.gl/M55vmh.

Více např. na

http://en.wikipedia.org/wiki/Catenary,
http://en.wikipedia.org/wiki/Catenoid,
http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Catenary_dir/catenary.html.

□

• Další aplikace určitého integrálu. Kromě geometrických aplikací (obsah plochy, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělesa) se určitý integrál využívá v mnoha fyzikálních aplikacích, např.

- těžiště rovinného obrazce,
- těžiště tělesa,
- obsah plochy, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělesa v polárních či parametrických souřadnicích.

Podrobnosti jsou např. ve skriptech [8, Odstavec 6.2].

2.11. **Nevlastní integrály.** Stejně tak jako $\int_a^b f$ je plocha mezi grafem (ohraničené) funkce $f(x)$ a osou x na (konečném) intervalu $[a,b]$, můžeme chtít najít tuto plochu na neohraničeném intervalu $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$, případně i pro neohraničenou funkci $f(x)$. Dostáváme se tak k pojmu nevlastního integrálu

$$\int_a^\infty f, \qquad \int_{-\infty}^b f, \qquad \int_{-\infty}^\infty f.$$

Přitom, jak uvidíme, všechna pravidla pro výpočet integrálu zůstávají zachována, jen je potřeba dávat pozor na neurčité výrazy (obsahující symbol ∞) a ty pak spočítat pomocí limity.

Příklad 118. Tyto příklady berte jako motivační.

(a) Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1,\infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\substack{\text{ve smyslu}\\ \text{limity}}} - (-1) = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

(b) Plocha pod neohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0,1]$ je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = (-1) - \Bigg(-\underbrace{\frac{1}{0^+}}_{\substack{\text{ve smyslu}\\ \text{limity}}}\Bigg) = -1 + \infty = \boxed{\infty}.$$

(c) Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $[1,\infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_1^\infty = \underbrace{\ln\infty}_{\substack{\text{ve smyslu}\\ \text{limity}}} - \ln 1 = \infty - 0 = \boxed{\infty}.$$

□

Definice 21 (**Nevlastní integrál 1. druhu).**

- Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a,\infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{46}$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = L.$$

Pokud existuje limita v (46) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty.$$

- Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $(-\infty, b]$. Existuje-li vlastní limita
$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{47}$$
potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a klademe
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = L.$$
Pokud existuje limita v (47) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty.$$

□

Tedy příklady nevlastních integrálů v Příkladu 118 jsou spočítány matematicky správně, jen jsme pro zápis výpočtu měli zvolit symbol limity. Tento symbol limity budeme uvádět, jen až je to nezbytně nutné.

Příklad 119. Viz Příklad 118.

(a)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \left(-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

(c)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_1^\infty = \big(\lim_{x\to\infty}\ln x\big) - \ln 1 = \boxed{\infty}.$$

□

Příklad 120. Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků (viz Odstavec 2.3)
$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad a \neq 0.$$

Řešení. Podle věty o substituci v určitém integrálu je
$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = dt \\ x = 0 \ \Rightarrow t = 0 \\ x = \infty \ \Rightarrow \ t = \infty \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(t+a^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t+a^2}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(-\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+a^2}}_{=0}\right) - \left(-\frac{1}{a^2}\right)\right\} = \boxed{\frac{1}{2a^2}}.$$

□

Poznámka 30. Někdy lze podobným způsobem vypočítat i nevlastní integrál přes (oboustranně) nekonečný interval $(-\infty, \infty)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

i když definice takového integrálu zahrnuje limitu funkce dvou proměnných

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{[a,b]\to[-\infty,\infty]} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tomuto problému se lze ale vyhnout za použití pravidla návaznosti (Věta 31(vii)), neboť platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené číslo (např. $a = 0$) a kde jsou zmíněné integrály nevlastní a 1. druhu. □

Příklad 121. V pravděpodobnosti a statistice se často používá nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1,$$

přičemž uvedená funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

se nazývá hustota pravděpodobnosti (standardního) normálního rozdělení. Protože je tato funkce $f(x)$ sudá, zřejmě je pak

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \approx 1.2533.$$

Současně si uvědomte, že primitivní funkce k této funkci $f(x)$ je vyšší funkce (tedy nelze ji vypočítat pomocí elementárních funkcí, viz Poznámka 23). □

Podobně jako v Definici 21 můžeme postupovat i pro funkci $f(x)$, která je neohraničená v okolí bodu a nebo b.

Definice 22 (Nevlastní integrál 2. druhu).

- Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita
$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{48}$$
potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a klademe
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L.$$
Pokud existuje limita v (48) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty.$$

- Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, b)$. Existuje-li vlastní (levostranná) limita
$$\lim_{\beta \to b^-} \int_{a}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = L, \tag{49}$$
potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a klademe
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L.$$
Pokud existuje limita v (49) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty.$$

$\square$

Opět budeme symbol limity budeme uvádět, jen až je to nezbytně nutné.

Příklad 122. Viz Příklad 118(b).

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = (-1) - \Big(-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}_{=\infty}\Big) = \boxed{\infty}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_0^1 = \ln 1 - \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln x}_{-\infty} = \boxed{\infty}.$$

$\square$

Příklad 123. Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1,1)$.

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1,1)$ neohraničená a sudá. Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu $[0,1)$ (nevlastní integrál 2. druhu):

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\big[\arcsin x\big]_0^1 = 2\Big(\underbrace{\big(\lim_{x\to 1^-}\arcsin x\big)}_{=\arcsin 1} - \arcsin 0\Big)$$

$$= 2\,(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\pi}.$$

Všimněte si, že v tomto případě vlastně limita ve výpočtu ani není potřeba, protože je primitivní funkce $F(x) = \arcsin x$ k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ spojitá v bodě $x = 1$ (viz Věta 36). Tedy tento konkrétní příklad lze spočítat i přímo jako

$$P = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \big[\arcsin x\big]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}. \qquad (50)$$

Všimněte si také, že

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 + \big[\big(\sqrt{1-x^2}\big)'\big]^2},$$

a tedy výpočet uvedený v (50) je shodný s výpočtem délky jednotkové půlkružnice (srovnejte s Příkladem 109). □

Pro výpočet nevlastních integrálů tedy budeme používat stejné metody jako pro výpočet (klasických) určitých integrálů (např. metodu per partes, viz Věta 37).

Příklad 124. V teorii pravděpodobnosti a statistiky se používá funkce

$$f(x) := \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad \text{pro } x \in (0,\infty),$$

která udává hustotu tzv. exponenciálního rozdělení, kde $\lambda > 0$ je pevně zvolený parametr. Potom můžeme spočítat

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \big[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\big]_0^\infty = \big(-\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\big) - (-\mathrm{e}^0) = \Big(-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda x}}}_{=0}\Big) - (-1) = \boxed{1},$$

a také

$$\int_0^\infty x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & u = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right|$$

$$= \big[-x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\big]_0^\infty - \int_0^\infty \big(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\big)\,\mathrm{d}x = \Big(-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\Big) - (-0\,\mathrm{e}^0) + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{l'Hosp.}}{=} \Big(-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}}}_{=0}\Big) + \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \Big(-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}}}_{=0}\Big) - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \boxed{\frac{1}{\lambda}}.$$

Např. volbou parametru $\lambda = 1$ dostáváme, že plocha pod funkcí $x\,\mathrm{e}^{-x}$ na intervalu $(0, \infty)$ je rovna

$$\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \boxed{1}\,.$$

$\square$

3. Elementární diferenciální rovnice

Tato kapitola je zaměřena na použití diferenciálního a integrálního počtu pro řešení některých jednoduchých diferenciálních rovnic.

3.1. **Úvod a motivace.** Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytuje neznámá funkce spolu se svou derivací (či derivacemi vyšších řádů).

Diferenciální rovnice slouží k modelování fyzikálních procesů (viz také konec Odstavce 1.7), vyskytují se v ekonomii, biologii, chemii, atd.

Příklad 125. Příklady fyzikálních procesů, které jsou modelovány diferenciálními rovnicemi.

(a) Neznámá funkce je $u = u(x)$ (poloha bodu na přímce),
$$m \cdot u'' = F(x) \qquad \text{(Newtonův zákon)}.$$

(b) Neznámá funkce je $u = u(x, t)$ (teplota v bodě x na přímce v čase t),
$$\alpha^2 \cdot u_{xx} = u_t \qquad \text{(vedení tepla na přímce)}.$$

(c) Neznámá funkce je $u = u(x, t)$ (vychýlení v bodě x na přímce v čase t),
$$\alpha^2 \cdot u_{xx} = u_{tt} \qquad \text{(vlnová rovnice)}.$$

(d) Neznámá funkce je $\theta = \theta(t)$ (úhel v čase t),
$$\theta'' + \alpha \sin\theta = 0 \qquad \text{(matematické kyvadlo)}.$$

(e) Neznámá funkce je $Q = Q(t)$ (množství radioaktivního materiálu v čase t),
$$Q' = -k\,Q \qquad \text{(radioaktivní rozpad)}.$$

□

Otázky k zamyšlení:

1. Jak poznáme, že daná diferenciální rovnice vůbec má řešení? (otázka existence řešení)
2. Je toto řešení jediné? (otázka jednoznačnosti řešení)
3. Kolik řešení existuje?
4. Jak najít toto/tato řešení? (metody řešení diferenciálních rovnic)
5. Jak určit chování případných řešení, aniž by bylo nutné danou diferenciální rovnici vyřešit? (kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic)

Příklad 126. Diferenciální rovnice $x\,y' + y = 0$ má řešení $y = \frac{C}{x}$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$, protože
$$y' = (Cx^{-1})' = -\frac{C}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x\,y' + y = x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} = 0.$$
Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. □

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (případně funkce $y = y(t)$, $y = y(x,t)$, apod.), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic se obvykle najdou pomocí integrování, a proto budou obsahovat integrační konstanty (zřejmě tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. obecné řešení (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá partikulární.

Příklad 127. Obecné řešení diferenciální rovnice z Příkladu 126 je

$$y = \frac{C}{x}, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Řešení této diferenciální rovnice splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$ je $y = \frac{1}{x}$ (tohle je tedy partikulární řešení). □

Příklad 128. Matematicky lze každý příklad na výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál, viz Odstavec 2.1) chápat jako diferenciální rovnici $y' = f(x)$, přičemž hledaná neznámá funkce y se vypočítá jako $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, tedy přímým integrováním. □

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Příklad 129. Tedy diferenciální rovnice z Příkladu 125(a–d) jsou druhého řádu, zatímco rovnice v Příkladu 125(e) je prvního řádu. □

3.2. **Diferenciální rovnice 1. řádu.** V tomto odstavci se budeme podrobněji zabývat diferenciálními rovnicemi 1. řádu. Tj. jsou to rovnice tvaru

$$y' = F(x,y). \tag{51}$$

Příklad 130.

(a) Rovnice $y' = y^2$ má nekonečně mnoho řešení (tedy obecné řešení)

$$y = \frac{1}{C - x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

definovaných na $(-\infty, C)$ a na (C, ∞) a řešení $y = 0$ definované na celém $\mathbb{R}$.

(b) Rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ má řešení $y = 0$ a $y = x^3$ (a také libovolnou jejich navazující kombinaci). Tedy existuje nekonečně mnoho řešení.

□

Poznámka 31. V obecné teorii diferenciálních rovnic lze ukázat, že pokud je pravá strana rovnice (51) spojitá a navíc tzv. lipschitzovská v proměnné y, tj. $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L\,|y_1-y_2|$ pro každé $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a pro nějaké univerzální $L \ge 0$, potom řešení počáteční úlohy s touto rovnicí a podmínkou $y(x_0) = y_0$ skutečně existuje a je jediné – ale pouze v dostatečně malém okolí bodu x_0.

Navíc je zřejmé, že toto řešení bude spojité podle Věty 8 a bude mít spojitou derivaci, protože $y' = F(x,y)$ je spojitá funkce, jak předpokládáme. □

Speciálními případy této diferenciální rovnice jsou rovnice se separovanými proměnnými a rovnice lineární, kterým se budeme blíže věnovat.

3.3. **Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.** Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

tj. pravá strana z obecné rovnice (51) je $F(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, tj. je to součin funkce proměnné x a funkce proměnné y (odtud je název této rovnice).

Příklad 131.

(a) Pro diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x^2}{y \cdot (1+x^3)} \qquad \text{je} \qquad f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad g(y) = \frac{1}{y},$$

a proto se jedná o rovnici se separovanými proměnnými.

(b) Rovnice v Příkladech 128 a 130 jsou všechny se separovanými proměnnými.

(c) Rovnice $y' = x + y$ není rovnice se separovanými proměnnými

□

Pokud napíšeme derivaci y' jako podíl diferenciálů $\frac{dy}{\mathrm{d}x}$, tj. $y' = \frac{dy}{\mathrm{d}x}$, potom lze rovnici se separovanými proměnnými přepsat na tvar

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

odtud název – separované proměnné. A tuto poslední rovnici vyřešíme integrací na obou stranách – na levé straně podle proměnné y a na pravé straně podle proměnné x, tj.

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C}. \tag{52}$$

Integrační konstantu lze zřejmě brát pouze jednou, např. tedy na pravé straně. Dostáváme tedy následující tvrzení.

Tvrzení 10 (O řešitelnosti diferenciální rovnice se separovanými proměnnými). *Jsou-li funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ spojité a $g(y) \neq 0$ na intervalu (c,d), potom má počáteční úloha*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je dáno implicitně vztahem (52). Konstanta C se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Příklad 132. Pro diferenciální rovnici z Příkladu 131 máme

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y\cdot(1+x^3)} \quad\Rightarrow\quad y\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \int y\,dy = \int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\quad \frac{y^2}{2} = \left|\begin{array}{l} 1+x^3 = u \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = du \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{y^2 = \frac{2}{3}\ln|1+x^3| + C}.$$

Pokud je navíc zadána počáteční podmínka $y(0) = 2$, potom dosazením do vypočteného vztahu za $x = 0$ a $y = 2$ dostaneme rovnici $4 = C$, a tedy partikulární řešení je

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{2}{3}\ln|1+x^3| + 4}}$$

(ve výše uvedeném vztahu bereme kladnou odmocninu, protože hodnota $y(0) = 2 > 0$). □

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici se separovanými proměnnými. Např. diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$ (Pozor, $u = u(x)$ je funkce proměnné x!) převede na rovnici se separovanými proměnnými. Skutečně, protože je (podle pravidla pro derivaci součinu, viz Věta 9(iii))

$$u\cdot x = y \quad\Rightarrow\quad u'\cdot x + u = y' \quad\Rightarrow\quad u'\cdot x + u = f(u)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{du}{\mathrm{d}x}x = f(u) - u \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{f(u)-u}\,du = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

a poslední uvedená rovnice má separované proměnné (x a u).

Příklad 133. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Řešení. Volbou $u = \frac{y}{x}$, neboli $y = u\cdot x$, dostaneme $y' = u'\cdot x + u$ a po dosazení do rovnice

$$u'\cdot x + u = 1 + u \quad\Rightarrow\quad u'\cdot x = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{\mathrm{d}x}\cdot x = 1$$

$$\Rightarrow\quad du = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \int du = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad u = \ln|x| + C.$$

Zpětným dosazením za proměnnou u pak dostaneme hledané řešení

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \quad\Rightarrow\quad \boxed{y = x\,\ln|x| + C\,x}, \quad C\in\mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) □

3.4. **Lineární diferenciální rovnice 1. řádu.** Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

tj. pravá strana z obecné rovnice (51) je $F(x,y) = a(x)\,y + b(x)$, tj. je to lineární funkce vzhledem k proměnné y.

Příklad 134.

(a) Rovnice v Příkladu 125(e) je lineární ($a(x) = -k$ je konstanta a $b(x) \equiv 0$).

(b) Rovnice v Příkladech 130 a 131(a,b) nejsou lineární.

(c) Rovnice v Příkladu 131(c) je lineární.

□

Lineární diferenciální rovnici lze jednoduchým způsobem vyřešit.

- Rovnice je tzv. homogenní, tj. $b(x) \equiv 0$. Potom se jedná o rovnici $y' = a(x)\,y$, což je rovnice se separovanými proměnnými

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x} = a(x)\,y \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}\,dy = a(x)\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int a(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\quad \ln|y| = \int a(x)\,\mathrm{d}x + C \quad\Rightarrow\quad |y| = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x + C} = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{e}^{C}$$

$$\Rightarrow\quad \pm y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{e}^{C} \quad\Rightarrow\quad y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\cdot \underbrace{\big(\pm\,\mathrm{e}^{C}\big)}_{\text{lib. konst.}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{y = C\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{53}$$

- Rovnice je tzv. nehomogenní, tj. $b(x) \not\equiv 0$. V tomto případě se nejprve celá rovnice vynásobí vhodnou funkcí $\mu(x)$ (tzv. integračním faktorem), aby po úpravách vznikl výraz pro derivaci součinu. Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) := \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Tedy platí

$$y' - a(x)\,y = b(x) \quad\Rightarrow\quad \big[y' - a(x)\,y\big]\cdot\mu(x) = b(x)\cdot\mu(x)$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{y'\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - y\,a(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{\left(y\,\cdot\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)'} = b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow\quad \big(y\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\big)' = b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow\quad y\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = \int b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int b(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{54}$$

Tedy jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení 11 (O řešitelnosti lineární diferenciální rovnice 1. řádu). *Jsou-li koeficienty $a(x)$ a $b(x)$ spojité funkce na intervalu (a,b), potom má počáteční úloha*

$$y' = a(x)\,y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu (a,b) definováno vztahem (54). Konstanta C se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Tedy vidíme, že na rozdíl od nelineárních rovnic, které mají zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu x_0 (viz Poznámka 31), jsou lineární diferenciální rovnice jednoznačně řešitelné na celém intervalu spojitosti pravé strany rovnice.

Příklad 135. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x.$$

Řešení. Protože je $y' + 3y = x$, je integrační faktor

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 3\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{3x}.$$

Potom platí

$$\underbrace{y'\,\mathrm{e}^{3x} + 3y\,\mathrm{e}^{3x}}_{\left(y\cdot \mathrm{e}^{3x}\right)'} = x\,\mathrm{e}^{3x} \qquad \Rightarrow \qquad \left(y\cdot \mathrm{e}^{3x}\right)' = x\,\mathrm{e}^{3x}$$

$$\Rightarrow \qquad y\cdot \mathrm{e}^{3x} = \int x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x + C \quad \left|\begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{3x} & u = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = \frac{1}{3}\,x\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{3x} + C$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) □

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici lineární. Například tzv. Bernoulliova rovnice

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^r$$

se pomocí substituce $u = y^{1-r}$ (Pozor, $u = u(x)$ je funkce proměnné x!) převede na rovnici lineární. Je-li $r > 0$, pak má rovnice také řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuté v obecném řešení.

Příklad 136. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 3y - x\,y^2.$$

Řešení. Jedná se zřejmě o Bernoulliovu rovnici s $r = 2$. Substitucí $u = y^{-1} = \frac{1}{y}$ dostaneme $u' = -y^{-2}y' = -\frac{y'}{y^2}$ a tedy daná rovnice se převede na tvar

$$y' = 3y - x\,y^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{y'}{y^2} = -3\,\frac{1}{y} + x \qquad \Rightarrow \qquad u' = -3u + x.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x)$. Z Příkladu 135 víme, že její řešení je funkce

$$u = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x}.$$

Zpětným dosazením za funkci u pak dostaneme řešení původní rovnice

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x}}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) Nezapomeňte také na řešení $y \equiv 0$. □

Dalším trikem, který někdy může pomoci převést danou rovnici na lineární diferenciální rovnici, je záměna nezávislé a závislé proměnné x a y. Tedy místo hledání řešení jako funkce $y = y(x)$ jej budeme hledat jako funkci $x = x(y)$. Výsledkem potom zřejmě bude řešení zadané pomocí inverzní funkce.

Příklad 137. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y^2 - 2x}.$$

Řešení. Tato rovnice není lineární diferenciální rovnice. Platí ale

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y^2 - 2x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}x}{dy} = -2x + y^2,$$

přičemž poslední rovnice už je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $x = x(y)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru, tj. $\mu(y) = \mathrm{e}^{2y}$. Řešení je potom tvaru (po dvojnásobné integraci per partes v integrálu $\int y^2\,\mathrm{e}^{2y}\,dy$)

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4} + C\,\mathrm{e}^{-2y}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice. Derivaci y' získáte z pravidla pro derivování implicitní funkce, viz Odstavec 1.12.) □

3.5. **Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.** V tomto odstavci probereme (na ukázku) tři aplikace lineárních diferenciálních rovnic.

• Radioaktivní rozpad – Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu.

Tedy označíme-li jako $Q(t)$ množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase t [roků], potom musí platit rovnice

$$\boxed{Q'(t) = -r\,Q(t)}, \qquad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj. $Q' < 0$.

Příklad 138 (Radioaktivní rozpad). Rádium–226 má poločas rozpadu 1620 let. Najděte čas potřebný k tomu, aby se dané množství Ra–226 zmenšilo na $\frac{3}{4}$ původního množství.

Řešení. Označíme-li jako $Q(0) := Q_0$ původní množství Ra–226, potom pro hledanou funkci $Q(t)$, která splňuje (homogenní) lineární diferenciální rovnici $Q' = -r\,Q$, platí (viz (53))

$$Q(t) = C\,\mathrm{e}^{-rt} \quad \Rightarrow \quad Q(0) = C\,\mathrm{e}^{0} = C \quad \Rightarrow \quad C = Q_0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-rt}.$$

Nyní určíme konstantu r z informace o poločasu rozpadu:

$$\frac{1}{2}\,Q_0 = Q_0\,\mathrm{e}^{-r\cdot 1620} \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{1}{2} = -r\cdot 1620 \quad\Rightarrow\quad r = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{1620} = \frac{\ln 2}{1620} \approx 0.000428\ [\text{let}^{-1}].$$

A nyní určíme hodnotu t, pro kterou je $Q(t) = \frac{3}{4}\,Q_0$:

$$\frac{3}{4}\,Q_0 = Q_0\,\mathrm{e}^{-rt} \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{3}{4} = -rt \quad\Rightarrow\quad t = \frac{\ln\frac{3}{4}}{-r} = -\frac{1620\,\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \approx \boxed{672.4\ [\text{let}]}.$$

□

• Výměna tepla mezi tělesem a okolím – Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (tzv. Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí vyšší, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí nižší, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Příklad 139 (**Detektivní kancelář**). Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí.

Řešení. Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3, \qquad \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)}, \qquad \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad\Rightarrow\quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru $\mu(t) = \mathrm{e}^{kt}$, tj. podle (54) je

$$\Theta = T + C\,\mathrm{e}^{-kt} = 18.3 + C\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstanty C a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C\,\mathrm{e}^{0} = 18.3 + C \quad\Rightarrow\quad C = 8.3 \quad\Rightarrow\quad \Theta = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-3k} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337 \quad\Rightarrow\quad -3k = \ln 0.337$$

$$\Rightarrow\quad k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\boxed{\Theta(t) = 18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-0.362t}}.$$

Jak se určí čas úmrtí? Určíme čas t, pro který je $\Theta(t) = 37$ °C (teplota lidského těla). Tedy

$$18.3 + 8.3\,\mathrm{e}^{-0.362t} = 37 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253 \quad\Rightarrow\quad -0.362t = \ln 2.253$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24 \approx -\boxed{\text{2 hodiny 15 minut}}.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. □

• Míchání dvou látek – např. voda a do ní roztok soli, nebo voda (jezero) a do ní nečistoty z továrny, atd.

Příklad 140 (Míchání roztoku). Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Řešení. Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže přitéká rychlostí

$$c \cdot v = 50 \ \ [\text{g/l}] \ \cdot 20 \ \ [\text{l/min}] \ = 1000 \ \ [\text{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže vytéká rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \ \ [\text{g/l}] \ \cdot 20 \ \ [\text{l/min}] \ = \frac{Q(t)}{50} \ \ [\text{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{55}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v}{L}\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\frac{v}{L}t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{50}\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{0.02\,t}$$

a potom je (výpočty uvádím jak pro obecnou situaci tak i pro náš konkrétní příklad)

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{v}{L}\,Q &= c\,v & \Rightarrow \qquad & Q' + 0.02\,Q = 1000,\\
Q'\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t} + \frac{v}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t}\,Q &= c\,v\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t} & \Rightarrow \qquad & Q'\,\mathrm{e}^{0.02\,t} + 0.02\,\mathrm{e}^{0.02\,t}\,Q = 1000\,\mathrm{e}^{0.02\,t},\\
\left(Q\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t}\right)' &= c\,v\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t} & \Rightarrow \qquad & \left(Q\,\mathrm{e}^{0.02\,t}\right)' = 1000\,\mathrm{e}^{0.02\,t},\\
Q\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t} = \int c\,v\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t}\,\mathrm{d}t &= c\,v\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{v}{L}t}}{\frac{v}{L}} + C & \Rightarrow \qquad & Q\,\mathrm{e}^{0.02\,t} = \int 1000\,\mathrm{e}^{0.02\,t}\,\mathrm{d}t = 1000\,\frac{\mathrm{e}^{0.02\,t}}{0.02} + C,\\
&\boxed{Q = c\,L + C\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}t}} & \Rightarrow \qquad & \boxed{Q = 50000 + C\,\mathrm{e}^{-0.02\,t}}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A protože je počáteční množství známo v (55), pro integrační konstantu C platí

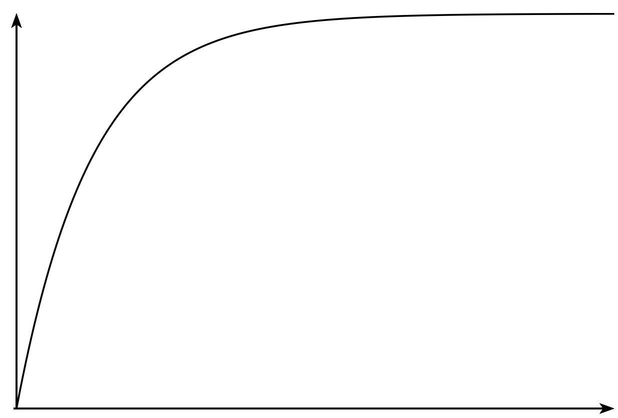
$$Q_0 = Q(t_0) = c\,L + C\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = Q(0) = 50000 + C\,\mathrm{e}^0,$$
$$C = (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 - 50000\,\mathrm{e}^{-0.02\,t},$$
$$\boxed{Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\,t}\right)}.$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Pro situaci v tomto příkladu je výsledné množství soli zobrazeno na následujícím obrázku.



Obrázek 8. Graf funkce $Q(t) = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\,t}\right)$ na intervalu $[0, 400]$.

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)}}_{\to 0}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000\left(1 - \underbrace{\mathrm{e}^{-0.02\,t}}_{\to 0}\right)$$
$$\boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}]} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]}.$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \qquad \text{neboli} \qquad Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). □

Příklad 141 (Míchání roztoku – pokračování). Jak se změní model v předchozím Příkladu 140, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Řešení. Všimněte si, že se nyní objem roztoku v nádrži mění (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže vytéká rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000+t} \quad [\text{g/l}] \;\cdot\; 19 \quad [\text{l/min}] \;=\; \frac{19\,Q(t)}{1000+t} \quad [\text{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000+t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (55). Příslušný integrační faktor je (nyní již pouze pro naše konkrétní hodnoty)

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{19}{1000+t}\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{19\,\ln(1000+t)} = \mathrm{e}^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} = 1000 \quad &\Rightarrow \quad Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} = 1000\,(1000+t)^{19} \\
&\Rightarrow \quad \left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' = 1000\,(1000+t)^{19} \\
&\Rightarrow \quad Q\,(1000+t)^{19} = \int 1000\,(1000+t)^{19}\,\mathrm{d}t = 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C \\
&\Rightarrow \quad Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} = \boxed{50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}}.
\end{aligned}$$

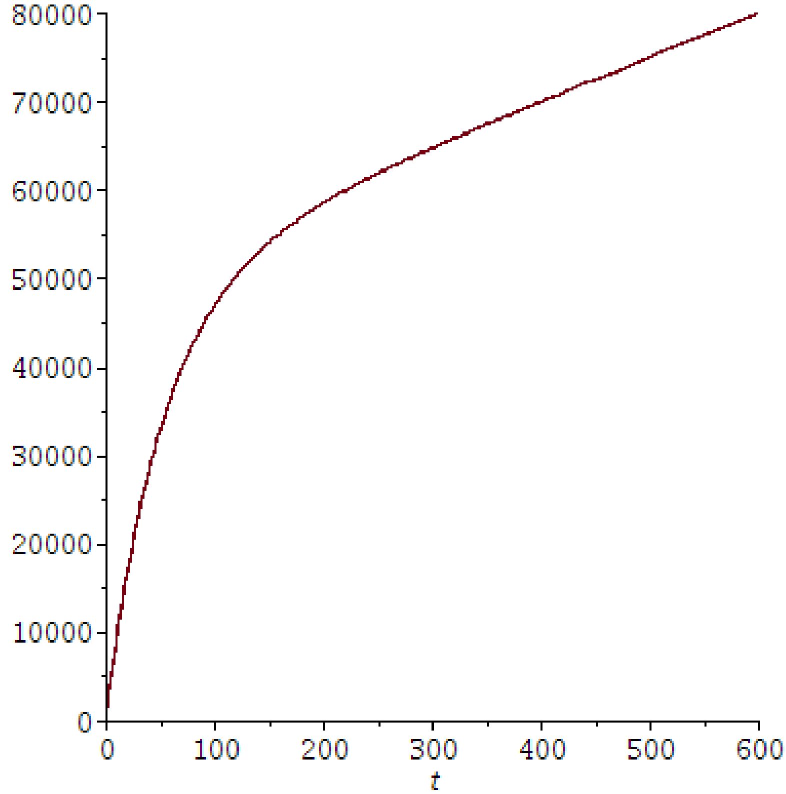
Z počáteční podmínky (55) pak určíme hodnotu C, tj.

$$0 = Q(0) = 50 \cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000 \cdot 1000^{19} = -5 \cdot 10^4 \cdot \left(10^3\right)^{19} = -5 \cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$\boxed{Q = 50\,(1000+t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000+t)^{19}}}$$

a jeho graf je zobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 9. Graf funkce $Q(t) = 50\,(1000+t) - \frac{5\cdot 10^{61}}{(1000+t)^{19}}$ na intervalu $[0, 600]$.

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5\cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad [\mathrm{g}] \text{ soli},$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad [\mathrm{g/l}],$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. □

3.6. **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu.** Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x),$$

kde funkce $a, b, c, f : I \to \mathbb{R}$ jsou koeficienty v této rovnici.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně – na celém intervalu spojitosti koeficientů rovnice – pomocí dvou počátečních podmínek

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1,$$

tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).

O těchto rovnicích existuje velké množství literatury, obvykle se studují zejména rovnice s konstantními koeficienty
$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(x),$$
které mají mnoho aplikací např. při modelování mechanického a elektromagnetického kmitání.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

Příklad 142. Vyřešte diferenciální rovnici
$$y'' + y = 0$$
pomocí nekonečných řad.

Řešení. Hledejme řešení této rovnice ve tvaru mocninné řady
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$
Potom podle pravidla pro derivaci mocninné řady (Věta 95) platí
$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)\,x^n,$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)\,x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\,x^n.$$
Dosazením do rovnice $y'' + y = 0$ dostáváme
$$0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\,x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n}_{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \big[a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n\big]\,x^n$$
Tedy poslední uvedená řada je mocninná řada pro konstantní funkci $s(x) \equiv 0$, a proto musí všechny její koeficienty být nulové, tj.
$$a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n = 0 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Odtud vychází rekurentní vztah pro jednotlivé koeficienty
$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)\,(n+1)} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Tedy jsou-li koeficienty a_0 a a_1 dány (všimněte si, že $a_0 = y(0)$ a $a_1 = y'(0)$, tj. tyto koeficienty jsou dány počátečními podmínkami ve středu hledané mocninné řady), potom je
$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2}, & a_3 &= -\frac{a_1}{3\cdot 2},\\
a_4 &= -\frac{a_2}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, & a_5 &= -\frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{a_1}{5!},\\
a_6 &= -\frac{a_4}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, & a_7 &= -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{a_1}{7!},\\
&\vdots & &\vdots\\
a_{2k} &= (-1)^k\,\frac{a_0}{(2k)!}, & a_{2k+1} &= (-1)^k\,\frac{a_1}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$
\begin{aligned}
y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n &= a_0 + a_1\, x - \frac{a_0}{2!}\, x^2 - \frac{a_1}{3!}\, x^3 + \frac{a_0}{4!}\, x^4 + \frac{a_1}{5!}\, x^5 - \frac{a_0}{6!}\, x^6 - \frac{a_1}{7!}\, x^7 + \cdots \\
&= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 - \frac{1}{6!}\, x^6 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} + \cdots \right\} \\
&\qquad + a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!}\, x^7 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \cdots \right\} \\
&= \boxed{a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \right\}}\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že hledané obecné řešení je lineární kombinací dvou funkcí (viz Příklad 216)

$$
\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} = \cos x, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = \sin x,
$$

přičemž uvedené mocninné řady konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (jejich poloměr konvergence je $R = \infty$). Neboli obecné řešení uvedené diferenciální rovnice je (položíme-li $C := a_0$ a $D := a_1$)

$$
\boxed{y = C\, \cos x + D\, \sin x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad C, D \in \mathbb{R}.
$$

(Ověřte si zderivováním, že tato funkce je skutečně řešením pro libovolné konstanty $C, D \in \mathbb{R}$.) $\square$

4. Diferenciální počet funkcí více proměnných

Diferenciální počet funkcí více proměnných je zobecněním předchozí teorie. Umožňuje studovat vlastnosti funkcí, které mají více než jeden vstup. V této kapitole si krátce ukážeme základní nástroje a některá jejích využití

4.1. **Základní pojmy, limita, spojitost.**

Definice 23. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ se nazývá (reálná) funkce n (reálných) proměnných a množina M je její definiční obor.

Příkladem funkcí více proměnných jsou

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2),\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\},\ f\colon M \to \mathbb{R}$
- $f(x,y,z) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{z},\ M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\},\ f\colon M \to \mathbb{R}$
- $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2^2 \cdots x_n^n,\ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Připomeňme značení $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \{x = [x_1,\dots,x_n]; x_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n\}$.

Pokud jde o limitu posloupnosti bodů z vícerozměrného prostoru, platí $x_n \xrightarrow{\rho_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_\infty} x \Leftrightarrow x_n$ konverguje k x po souřadnicích.

Definice 24. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n, f\colon M \to \mathbb{R}$, pak se množina

$$Gr(f) = \left\{[x_1,\dots,x_n,y] \in \mathbb{R}^{n+1}; [x_1,\dots,x_n] \in M, y = f(x_1,\dots,x_n)\right\}$$

nazývá graf funkce f.

Definice 25. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n, f\colon M \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, pak se množina

$$f_c = \{[x_1,\dots,x_n] \in M; f(x_1\dots,x_n) = c\}$$

nazývá vrstevnice funkce f (na úrovni c).

Definice 26. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2, f\colon M \to \mathbb{R}$, pak

- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{xy} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{xy}} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; f(x,y) = 0\right\},$$
- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{xz} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{xz}} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; f(x,0) = z\right\},$$
- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{yz} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{yz}} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; f(0,y) = z\right\}.$$

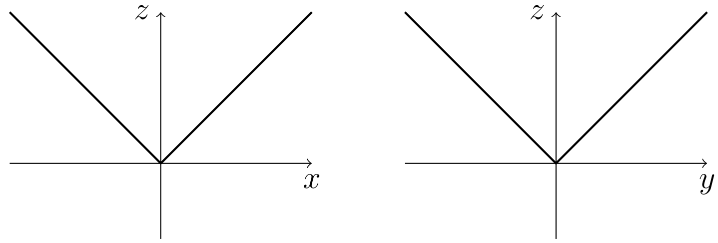
Poznámka 32. Vrstevnice a řezy spolu samozřejmě souvisejí.

- Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak $f_{\rho_{xy}} = f_0$ (řez rovniou ρ_{xy} je shodný s vrstevnicí na úrovni 0).
- Samozřejmě lze stejným způsobem definovat řez libovolnou rovinou.
- Pro funkce více než dvou proměnných lze podobně zavést definici řezu (souřadnými) nadrovinami apod.

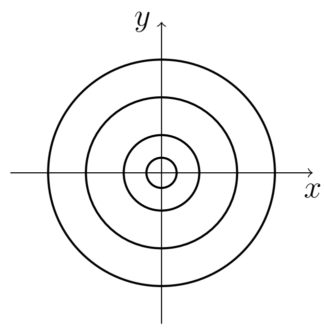
Příklad 143. Načrtněte graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

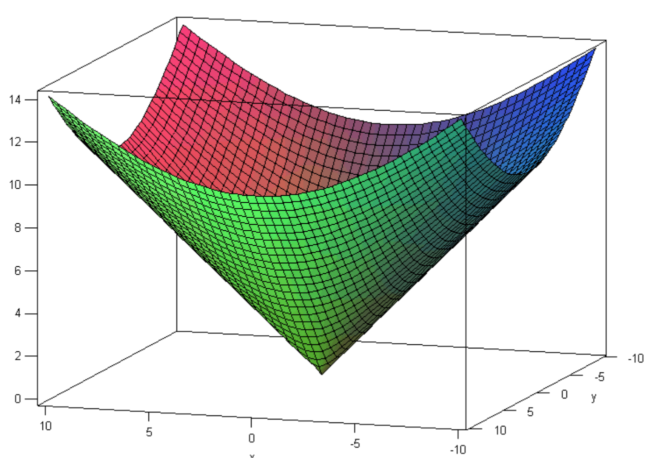
Nejprve si načrtneme řezy souřadnými rovinami a vrstevnice. Dostáváme $f_{\rho_{xz}} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2} = |x|$ a $f_{\rho_{yz}} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y|$, tedy řezy jsou



Vrstevnice jsou množiny $f_c = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}$ tedy pokládáme $z = c \Rightarrow c = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = c^2$, tj. pro $c < 0$ je $f_c = \emptyset$ a pro $c \geq 0$ se jedná o kružnice se středem v počátku a poloměrem c,



Celkem jsme zjistili, že grafem funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je rotační kužel postavený na špičce v počátku.



■

Limitu funkce zavádíme podobně jako u funkcí jedné proměnné. Využijeme-li definici pomocí okolí, znění zůstává prakticky stejné.

Definice 27. Nechť $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ je hromadný bod definičního oboru f. Řekneme, že funkce f má v bodě $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tj. pro $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]$ máme $\lim_{x \to x^*} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x = [x_1, \ldots, x_n] \neq x^* : |x_i - x_i^*| < \delta\ (i = 1, \ldots, n) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Definice 28. Nevlastní limitu definujeme jako

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = \infty[-\infty] \;\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}\; \exists \delta > 0\; \forall x \in \mathcal{O}(x^*, \delta) \smallsetminus \{x^*\} : f(x) > A\; [f(x) < A].$$

Příklad 144. Při výpočtu limity lze v principu postupovat podobně jako u funkcí jedné proměnné.

- $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} (x^2 + y^3) = 1 + 8 = 9$
- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2$
- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$

Značení se v literatuře různí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Příklad 145. Protože u funkcí více proměnných je mnohem více směrů, než jen limita zleva a limita zprava, může se „snadněji“ stát, že limita neexistuje.

- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2} = |y = kx| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}$
  limita neexistuje, protože závisí na směrnici přímky, po níž se blížíme k bodu $[0,0]$.

- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = |y = kx| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx}{x^4+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0,$
  ale pro paraboly máme
  $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = |y = kx^2| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k}$
  a limita proto neexistuje.

Při výpočtu musíme dbát na to, zda se jednotlivé proměnné blíží k dané hodnotě současně, nebo postupně. V $\mathbb{R}^2$ se pak jedná o dvojnou a dvojnásobnou limitu. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 27 se nazývá dvojná. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně. Limity

$$L_{xy} = \lim_{y\to y_0}\Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big) \quad \text{a} \quad L_{yx} = \lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big)$$

se nazývají dvojnásobné (popř. postupné). Potom pro L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ platí:

(i) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$, pak limita L *nemusí* existovat;
(ii) existuje-li limita L (i nevlastní), pak L_{xy} a L_{yx} *nemusí* existovat;
(iii) existuje-li L a některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, pak se obě *rovnají*;
(iv) existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$;
(v) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak limita L neexistuje.

Poznámka 33. Výpočet limity L pomocí postupných limit L_{xy}, L_{yx} je výhodné zejména tehdy, je-li předem známa existence L. Na druhou stranu část (v) udává další nutnou podmínku pro existenci limity L (pro neexistenci limity L stačí ukázat $L_{xy} \neq L_{yx}$).

Poznámka 34. Pro funkce více proměnných nemáme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.

Věta 39 (Transformace do polárních souřadnic)**.** *Limita* $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ *je rovna* L*, jestliže existuje funkce* $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *jedné proměnné s vlastností* $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *tak, že existuje* $r_0 > 0$ *takové, že pro každé* $r \in (0, r_0)$ *platí*

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r) \qquad \forall \varphi \in [0, 2\pi).$$

Příklad 146.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\varphi)^3+(r\sin\varphi)^3}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}_{\text{ohraničená funkce}} = 0$$

Poznámka 35. Podobně můžeme při výpočtu limity funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ využít transformaci do sférických souřadnic, tj.

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho\cos\vartheta,$$

kde

- $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. sférický poloměr),
- $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. azimutální úhel),
- $\vartheta \in [0, \pi]$ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. sférický úhel).

Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. Opačné tvrzení lze opět naformulovat jako větu.

Věta 40. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ a*

$$|f(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0 + \cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, pak platí

$$\lim_{[x,y,z]\to[x_0,y_0,z_0]} f(x, y) = L.$$

Definice 29. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}^n, x^* \in \overline{M}$. Potom $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (\mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}) \cap M:\ f(x) \in \mathcal{O}(L, \varepsilon).$$

Příklad 147. Z teorie funcí jedné proměnné známe jednostranné limity

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in[x_0,\infty)}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Definice 30. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x^* \in \mathbb{R}^n$.

- Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x^*, jestliže
$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*).$$
- Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je spojitá na M, je-li spojitá v každém bodě množiny M.
- Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ není otevřená, pak řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x^*, jestliže $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = f(x^*)$.

Poznámka 36. Vzhledem k rovnosti $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = \lim_{x\to x^*} f(x)$ pro vnitřní body x^* množiny M, tedy můžeme definovat, že funkce f je spojitá na $M \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $x^* \in M$ platí $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in M}} f(x) = f(x^*)$.

Pro funkce více proměnných platí analogie většiny základních vět o limitách (spojitosti) jako u funkce jedné proměnné, které lze odvodit (dokázat) přímo z definic.

Věta 41. *Nechť $\lim_{x\to x^*} f(x) = L_1, \lim_{x\to x^*} g(x) = L_2, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, potom*

- $\lim_{x\to x^*}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
- $\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
- $\lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *pokud* $L_2 \neq 0$.

Věta 42. $\lim_{x\to x^*} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$, *v němž je funkce* g *ohraničená, pak*

$$\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Věta 43 (Věta o třech limitách)**.** *Nechť pro funkce* $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *platí* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *v nějakém ryzím okolí bodu* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *a současně*

$$\lim_{x\to x^*} h(x) = \lim_{x\to x^*} g(x) = L.$$

Potom také

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = L.$$

Věta 44 (O limitě složeného zobrazení I)**.** *Nechť pro funkci* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *platí* $\lim_{x\to x^*} g(x) = L$ *a nechť funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá v bodě* L. *Potom*

$$\lim_{x\to x^*} f\left(g(x)\right) = f(L).$$

Věta 45 (O limitě složeného zobrazení II)**.** *Nechť funkce* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je definována v nějakém ryzím okolí bodu* x^*, *přičemž* $\lim_{x\to x^*} g(x) = L$ *a* $g(x) \neq L$ *pro* x *z nějakého ryzího okolí bodu* x^*. *Jestliže funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je definována v nějakém ryzím okolí bodu* L *a platí* $\lim_{x\to L} f(x) = M$, *potom*

$$\lim_{x\to x^*} f\left(g(x)\right) = M.$$

Věta 46 (Weierstrass)**.** *Nechť* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktní (tj. uzavřená a ohraničená) množina a* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M. *Pak*

a) f *je na* M *ohraničená, tedy* $f(M) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in M\}$ *je ohraničená množina v* $\mathbb{R}$, *tj.* $\exists K > 0 : |f(x)| < K\ \forall x \in M$.

b) *Je-li*

$$m_1 = \sup_{x\in M} f(x), \qquad m_2 = \inf_{x\in M} f(x),$$

pak existují $x_1, x_2 \in M$ *takové, že* $f(x_1) = m_1, f(x_2) = m_2$, *tj.* f *nabývá na* M *své největší a nejmenší hodnoty.*

Definice 31. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina (v libovolné metrice). Řekneme, že tato množina je souvislá, pokud pro všechna $x, y \in M$ existuje konečná posloupnost bodů $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y, x_i \in M$, taková, že lomená čára s vrcholy v bodech $x_0, \ldots, x_n$ je celá v M.

Věta 47 (Bolzano)**.** *Nechť* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená, souvislá množina a* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M,

a) *jsou-li* $x_1, x_2 \in M$ *takové, že* $f(x_1) \cdot f(x_2) \leq 0$, *pak existuje* $c \in M : f(c) = 0$,

b) *jsou-li* $x_1, x_2 \in M$ *libovolné a* $f(x_1) < f(x_2)$, *pak pro libovolné* $d \in (f(x_1), f(x_2))$ *existuje* $c \in M : f(c) = d$.

4.2. **Parciální derivace a diferenciál.** Pokud jde čistě o výpočet, parciální derivace znamená derivovat pouze podle jedné z proměnných a ostatní při výpočtu brát jako konstanty. Geometricky se jedná provedení řezu v daném souřadném směru, čímž vznikne funkce jedné proměnné a studujeme pak její rychlost změny. Např. u derivace podle x funkce dvou proměnných $f(x, y)$ se tedy jedná o směrnici křivky, která vznikne řezem grafu funkce rovinou $y = y^*$. V n-rozměrném prostoru „řežeme“ nadrovinou.

Definice 32. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě x^* parciální derivaci podle i-té proměnné x_i s hodnotou této limity.
Tuto derivaci značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*).$$

Pro $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tedy máme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_x(x, y) = f'_x(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = f_y(x, y) = f'_y(x, y)$.

Poznámka 37. Derivace vyšších řádů zavádíme tak, že uvažujeme o parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jako o funkci, kterou derivujeme. Samozřejmě tato funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ musí existovat. U funkce dvou proměnných $f(x, y)$ pak mluvíme např. o parciálních derivacích druhého řádu podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$

nebo o smíšených derivacích $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = (f_x)_y$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = (f_y)_x$.

Příklad 148. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot y^2 \cdot \sin(xy)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2(\mathrm{e}^x \sin xy + \mathrm{e}^x \cos xy \cdot y) = y^2 \mathrm{e}^x(\sin xy + y \cos xy),$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x(2y \cdot \sin xy + y^2 \cdot \cos xy \cdot x) = \mathrm{e}^x y(2 \sin xy + xy \cos xy).$$

Příklad 149. Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Poznámka 38. Pro funkce jedné proměnné plyne z existence derivace řada pěkných vlastností, např. spojitost, diferencovatelnost (lze sestrojit tečnu). Pro funkce více proměnných z existence parciálních derivací téměř nic pěkného neplyne, zejména z existence parciální derivace neplyne spojitost.

Příklad 150. Uvažujme funkci (vytrhneme osový kříž a posuneme ho o jedna nad rovinu xy)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} 1 & x = 0 \vee y = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, ale funkce f není spojitá v bodě $[0, 0]$.

Parciální derivace popisují vlastnosti pouze ve směrech os x a y.
Derivace lze samozřejmě počítat v libovolném směru.

Definice 33. Mějme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bod $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ a jednotkový vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f má v bodě x^* směrovou derivaci ve směru vektoru v, jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^* + v_1 h, \dots, x_n^* + v_n h) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x^* + vh) - f(x^*)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x^*) = f'(x^*, v).$$

Poznámka 39. Parciální derivace je speciálním případem směrové derivace s vektory $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'([x,y], e_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'([x,y], e_2).$$

Poznámka 40. Z existence směrových derivací $f'(x^*, v)$ v bodě x^* ve směru libovolného vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ neplyne spojitost v bodě x^*. Stále se k bodu x^* blížíme jen po přímkách, což nemusí stačit. Např. pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

lze přímým výpočtem ukázat, že $f'([0,0], v) = 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2$, ale limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, tedy f není spojitá v bodě $[0,0]$.

Věta 48 (Schwarzova věta)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité smíšené parciální derivace f_{xy}, f_{yx}. Pak platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Dalším použitím Schwarzovi věty (tedy indukcí) lze vidět, že za příslušných podmínek platí např.

$$f_{xyzxyzx}(x,y,z) = f_{xxxyyzz}(x,y,z) = f_{zzyyxxx}(x,y,z).$$

(Nezáleží na pořadí, jen na počtu.)

Pokusme se získat dostatečnou podmínku pro spojitost.

Poznámka 41. Diferenciál pro $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je člen $A \cdot h$ ze vztahu $f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h)$, kde $A \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$. Pro diferencovatelné funkce máme $A = f'(x_0)$.

Podmínku diferencovatelnosti lze psát jako (existenci $A \in \mathbb{R}$ splňujícího)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

Definice 34. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$, je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže existují $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - (Ah_1 + Bh_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

což je ekvivalentní existenci funkce $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = (Ah_1 + Bh_2) + \tau(h_1, h_2),$$

přičemž

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{\tau(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Geometrickým významem diferencovatelnosti je lineární aproximace tečnou rovinou. Rovnice roviny procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Označme $[x, y] := [x_0 + h_1, y_0 + h_2] \;\Rightarrow\; h_1 = x - x_0, h_2 = y - y_0$.
Pak místo $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = Ah_1 + Bh_2 + \tau(h_1, h_2)$ píšeme

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0),$$

tedy

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0),$$

což je rovnice roviny procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ plus „chyba“ τ (τ je rozdíl mezi přírůstkem na tečné rovině a přírůstkem funkce).

Definice 35. Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, výraz $Ah_1 + Bh_2$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h_1, h_2)$, tedy $\mathrm{d}f(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a je lineární.

Věta 49. *Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná, pak je v tomto bodě spojitá.*

Věta 50. *Je-li f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak v tomto bodě existují obě parciální derivace a platí $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A$ a $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$.*

Věta 51 (Postačující podmínka diferencovatelnosti)**.** *Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace f_x, f_y, pak je funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná.*

Poznámka 42. Rovina $z = Ax + By + C$ splňující

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

je tečnou rovinou grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Rovina daná rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

v případě diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ tento požadavek splňuje, jedná se tedy o tečnou rovinu grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Věta 52. *Nechť f je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ je jednotkový vektor. Pak má funkce f v $[x_0, y_0]$ směrovou derivaci ve směru vektoru u a platí $f'([x_0, y_0], u) = f_x(x_0, y_0) \cdot u_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot u_2$.*

Poznámka 43. Vektor prvních derivací nazýváme gradient. Je to vektor kolmý na vrstevnice, směřující k větším funkčním hodnotám. Např. pro funkci $f = f(x, y, z)$ je $\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$. Směrová derivace funkce f ve směru libovolného vektoru $v = (v_1, v_2, v_3)$ je tedy

$$\left\langle \nabla f, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Příklad 151. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2}$.

$$f(x^* + h) \approx f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(h)$$
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ [x_0, y_0] = [3, 4],\ h_1 = -0{,}02,\ h_2 = 0{,}05$$
$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ f_x(3, 4) = \frac{3}{5}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ f_y(3, 4) = \frac{4}{5}$$
$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{3}{5} \cdot (-0{,}02) + \frac{4}{5} \cdot (0{,}05) = \frac{0{,}14}{5}$$
$$\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2} \approx \sqrt{9 + 16} + \frac{0{,}14}{5} = 5 + \frac{0{,}28}{10} = 5{,}028$$

■

Příklad 152. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = x^3 + y^3$ v bodě $[1,1,2]$.

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = |\text{pro } [x,y] = [1,1]| = 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = |\text{pro } [x,y] = [1,1]| = 3$$

tedy $z - 2 = 3(x-1) + 3(y-1) \Rightarrow z = 3x + 3y - 4$ ■

4.3. **Kmenová funkce.** Připomeňme si koncept primitivní funkce pro funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což je funkce F taková, že $F' = f$.

Uvažujme funkce $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Existuje funkce $H = H(x,y)$ taková, že

$$H_x = P, \qquad H_y = Q,$$

neboli $\mathrm{d}H = P\mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y$?

Věta 53. *Nechť $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace P_y, Q_x a platí*

$$P_y = Q_x.$$

Pak existuje funkce $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že $H_x = P, H_y = Q$, tj.

$$\mathrm{d}H(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\ \mathrm{d}y.$$

Definice 36. Funkce H z věty 53 se nazývá kmenová funkce funkcí P a Q.

Příklad 153. Rozhodněte, zda ke dvojici funkcí

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \qquad Q(x,y) = 5 - 2xy$$

existuje kmenová funkce. Pokud existuje, tak ji určete.

Kmenová funkce H existuje, neboť $P_y = -2y = Q_x$.
Protože $H_x = P$, máme

$$H(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int (x^2 - y^2)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y).$$

Nyní využijeme znalosti $H_y = Q$ k určení $C(y)$, tj.

$$H_y = -2xy + C_y'(y) = Q = 5 - 2xy \ \Rightarrow\ C_y'(y) = 5 \ \Rightarrow\ C(y) = 5y + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Tedy $H(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Samozřejmě lze nejdříve využít Q a poté P, tj. $H(x,y) = \int Q(x,y)\ \mathrm{d}y$, kde potom $C = C(x)$. ■

Poznámka 44. Exaktní diferenciální rovnice Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}.$$

Přepsáním na

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}, \quad a(x,y)\mathrm{d}x - b(x,y)\ \mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}H(x,y) = 0$$

vidíme, že pokud platí $a_y(x,y) = -b_x(x,y)$, pak rovnici vyřešíme nalezením příslušné kmenové funkce H. Její řešení je pak dáno implicitně vztahem $H(x,y) = c$ a říkáme, že jde o exaktní diferenciální rovnici.

Poznámka 45. Kmenovou funkci zavádíme analogicky i pro funkce více než dvou proměnných. Uvažujme např. $P, Q, R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a hledejme funkci $H = H(x, y, z)$ splňující

$$\mathrm{d}H = P\mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y + R\ \mathrm{d}z, \qquad \text{tj.} \qquad H_x = P, H_y = Q, H_z = R.$$

Protože $H_{xy} = P_y, H_{yx} = Q_x, H_{zx} = R_x, H_{xz} = P_z, H_{yz} = Q_z, H_{zy} = R_y$, ověříme podmínky ve tvaru

$$P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$$

a postupujeme analogicky jako u funkcí dvou proměnných, pouze ve třech krocích místo dvou. První krok např.

$$H(x, y, z) = \int R(x, y, z)\ \mathrm{d}z, \qquad \text{kde potom} \qquad C = C(x, y).$$

4.4. **Parciální derivace složených funkcí.** Připomeňme situaci pro $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta 54. *Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak složená funkce*

$$F(x) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

má derivaci v bodě x_0 a platí, že

$$F'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Věta 55. *Nechť $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$. Pak má funkce $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a platí*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Poznámka 46. Pro $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ lze zkráceně psát např. $z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$, nebo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Příklad 154. Určete parciální derivace z_x a z_y funkce

$$z = \mathrm{e}^u \cdot \sin v, \qquad \text{kde} \qquad u = xy, \quad v = x - y.$$

$$\begin{aligned}
z_x &= z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = \mathrm{e}^u \cdot \sin v \cdot y + \mathrm{e}^u \cdot \cos v \cdot 1 = \mathrm{e}^{xy}[y \sin(x - y) + \cos(x - y)]\\
z_y &= z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = \mathrm{e}^u \cdot \sin v \cdot x + \mathrm{e}^u \cdot \cos v \cdot (-1) = \mathrm{e}^{xy}[x \sin(x - y) - \cos(x - y)]
\end{aligned}$$

■

Příklad 155. Zavedením nových proměnných $u = x + y, v = x - y$ najděte všechny diferencovatelné funkce $f(x, y)$, splňující vztah

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) = 0.$$

Hledáme funkci $f(x, y) = z = z(u(x, y), v(x, y))$, kde

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = z_u + z_v,\\
f_y(x, y) &= z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = z_u - z_v
\end{aligned}$$

splňují $0 = z_x + z_y = 2\, z_u$, tedy $z_u = 0$ a z je funkcí proměnné v (nezávisí na u). Můžeme tedy psát $z = g(v)$. Řešením je

$$f(x, y) = g(x - y),$$

kde g je libovolná diferencovatelná funkce. ■

Poznámka 47. Připomeňme, že pro funkce jedné proměnné máme

$$[f'(g(x)) \cdot g'(x)]' = f''(g(x)) \cdot g'^2(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x).$$

Věta 56. *Nechť $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají druhé parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v bodě $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$.*

Pak $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má druhé parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ a platí

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx}, \\ z_{xy} &= z_{uu}u_x u_y + z_{uv}u_x v_y + z_{vu}u_y v_x + z_{vv}v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} = z_{yx}, \\ z_{yy} &= z_{uu}u_y^2 + 2z_{uv}u_y v_y + z_{vv}v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}. \end{aligned}$$

(Ve vzorcích je $z = z(u_0, v_0)$, $u = u(x_0, y_0)$ a $v = v(x_0, y_0)$, totéž pro parciální derivace.)

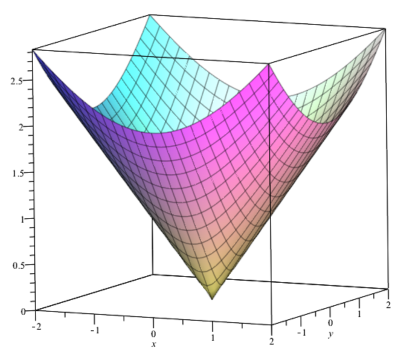
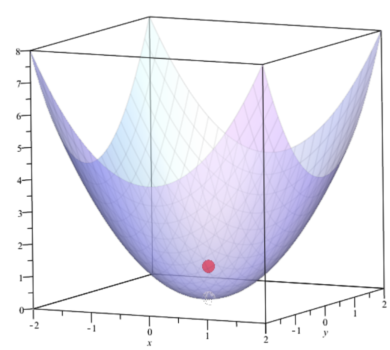
4.5. **Lokální extrémy.**

Definice 37. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Funkce f má v bodě x_0 lokální maximum právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
- Funkce f má v bodě x_0 lokální minimum právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
- Funkce f má v bodě x_0 lokální extrém, jestliže má v tomto bodě lokální maximum nebo minimum.
- Jsou-li nerovnosti ostré, mluvíme o ostrých lokálních extrémech.

Příklad 156.

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
  má v $[0, 0]$ lokální minimum, ale nemá tam parciální derivace
- $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & [x, y] \neq [0, 0] \\ 1 & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$
  má v $[0, 0]$ lokální maximum, ale není tam spojitá

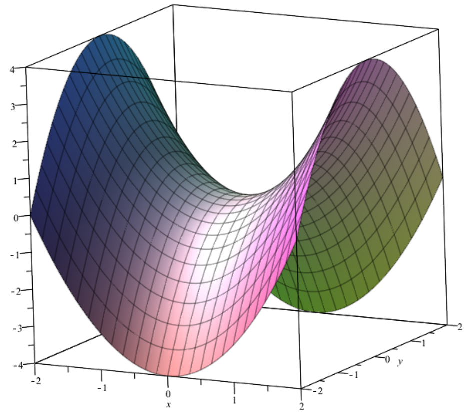



Definice 38. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Bod x_0 je stacionárním bodem funkce f, jestliže existují parciální derivace v x_0 a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Věta 57 (Fermatova věta, nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Jestliže má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existují v x_0 všechny její parciální derivace prvního řádu, pak je x_0 stacionární bod.*

Extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde neexistuje aspoň jedna parciální derivace. Ve stacionárním bodě extrém být ale nemusí.



$f(x,y) = x^2 - y^2$ má v $[0,0]$ typický sedlový bod

Věta 58. *Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a v jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a $[x_0, y_0]$ je stacionární bod.*

- *Jestliže*
$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0,$$
pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum, když $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, nebo maximum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- *Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak f nemá v $[x_0, y_0]$ lokální extrém.*

Příklad 157. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(1) Určíme stacionární body.
$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2$,
$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = y^2$.
Odtud $x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ (\to y = 0)$,
$x_2 = 1\ (\to y = 1), x_{3,4} \in \mathbb{C} \Rightarrow P_1 = [0,0], P_2 = [1,1]$.
(2) Spočítáme druhé derivace.
$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3$.
(3) Vyhodnotíme pomocí $D(x,y)$.
$D(x,y) = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 36xy - 9$, takže
$D(0,0) = -9 < 0 \ \Rightarrow\ [0,0]$ není extrém,
$D(1,1) = 27 > 0 \ \Rightarrow\ [1,1]$ je extrém a vzhledem k $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ jde o minimum.

■

Samozřejmě může nastat případ $D(x,y) = 0 \ldots$

Příklad 158. Určete extrémy funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

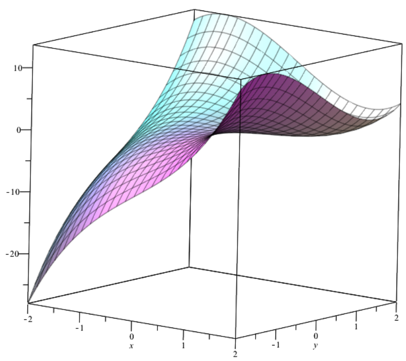
(1) $f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \ \Rightarrow$
$x^3 - y^3 = 0 \ \Leftrightarrow\ x^3 = y^3 \ \Leftrightarrow\ x = y$, pak
$4x^3 - 2x - 2x = 0 \ \Rightarrow\ x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \ \Rightarrow$
$P = [0,0], Q = [1,1], R = [-1,-1]$.
(2) $f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f_{xy} = -2$.
(3) $D(x,y) = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - (-2)^2$, tedy
$R : D(-1,-1) = 96 > 0,\ f_{xx}(-1,-1) = 10 > 0 \ \Rightarrow$ ostré lok. min.,
$Q : D(1,1) = 96 > 0, f_{xx}(1,1) = 10 > 0 \Rightarrow$ ostré lok. min.,
$P : D(0,0) = 0 \ \Rightarrow\ $ nelze použít větu 58.

Rozhodneme přímo podle chování funkce v okolí bodu $[0,0]$.

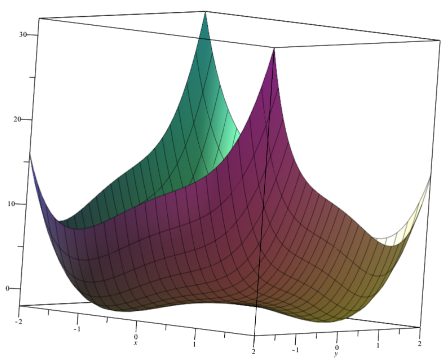
- Hodnota v bodě P je $f(0,0) = 0$.

- Jestliže $y = -x$, pak
$$f(x, y) = x^4 + x^4 - x^2 + 2x^2 - x^2 = 2x^4 > 0 \text{ pro } x \neq 0.$$
- Jestliže $y = 0$, pak
$$f(x, y) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0 \text{ pro } x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

V každém okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0])$ tedy existují body $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ takové, že
$$f(x_1, y_1) < f(0, 0) < f(x_2, y_2).$$
V bodě P tedy není extrém. ■



$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$



$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Definice 39. Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ je symetrická, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ je vektor a uvažujme kvadratickou formu
$$P(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j.$$

Pak $P(h)$ je

- pozitivně (negativně) semidefinitní, je-li
$$P(h) \geq 0 \; (P(h) \leq 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$
- pozitivně (negativně) definitní, je-li
$$P(h) > 0 \; (P(h) < 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$
- indefinitní, jestliže
$$\exists h, k \in \mathbb{R}^n : P(h) > 0 \wedge P(k) < 0.$$

Věta 59. *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce se spojitými parciálními derivacemi druhého řádu v bodě $x^* = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a nějakém jeho okolí. Nechť je navíc x^* stacionárním bodem (tj. parciální derivace prvního řádu jsou v něm rovny nule). Pak*

(1) *v x^* je ostré lokální minimum (maximum), jestliže $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ je pozitivně (negativně) definitní, kde* $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x^*) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)\right)_{i,j=1}^{n} =: f''(x^*)$;
(2) *v x^* není extrém, jestliže $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ je indefinitní;*
(3) *jestliže v x^* je extrém, pak $P(h)$ je pozitivně (negativně) semidefinitní.*

Matice A se nazývá Hessova matice (a značí se $\nabla^2 f$).

Věta 60 (Sylvesterovo kritérium, připomenutí)**.** *Uvažujme kvadratickou formu $P(h)=\langle Ah,h\rangle$ danou symetrickou maticí A.*

- *P je pozitivně (negativně) definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A kladná (záporná).*
- *P je pozitivně (negativně) semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná (nekladná).*
- *P je pozitivně definitní právě tehdy, když jsou všechny vedoucí hlavní minory matice A kladné.*
- *P je negativně definitní právě tehdy, když vedoucí hlavní minory matice A střídají znaménka počínaje záporným.*

Pro $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ jsou vedoucí hlavní minory determinanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \det A.$$

Často se místo o definitnosti formy P mluví o definitnosti matice A.

4.6. **Absolutní extrémy.**

Definice 40. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 absolutní minimum (maximum) v M, jestliže

$$f(x_0) \le f(x) \quad (f(x_0) \ge f(x)) \quad \forall x \in M.$$

Jestliže platí ostré nerovnosti, mluvíme o ostrých absolutních extrémech pro $\forall x \in M, x \neq x_0$. Také se používá název globální extrémy.

Věta 61. *Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní podmnožině M svého definičního oboru. Pak f nabývá svého absolutního minima i maxima na M buď v bodech lokálních extrémů v M nebo na hranici M.*

Příklad 159. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y)=xy-x^2-y^2+x+y$ na množině $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0, y\le 4-x\}$.

Lokální extrémy

$$f_x = y-2x+1=0, \quad f_y = x-2y+1=0$$

$$\Rightarrow\ y=2x-1 \ \Rightarrow\ x-2(2x-1)+1=0 \ \Rightarrow\ x=1 \ \Rightarrow\ y=1 \ \Rightarrow\ [1,1]$$

$$D(x,y)=(-2)(-2)-1^2=3>0, \quad f_{xx}=-2<0$$

$\Rightarrow$ V bodě $\underline{A=[1,1]}$ je lokální maximum s hodnotou $f(1,1)=1$.

Hranice

(1) $x=0, y\in[0,4] \ \Rightarrow\ f(x,y)=f(0,y)=-y^2+y=u(y)$, hledáme tedy extrémy funkce jedné proměnné $u(y), y\in[0,4]$. $u'(y)=-2y+1=0 \ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}, u''(y)=-2<0 \ \Rightarrow$ lok. max. s hodnotou $u(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ a krajní body $u(0)=0, u(4)=-12$.
Máme tedy body $\underline{B=[0,\frac{1}{2}], C=[0,0], D=[0,4]}$.

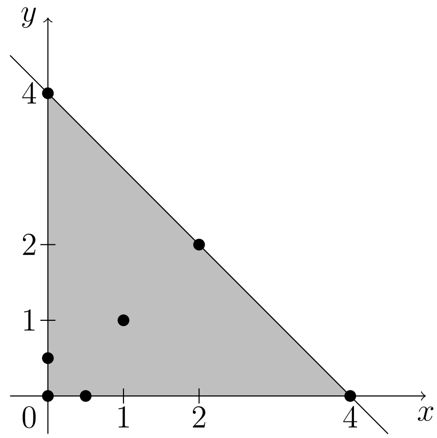
(2) $y=0, x\in[0,4] \ \Rightarrow\ f(x,y)=f(x,0)=-x^2+x=v(x)$, $v'(x)=-2x+1=0 \ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}, u''(x)=-2<0 \ \Rightarrow$ lok. max. s hodnotou $v(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ a krajní body $v(0)=0, v(4)=-12$.
Máme tedy body $\underline{E=[\frac{1}{2},0], F=C=[0,0], G=[4,0]}$.

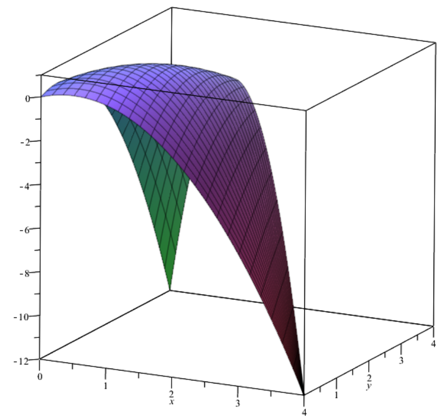
(3) $y=4-x, x\in[0,4] \Rightarrow f(x,y)=f(x,4-x)=-3x^2+12x-12=\varphi(x)$, $\varphi'(x)=-6x-12=0 \ \Rightarrow\ x=2, \varphi''(x)=-6<0 \ \Rightarrow$ lok. max. s hodnotou $\varphi(2)=0$ a krajní body $\varphi(0)=-12, \varphi(4)=-12$. Máme tedy body $\underline{H=[2,2], I=D=[0,4], J=G=[4,0]}$.

Porovnání hodnot v jednotlivých bodech:

$\hookrightarrow$ Absolutní minimum $f(x, y) = -12$ v bodech $[0, 4], [4, 0]$.

$\hookrightarrow$ Absolutní maximum $f(x, y) = 1$ v bodě $[1, 1]$.





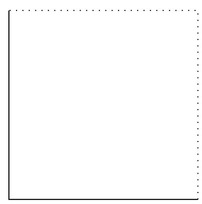
∎

5. Integrální počet funkcí více proměnných

Podobně jako diferenciální počet lze i integrální počet zobecnit pro funkce více proměnných a tím pracovat s vyšším počtem nazávislých vstupních proměnných a tedy ve vyšších dimenzích. V následující kapitole si ukážeme základní možnosti a využití této teorie.

V textu bude používán pojem měřitelná množina. Měřitelnost je v zásadě možnost změřit plochu (objem) dané množiny a jedná se o rozsáhlou teorii. Nám bude stačit představa, že omezená množina je měřitelná vždy, když má její hranice míru nula. Například tedy vnitřek kružnice v $\mathbb{R}^2$ je jistě měřitelná množina, neboť její hranice je kružnice, která v $\mathbb{R}^2$ nemá žádnou plochu. Formálně je míra množinovou funkcí (vstup je funkce, výstup číslo, tedy např. píšeme $m(A) = 2$), která přiřazuje prázdné množině nulu, všem ostatním množinám nezáporné reálné číslo a máme-li sadu po dvou disjunktních množin, pak je možné míru jejich sjednocení získat sečtením měr jednotlivých množin (tzv. aditivita, pokud to funguje i pro nekonečně, ale spočetně mnoho, množin, jedná se o tzv. σ-aditivitu). Přirozeně tedy v $\mathbb{R}^2$ začneme tím, že požadujeme, aby byla jednotkovému čtverci přiřazena jednička, jeho čtvtině $1/4$ atd. a těmito „miničtverečky“ pak vyplňujeme libovolné obrazce k získání jejich míry. Celý postup, stejně jako další možnosti výstavby měr, vlastnosti a detaily jsou pak náplní tzv. teorie míry.

5.1. **Konstrukce Riemannova integrálu.** Konstrukci a vlastnosti si pro přehlednost předvedeme v $\mathbb{R}^2$. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná, omezená množina a $f \colon A \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na A. Síť řádu n vytvoří tzv. pokrytí řádu n množiny A. Čtverce



s touto dohodou jsou navzájem disjunktní množiny. Položíme $A = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$, kde množiny D_j jsou tvaru $D_j^n = A \cap C_j^n$, kde C_j^n je nějaký čtverec sítě řádu n.

Systém $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$ se nazývá pokrytí řádu n množiny A. Každá z množin D_j^n je měřitelná, neboť je průnikem měřitelných množin.

Poznámka 48. Obecně v $\mathbb{R}^k$ používáme tzv. krychlové množiny řádu n

$$C^n_{j_1,\dots,j_k} = \left\{ [x_1, \dots, x_k] \in \mathbb{R}^k : \frac{i_1}{2^n} \le x_1 < \frac{i_1+1}{2^n}, \dots, \frac{i_k}{2^n} \le x_k < \frac{i_k+1}{2^n} \right\},$$

což jsou (neuzavřené) po dvou disjunktní měřitelné množiny pokrývající $\mathbb{R}^k$ s mírou $m(C^n) = 2^{-kn}$.

Nechť

$$M_j = \sup_{[x,y]\in D_j^n} f(x,y), \quad m_j = \inf_{[x,y]\in D_j^n} f(x,y),$$

pak definujeme

$$S_n(f,A) = \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot m(D_j^n), \quad s_n(f,A) = \sum_{j=1}^{m} m_j \cdot m(D_j^n)$$

horní a dolní součet řádu n a platí

$$S_{n+1}(f,A) \le S_n(f,A), \quad s_{n+1}(f,A) \ge s_n(f,A),$$

tj. posloupnost $\{S_n(f,A)\}$ je nerostoucí a zdola ohraničená a posloupnost $\{s_n(f,A)\}$ je neklesající a shora ohraničená, pak existují

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,A) =: \overline{\iint}_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \quad \lim_{n\to\infty} s_n(f,A) =: \underline{\iint}_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

horní a dolní Riemannův integrál funkce f na množině A.

Definice 41. Pokud se horní Riemannův integrál rovná dolnímu, tj.

$$\overline{\iint}_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \underline{\iint}_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

řekneme, že funkce f je na A riemannovsky integrovatelná a definujeme

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \overline{\iint}_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \underline{\iint}_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Poznámka 49. Pro $n = 1$ lze použít libovolné dělení D, popř. se omezit na dyadické dělení $D^{[2]}$ (dyadická čísla $\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}$). Samozřejmě platí $D \supset D^{[2]}$, tedy

$$\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq [2]\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \overline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq [2]\overline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

odkud ihned plyne, že $[2]\underline{\int} \leq \underline{\int} \leq \overline{\int} \leq [2]\overline{\int}$. Tento vztah musí platit i naopak, jinak by šlo o jinou konstrukci.

Např. víme, že platí: *Je-li D_n nulová posloupnost dělení, pak*

$$\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n).$$

Věta 62. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná a omezená množina, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Jsou-li f, g integrovatelné na A, pak jsou na A integrovatelné i funkce $f \pm g$ a platí*

$$\iint_A f(x,y) \pm g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \pm \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Dále, pro $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné je integrovatelná i funkce $\alpha \cdot f$ a platí

$$\iint_A \alpha \cdot f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \alpha \cdot \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Věta 63. *Nechť f je integrovatelná na omezené meřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a $B \subseteq A$ je měřitelná množina. Pak funkce f je integrovatelná i na B.*

Věta 64. *Nechť f je integrovatelná na měřitelných, omezených a disjunktních množinách $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je f integrovatelná i na $A \cup B$ a platí*

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Věta 65. *Nechť funkce f je omezená na A a $m(A) = 0$. Pak je f na A integrovatelná a platí*

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0.$$

Důsledek 10. *Nechť A, B jsou měřitelné množiny a platí $m(A\cap B) = 0$. Je-li funkce f integrovatelná na A i na B, pak je integrovatelná i na $A \cup B$ a platí*

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Věta 66. *Nechť je funkce f spojitá a omezená na omezené měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je funkce f na množině A integrovatelná.*

Snadno pro integrál v $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^k$) dostaneme i další tvrzení známá z $\mathbb{R}^1$.

Věta 67. *Nechť jsou funkce f, g integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a platí $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in A$. Pak*

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \leq \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Věta 68. *Nechť je funkce f integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je funkce i funkce $|f|$ na množině A integrovatelná a platí*

$$\left|\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right| \leq \iint_A |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Definice 42. Řekneme, že funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ má skoro všude na množině A vlastnost V, jestliže existuje množina B taková, že $B \subseteq A, m(B) = 0$ a funkce f má vlastnost V ve všech bodech množiny $A \setminus B$.
(Tj. vlastnost není splněna na množině míry nula, přičemž $m(\emptyset) = 0$.)

Věta 69. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená měřitelná množina a $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, kde f je na A integrovatelná a g je na A omezená. Pokud platí $f(x,y) = g(x,y)$ skoro všude na A, pak je na A funkce g integrovatelná a*

$$\iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Věta 70. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená a měřitelná množina a nechť $f\colon A \to \mathbb{R}$ je omezená a skoro všude spojitá na A. Pak je funkce f na A integrovatelná.*

6. Výpočet Riemannova integrálu

6.1. **Základní postup.**

- $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ... dvojný integrál
- $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$ ... dvojnásobný integrál

Věta 71. *Nechť $A = [a,b] \times [c,d]$ je obdélník v $\mathbb{R}^2$ a funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ je na množině A spojitá. Pak*

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Věta 72 (Fubiniho věta)**.** *Nechť f je spojitá na množině*

$$A = \{[x,y] : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

kde $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité na intervalu $[a,b]$. Pak

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Podobně pro

$$A = \{[x,y] : y \in [c,d], g(y) \le x \le h(y)\}, \quad g, h \in C[c,d],$$

platí

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Poznámka 50. Je-li ve větě o integraci přes obdélník funkce f pouze integrovatelná, platí

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\underline{\int_c^d} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\overline{\int_c^d} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

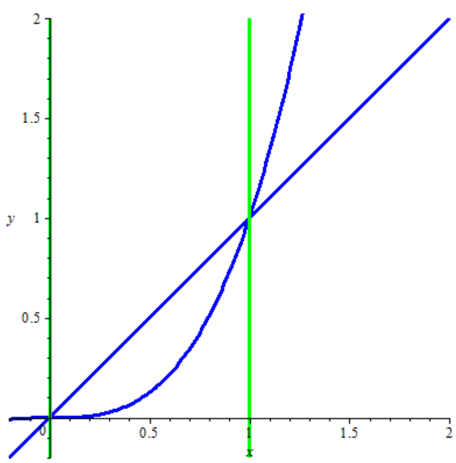
Pokud označíme

$$F(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\ \mathrm{d}y, \qquad G(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\ \mathrm{d}y,$$

může nastat případ, kdy $F(x) < G(x)$ v jistých bodech $x \in [a,b]$, ale množina těchto bodů má míru rovnu nule, tedy

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b G(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad 160. Vypočtěte $\iint_A x^3y\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, kde $A = \{[x,y] : 0 \le x \le 1, x^3 \le y \le x\}$.



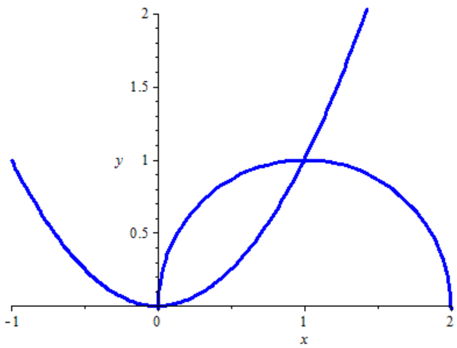
$$\begin{aligned}
\iint_A x^3y\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{x^3}^x x^3y\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(x^2 - x^6)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 - x^9\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{10}}{10}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_A x^3y\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} x^3y\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_0^1 y \left[\frac{x^4}{4}\right]_y^{\sqrt[3]{y}} \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^1 y(y^{4/3} - y^4)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 y^{7/3} - y^5\ \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{10}y^{10/3} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Příklad 161. Zaměňte pořadí integrace $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

Vybereme odpovídající horní, resp. dolní kousky, tedy

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$



$$y = \sqrt{2x - x^2}$$
$$y^2 = 2x - x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$
$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$$
$$y = x^2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y}$$

Poznámka 51. Samozřejmě platí

$$\boxed{m(A) = \iint_A 1\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}.$$

Příklad 162. Vypočítejte míru množiny $A = \{[x,y] : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} [y]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t \\ 0 = \sin 0, 1 = \sin \pi/2 \end{array} \right| = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos 2t\ \mathrm{d}t}_{=0} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Věta 73. *Uvažujme reálný interval $[a,b]$. Nechť*

$$A = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), G(x,y) \leq z \leq H(x,y)\big\},$$

kde funkce $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou na $[a,b]$ spojité a funkce $G, H\colon B \to \mathbb{R}$ jsou spojité na množině

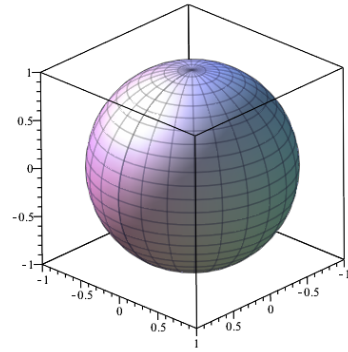
$$B = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\big\}.$$

Pak, je-li $f\colon A \to \mathbb{R}$ spojitá na A, platí

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

Příklad 163. Vypočítejte $\iiint_A \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, kde

$$A = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$
$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\Big\}.$$



$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1-x^2}\sin t,\ \mathrm{d}y = \sqrt{1-x^2}\cos t\ \mathrm{d}t \\ y = -\sqrt{1-x^2} \to t = -\pi/2, y = \sqrt{1-x^2} \to t = \pi/2 \end{array} \right|$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(1-x^2)-(1-x^2)\sin^2 t}\sqrt{1-x^2}\cos t\ \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\pi\mathrm{d}x = 2\pi\int_{0}^{1}1-x^2\mathrm{d}x = 2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

Poznámka 52. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je n-rozměrný kvádr. Je-li f spojitá na A, pak

$$\int_A f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1.$$

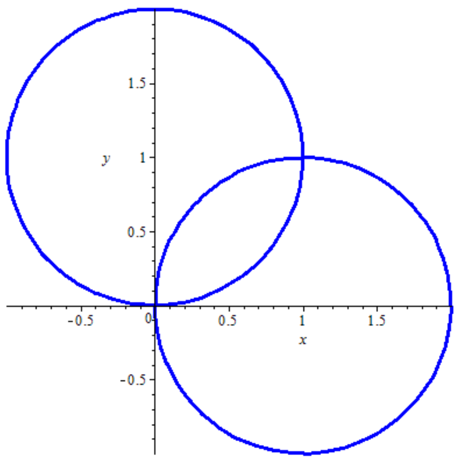
Příklad 164. $\iiiint_A \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$, kde $A = \{[x_1,x_2,x_3,x_4] : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1-x_1], x_3 \in [0,1-x_1-x_2], x_4 \in [0,1-x_1-x_2-x_3]\}$.

Takové množině A se říká jednotkový simplex, používá se k triangulaci n-rozměrných těles a v optimalizaci („n-rozměrný trojúhelník“).

$\int_0^1\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2}\int_0^{1-x_1-x_2-x_3}\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^1\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2}(1-x_1-x_2-x_3)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$
$= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\left[(1-x_1-x_2)x_3 - \frac{x_3^2}{2}\right]_0^{1-x_1-x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^1\int_0^{1-x_1}(1-x_1-x_2)^2 - \frac{1}{2}(1-x_1-x_2)^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$
$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x_1}(1-x_1-x_2)^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{(1-x_1-x_2)^3}{3}\right]_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{3}(1-x_1)^3\mathrm{d}x_1$
$= -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}[(1-x_1)^4]_0^1 = \frac{1}{4!}$

Příklad 165. Vypočtěte plochu obrazce daného nerovnostmi

$$x^2-2x+y^2 \le 0, \qquad x^2-2y+y^2 \le 0.$$



$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$
$$x = 1 - \sqrt{1-y^2},\ y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$x^2 - 2y + y^2 \leq 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$
$$x = \sqrt{2y - y^2},\ y = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

$$\iint_A \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} - 1 + \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 2}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x = |x - 1 = t, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t| = \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$$
$$= |\text{ sudá funkce }| = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- Střední hodnota:
$$\mathrm{av}(f) = \frac{\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m(A)}.$$
- Uvažujme $\iint_A F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota v bodě $[x,y]$ a $\rho(x,y)$ vzdálenost bodu $[x,y]$ od osy otáčení o, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	Obsah množiny A (S)
$\sigma(x,y)$	hmotnost množiny A (m)
$y\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)
$\rho^2(x,y)\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose o (J_o)
y^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose x (I_x)
x^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose y (I_y)
$\rho^2(x,y)$	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose o (I_o)

- Souřadnice těžiště průřezu $[x_T, y_T]$ ($\sigma(x,y) = 1$):
$$x_T = \frac{\iint_A x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}, \qquad y_t = \frac{\iint_A y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}.$$

6.2. **Transformace dvojného a trojného integrálu.**

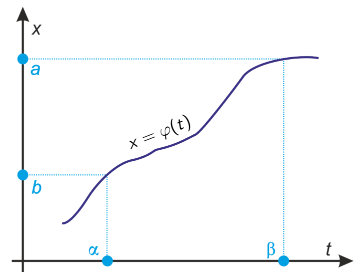
$\boxed{n=1}$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = |x=\varphi(t), \mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t,$$

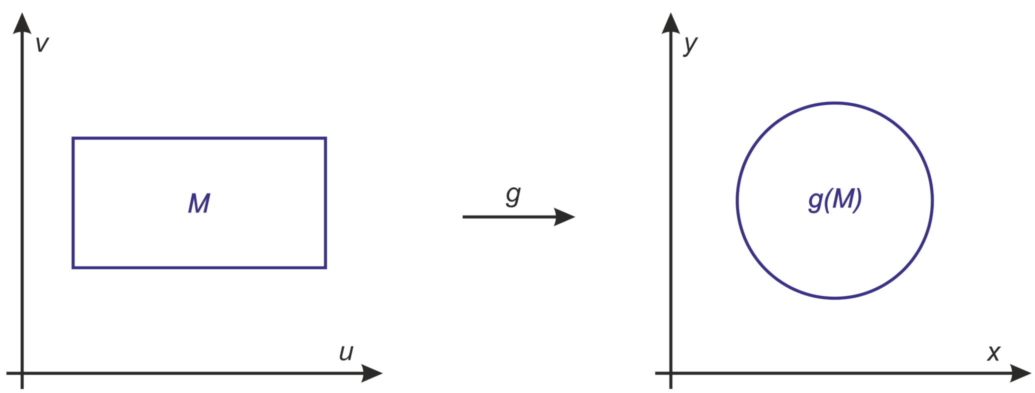
kde $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$. Také lze psát jako

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t,$$

kde $g' \neq 0$ (g je prostá).



$\boxed{n=2}$ Zobrazení $g\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, $x=x(u,v), y=y(u,v)$.



Věta 74 (O transformaci)**.** *Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^2$ je otevřená množina v rovině (u,v), g je prosté zobrazení množiny M do roviny (x,y) dané funkcemi $x=x(u,v), y=y(u,v)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť funkce*

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je různá od nuly a ohraničená na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné množiny a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\iint_{g(M)} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_M f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |J(u,v)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v.$$

<u>Transformace v $\mathbb{E}^2$</u> do polárních souřadnic je dána

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$

kde $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr) a $\varphi \in [0,2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu.

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \rho\neq 0$$

Příklad 166. Vypočítejte obsah množiny

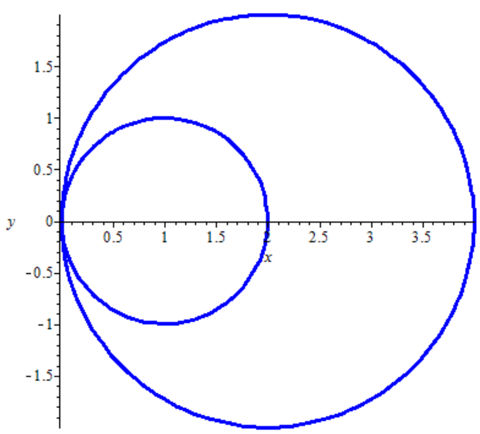
$$M : x^2+y^2\leq 2x, y\geq 0.$$

$$x^2+y^2\leq 2x \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+y^2\leq 1,$$

$$m(M)=\int_M \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\left|\begin{array}{lll} x=\rho\cos\varphi & \rho\in(0,2\cos\varphi] & J(\rho,\varphi)=\rho\neq 0\\ y=\rho\sin\varphi & \varphi\in[0,\pi/2] & \end{array}\right|$$
$$=\iint_D \rho\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\rho=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi}\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{4\cos^2\varphi}{2}\ \mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\ \mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}$$

Příklad 167. Vypočítejte obsah množiny

$$M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2-1\geq 0, (x-2)^2+y^2-4\leq 0\}.$$



$$\varphi\in[0,\pi/2],$$
$$\rho\in[2\cos\varphi,4\cos\varphi]$$
$$m(M)=\iint_M \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=2\iint_D \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^{\pi/2}[\rho^2]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}=\cdots=3\pi$$

Poznámka 53. Obsah obrazce v polárních souřadnicích

a) $n=1, P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$ (aproximace kruhovou výsečí),

b) $n=2$, pomocí dvojného integrálu snadno odvodíme

$$P=\iint_M \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\iint_D \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)}\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\rho(\varphi)}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka 54. Volba transformace pro $n=1$ byla dána funkcí, pro $n=2,3,\dots$ je dána tvarem množiny, přes kterou integrujeme.

Věta 75 (O transformace trojného integrálu)**.** *Nechť $M\subseteq\mathbb{E}^3$ je otevřená množina v prostoru (u,v,w), g je prosté zobrazení na M do prostoru (x,y,z) dané funkcemi $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť $J(u,v,w)\neq 0$ je ohraničené na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí*

$$\iiint_{g(M)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z=\iiint_M f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|J(u,v,w)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w.$$

<u>Transformace v $\mathbb{E}^3$</u>

- válcové (cylindrické) souřadnice
$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z, \qquad J(\rho,\varphi,z) = \rho,$$
kde $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost od osy x (poloměr válce) a $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu v rovině rovnoběžné s rovinou xy.
- sférické (kulové) souřadnice
$$x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z = \rho\cos\vartheta, \quad J(\rho,\varphi,\vartheta) = -\rho^2\sin\vartheta$$
kde $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr koule), $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v projekci do roviny xy (rovina $z = 0$) a $\vartheta \in [0,\pi]$ je odchylka od kladné poloosy z.

Transformace v $\mathbb{E}^n$ do hypersférických souřadnic
$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \rho\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \rho\cos\vartheta_{n-3}\sin\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho\cos\vartheta_{n-2},
\end{aligned}$$
kde $\rho \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) a $\vartheta_i \in [0,\pi], i = 1,\ldots,n-2$.
$$J(\rho,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2}) = (-1)^n\rho^{n-1}\sin\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\cdots\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho^2$$

Poznámka 55.
- $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost od počátku,
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_1x_2\ldots x_{n-1}$ (rovina $x_n = 0$) od kladné poloosy x_1,
- $\vartheta_{n-2} \in [0,\pi]$ je odchylka průvodiče daného bodu od kladné poloosy x_n,
- $\vartheta_{n-3} \in [0,\pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ od kladné poloosy x_{n-1},
- $\vartheta_{n-4} \in [0,\pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ promítnuté do roviny x_{n-1} od kladné poloosy x_{n-2},
- ....

Poznámka 56.
- Samozřejmě existuje celá řada dalších často používaných transformací (např. zobecněné sférické pro elipsoidy) a snadno lze dle tvaru množiny vytvořit transformaci „na míru“.
- Uvedené vzorce pro transformace nejsou jediné možné, (hyper)sférické souřadnice (a tedy i polární) lze použít i např. takto
$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cdots\cos\vartheta_{n-3}\cos\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \rho\sin\varphi\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cdots\cos\vartheta_{n-3}\cos\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \rho\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\cdots\cos\vartheta_{n-3}\cos\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \rho\sin\vartheta_{n-3}\cos\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho\sin\vartheta_{n-2},
\end{aligned}$$

kde $J(\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = \rho^{n-1} \cos\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2 \cdots \cos^{n-2}\vartheta_{n-2}$.

6.3. Nevlastní vícerozměrné integrály.

6.3.1. *Nevlastní integrál z neohraničené funkce.* Uvažujme funkci f definovanou na neprázdné množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definice 43. Bod $A \in \overline{\Omega}$ se nazývá singulární bod funkce f, jestliže f není ohraničená na žádné množině tvaru $\Omega \cap \mathcal{O}(A)$, kde $\mathcal{O}(A)$ je libovolné kruhové okolí bodu A.

Protože bod A nemůže být izolovaným bodem množiny Ω, jsou možné dva případy. Buď je A vnitřním bodem množiny Ω, nebo je jejím hromadným hraničním bodem; v druhém případě nemusí A ležet v množině Ω.

Definice 44. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}, M_n \subseteq \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$, se smršťuje k bodu A, jestliže

(1) Bod A je vnitřním bodem každé z množin M_n.
(2) Platí $\lim_{n\to\infty} d(M_n) = 0$.

- Číslo $d(M) = \sup\{\rho(X, Y) : X, Y \in M\}$ je průměr množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$, přitom ρ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$.
- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotonní vzhledem k inkluzi.

Předpoklad 1. Funkce f je integrovatelná na každé množině $\Omega \smallsetminus M$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná měřitelná množina obsahující A ve svém vnitřku. (Z tohoto předpokladu plyne, že množina Ω je měřitelná.)

Definice 45. Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Řekneme, že nevlastní integrál z funkce f konverguje na množině Ω, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega \smallsetminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťujících se k bodu A. Pak píšeme

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω diverguje.

Lemma 1. *Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nechť posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ se smršťuje k bodu $A \in \overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega \smallsetminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka 57. Pokud tedy použijeme postup pro nevlastní integrál na vlastní integrál, dostaneme správný výsledek.

Věta 76. *Nechť funkce f, g jsou definované na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrály*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\Omega} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergují a α, β jsou libovolné konstanty, pak konverguje také integrál $\iint_\Omega \left[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (pokud je vůbec nevlastní) a platí

$$\iint_\Omega \left[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{56}$$

Věta 77. *Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Pak je nevlastní integrál*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťující se k bodu A taková, že číselná posloupnost mající členy

$$\iint_{\Omega \smallsetminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N},$$

je ohraničená.

Důsledek 11. *Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \smallsetminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Buď $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost kruhů se středy v bodě A a poloměry r_n, přičemž posloupnost $\{r_n\}$ je klesající a $r_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Pak je intergál*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergentní právě tehdy, když je posloupnost

$$\iint_{\Omega \smallsetminus K_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N}$$

ohraničená.

Příklad 168. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina, $A = [x_0, y_0]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$$

konverguje pro $0 < \alpha < 2$ a diverguje $\alpha \geq 2$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Bod A je pro $\alpha > 0$ zřejmě singulárním bodem integrandu $1/r^\alpha$, protože $1/r^\alpha \to \infty$ pro $[x,y] \to [x_0, y_0]$.

Díky aditivitě vlastního integrálu vzhledem k integračnímu oboru, lze množinu M při vyšetřování konvergence nahradit kruhem K se středem A o dostatečně malém poloměru $R > 0$. (Může se tak změnit hodnota, ale nikoli konvergence/divergence.)

Označme K_n kruh se středem v A a poloměrem $1/n, n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{K_n\}$ se smršťuje k singulárnímu bodu A a pro každé $n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor 1/R \rfloor + 1$, je $K_n \subset K$. Vypočítáme integrály

$$\iint_{K \smallsetminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Protože množina $K \smallsetminus K_n$ je mezikruží se středem v bodě A s poloměry $1/n$ a R, použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0).

Tedy $x = x_0 + \rho\cos\varphi, y = y_0 + \rho\sin\varphi, J = \rho$. Množina $K \setminus K_n$ je obrazem obdélníku $L_n = [1/n, R] \times [0, 2\pi]$. Vyjde

$$\iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint_{L_n} \frac{\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{1/n}^R \rho^{1-\alpha}\ \mathrm{d}\rho$$

$$= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{1/n}^R = \frac{2\pi}{2-\alpha}(R^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln\rho]_{1/n}^R = 2\pi(\ln R + \ln n) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$

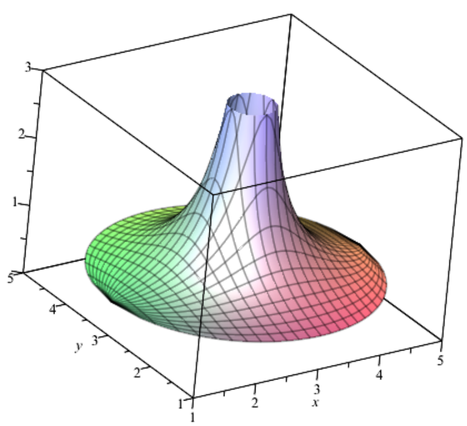
Odtud je vidět, že pro $0 < \alpha < 2$ je

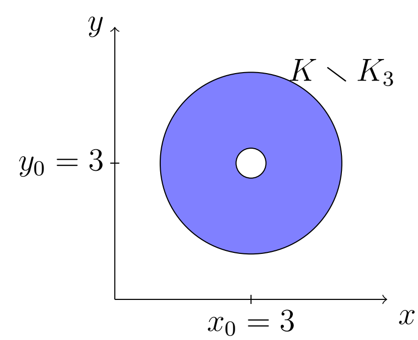
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

a pro $\alpha \geq 2$ je

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \infty.$$

Protože integrand je kladná funkce, podle Důsledku 11 integrál konverguje právě pro $0 < \alpha < 2$. Na obrázcích je horní a dolní hranice tělesa omezeného shora grafem funkce $1/r^\alpha$ a zdola rovinou $z = 0$ na mezikruží $K \setminus K_3$ pro $\alpha = 1, x_0 = y_0 = 3$ a $R = 2$.





Poznámka 58. Analogicky lze dokázat zobecnění výsledku z předchozího příkladu.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $A = [y_1, \ldots, y_n]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Pak nevlastní integrál $\int \cdots \int_M \frac{1}{r^\alpha}\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ konverguje pro $0 < \alpha < n$ a diverguje pro $\alpha \geq n$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Při výpočtu použijeme sférické souřadnice. Je-li speciálně $M = K$, kde K je n-rozměrná koule se středem v bodě A a poloměrem $R > 0$, vyjde pro $\alpha < n$ konvergentní integrál s hodnotou

$$\int \cdots \int_M \frac{1}{r^\alpha}\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{R^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

(Pro $n = 1$ položíme $(-1)!! = 1$.)

Vzorec platí i pro $\alpha \leq 0$, kdy jde o vlastní integrál.

Věta 78 (Srovnávací kritérium)**.** *Nechť jsou nezáporné funkce f, g definované na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že platí $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \Omega$.*

(1) *Jestliže integrál* $\iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *konverguje, konverguje i integrál* $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
(2) *Jestliže integrál* $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *diverguje, diverguje i integrál* $\iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Lemma 2. *Nechť je funkce f definovaná na omezené množině $\Omega\setminus\{A\},\Omega\subset\mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál*

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konverguje, konverguje i integrál

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 79. *Nechť funkce f,g jsou definované na omezené množině $\Omega\setminus\{A\},\Omega\subset\mathbb{R}^2$, a A je jejich společný singulární bod a nechť obě splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že funkce g je nezáporná, $|f(x,y)|\le g(x,y)$ pro každé $[x,y]\in\Omega\setminus\{A\}$ a integrál $\iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je konvergentní. Pak je konvergentní i integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

Definice 46. Řekneme, že nevlastní integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje absolutně, jestliže konverguje integrál $\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Věta 80. *Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega\setminus\{A\},\Omega\subset\mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, pak konverguje i integrál*

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tedy všechny konvergentní integrály jsou absolutně konvergentní.

6.3.2. *Nevlastní integrál na neomezené množině.* Pro každé $r>0$ označme $K(r)$ kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Definice 47. Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ neomezená množina. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\},M_n\subseteq\mathbb{R}^2,n\in\mathbb{N}$, vyčerpává množinu Ω, jestliže
(1) Platí $M_n\subset\Omega$ pro každé $n\in\mathbb{N}$.
(2) Ke každému $r>0$ existuje $m\in\mathbb{N}$ tak, že pro každé $n\ge m$ platí $\Omega\cap K(r)\subset M_n$.

- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotonní vzhledem k inkluzi.

Uvažujme funkci f definovanou na neomezené množině $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. O funkci f učiníme následující předpoklad.

Předpoklad 2. Funkce f je integrovatelná na každé (omezené) měřitelné množině $M\subset\Omega$.

Definice 48. Nechť funkce f je definovaná na neomezené množině $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ a splňuje Předpoklad 2. Řekneme, že nevlastní integrál z funkce f konverguje na množině Ω, jestliže existuje číslo $K\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$, která vyčerpává množinu Ω. Pak píšeme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω diverguje.

Příklad 169. Ukažte, že nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\},$$

diverguje.

Najdeme dvě vyčerpávající posloupnosti $\{K_n\}$ a $\{M_n\}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \lim_{n\to\infty} \iint_{M_n} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tím bude dokázáno, že daný integrál diverguje.

Označme

$$K_R = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$
$$M_a = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$

pro $R > 0$, $a > 0$. Pak transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\iint_{K_R} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho \sin\rho^2 \;\mathrm{d}\rho \;\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-\cos\rho^2}{2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-\cos R^2),$$

tedy limita $\lim_{R\to\infty} \iint_{K_R} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje.

Oproti tomu

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} \iint_{M_a} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{a\to\infty} \iint_{M_a} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \lim_{a\to\infty} \left(\int_0^a \sin x^2 \mathrm{d}x \int_0^a \cos y^2 \;\mathrm{d}y\right) + \lim_{a\to\infty} \left(\int_0^a \cos x^2 \mathrm{d}x \int_0^a \sin y^2 \;\mathrm{d}y\right) \\ &= 2\int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x \int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

protože pro Fresnelovy integrály platí (např. pomocí metod komplexní analýzy)

$$\int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Přitom posloupnosti $\{K_n\}, \{M_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou posloupnosti množin vyčerpávající Ω.

Nyní je možné přenést na tento typ nevlastního integrálu všechna tvrzení z předchozí sekce. Zejména platí, že každý integrál konverguje absolutně. (Důkazy jsou téměř analogické.)

Příklad 170. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je vnějšek otevřeného kruhu se středem v bodě $[x_0, y_0]$ a poloměrem $R > 0$ a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha > 2$ a diverguje pro $\alpha \leq 2$.

Výpočet bude podobný jako v příkladu 168.

Označme K_n mezikruží se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$, vnitřním poloměrem R a vnějším poloměrem $n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor R \rfloor + 1$. Posloupnost $\{K_n\}$ zřejmě vyčerpává množinu M.

Vypočítáme integrály
$$\iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$
Protože množina K_n je mezikružím se středem v bodě A s poloměry R a n, použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0). Tedy
$$x = x_0 + \rho\cos\varphi, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi, \quad J = \rho.$$
Množina K_n je obrazem obdélníku $L_n = [R, n] \times [0, 2\pi]$.

Dostaneme
$$\iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint_{L_n} \frac{\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_R^n \rho^{1-\alpha}\ \mathrm{d}\rho$$
$$= \begin{cases} 2\pi\left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_R^n = \frac{2\pi}{2-\alpha}(n^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln\rho]_R^n = 2\pi(\ln n - \ln R) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$
Odtud je vidět, že pro $\alpha > 2$ je
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{\alpha - 2}$$
a pro $\alpha \leq 2$ je
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \infty.$$
Protože integrand $1/r^\alpha$ je kladná funkce, podle analogie Důsledku 11 integrál konverguje právě pro $\alpha > 2$.

6.4. **Eulerova Gamma funkce.** V následujícím budeme potřebovat tzv. limitní srovnávací kritérium pro nevlastní integrály funkce jedné proměnné, které jsme dosud nepotřebovali. Pro úplnost uveďme i prosté srovnávací kritérium a příslušný důsledek.

Věta 81 (Prosté srovnávací kritérium)**.** *Nechť funkce f, g splňují pro $x \in [a, \infty)$ nerovnosti*
$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

(i) *Konverguje-li integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, přičemž platí*
$$0 \leq \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Diverguje-li integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje i integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Věta 82 (Limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť funkce f, g jsou nezáporné na intervalu $[a, \infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

(i) *Je-li $L < \infty$ a konverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.*

(ii) *Je-li $L > 0$ a diverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, diverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.*

Důsledek 12. *Nechť $a > 0$ a $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, \infty)$. Jestliže existuje $\alpha > 1$ takové, že*
$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < \infty,$$
pak integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Jestliže existuje $\alpha \leq 1$ takové, že
$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0,$$
pak nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Příklad 171. Dokažte, že integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

konverguje absolutně pro každé $x > 0$.

Rozdělme integrační obor na dvě části např. číslem 1.

- Pro $x \in [1, \infty)$ integrál $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ není nevlastní.
- Pro $x \in (0, 1)$ použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Uvažujme číslo $\delta \in (0, x)$ a počítejme

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}|}{\frac{1}{t^{1-\delta}}} = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-t} t^{x-\delta} = 0 < \infty.$$

  Protože nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ konverguje pro $\alpha < 1$ a máme $1 - \delta < 1$, konverguje i integrál $\int_0^1 |\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}|\, \mathrm{d}t$.
- Nyní uvažujme integrál $\int_1^\infty |\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}|\, \mathrm{d}t$. Opět použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Porovnávat budeme s $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ o kterém víme, že konverguje. Tedy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}|}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{\ln t^{x+1}} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{(x+1)\ln t - t} \overset{(*)}{=} 0 < \infty.$$

Tedy $\Gamma(x)$ skutečně absolutně konverguje $\forall x > 0$.

$(*)$ Protože $\lim_{u\to 0^+} u \ln u = \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} 0$, máme

$$\lim_{t\to\infty} \left[(x+1)\ln t - t\right] = \left| t = \tfrac{1}{u}, u \to 0^+ \right| = \lim_{u\to 0^+} \left[(x+1)\ln\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\right]$$
$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{-(x+1)u\ln u - 1}{u} = -\infty.$$

Příklad 172. Dokažte, že pro každé $x > 0, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\Gamma(x+n+1) = \Gamma(x) \prod_{i=0}^{n} (x+i) \tag{57}$$

Budeme postupovat indukcí.

- Pro $n = 0$ snadno spočítáme

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x\, \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t^x & u' = x t^{x-1} \\ v' = \mathrm{e}^{-t} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} = -\left[t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

- Nyní předpokládejme platnost (57) a proveďme indukční krok

$$\Gamma(x+n+2) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x+n+1}\, \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t^{x+n+1} & u' = (x+n+1) t^{x+n} \\ v' = \mathrm{e}^{-t} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix}$$
$$= -\left[t^{x+n+1} \mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (x+n+1) \mathrm{e}^{-t} t^{x+n}\, \mathrm{d}t = (x+n+1)\Gamma(x+n+1).$$

Poznámka 59. Protože

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$$

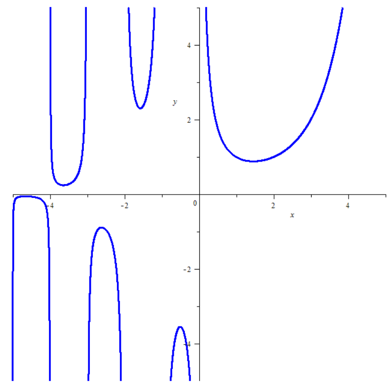
plyne z příkladu 172 vztah

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definice 49. Eulerovu Gamma funkci definujeme jako

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\ \mathrm{d}t, & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x-\lfloor x \rfloor)}{x(x+1)\dots(x-\lfloor x \rfloor -1)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Tedy $D(\Gamma) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
- Gamma funkci lze definovat pro libovolné komplexní číslo mimo $\{0, -1, -2, \dots\}$.



Věta 83. *Pro každé $x \in D(\Gamma), n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\Gamma(x) = \Gamma(x-n) \prod_{i=1}^{n} (x-i). \tag{58}$$

Poznámka 60. Díky Větě 83 stačí znát hodnotu $\Gamma(x)$ pro $x \in (0, 1]$ a pro jakékoli jiné (reálné) $x \in D(\Gamma)$ hodnotu snadno dopočítáme.

Poznámka 61. Často se můžeme setkat i s Eulerovou Beta funkcí

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x > 0, y > 0.$$

Příklad 173. Pomocí funkce $B(x,y)$ vypočítejte

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Snadno spočítáme

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ \mathrm{d}t = \left|t = \sin^2 u\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u}\ \mathrm{d}u = \pi.$$

Tedy dostáváme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \left|x^2 = u\right| = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{\frac{1}{2}-1}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Příklad 174. Vypočítejte

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$$

bez použití funkce $B(x,y)$.

$$I^2 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = |\text{polární souř.}| = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\rho$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho\ \mathrm{d}\rho = |\rho^2 = t| = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \big[-\mathrm{e}^{-t}\big]_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

tedy skutečně $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Poznámka 62. Další vlastnosti funkce $\Gamma(x)$

- $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \Gamma(x) = -\infty.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} = 1$ (Stirlingův vzorec) $\Rightarrow n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ pro velká n.
- $\frac{\mathrm{d}^n \Gamma(x)}{\mathrm{d}x^n} = \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \ln^n t)\ \mathrm{d}t$ pro $x > 0$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$
- … a mnohem víc.

7. Nekonečné řady

V této kapitole se budeme věnovat součtům nekonečně mnoha sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit geometrická řada, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce $f(x)$ pro libovolně velká n (viz Odstavec 1.20 a zejména Poznámka 18). To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů „nekonečného stupně“, tedy pomocí nekonečných mocninných řad.

7.1. Nekonečné číselné řady. V tomto odstavci budeme pracovat s posloupností reálných čísel

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \text{případně s} \qquad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Definice 50 (**Nekonečná řada**)**.** Součet tvaru

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

nazýváme nekonečnou (číselnou) řadou. Číslo a_n se nazývá n–tý člen.

Číslo

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

se nazývá n–tý částečný součet této nekonečné řady. □

Poznámka 63. Všimněte si, že v Definici 50 je n–tý člen a_n v podstatě $(n+1)$–ní v pořadí, protože posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ začínáme indexovat od $n = 0$. V literatuře je možné nalézt i indexování od $n = 1$, ale zde (a ve skriptech [8, str. 279]) budeme indexovat od $n = 0$. □

Nejprve si jako motivaci zopakujme úvahy o geometrické řadě.

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla. Tedy je to nekonečná řada, kde $a_n := aq^n$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$ Číslo q se nazývá kvocient geometrické řady, přičemž q může být kladné či záporné (viz Příklad 175). Posloupnost částečných součtů pro geometrickou řadu odvodíme snadno:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n, \qquad \Rightarrow \qquad qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + aq^{n+1}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$s_n - qs_n = a - aq^{n+1}, \qquad \Rightarrow \qquad s_n\,(1-q) = a\,(1-q^{n+1}).$$

Je-li $q = 1$, potom je zřejmě $\boxed{s_n = (n+1)\,a}$.

Je-li $q \neq 1$, potom je

$$\boxed{s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}, \qquad q \neq 1. \tag{59}$$

Příklad 175. Určete posloupnost částečných součtů dané geometrické řady:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n} + \cdots$$

Řešení.

(a) Protože je $a = 1$ a $q = \frac{1}{2}$ je podle vzorce (59) (nebo odvozeno přímo pro tuto konkrétní řadu)

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \boxed{2 - \frac{1}{2^n}}.$$

(b) Protože je $a = 1$ a $q = -\frac{1}{3}$ je podle vzorce (59) (nebo odvozeno přímo pro tuto konkrétní řadu)

$$s_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^n} = \boxed{\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4 \cdot 3^n}}.$$

□

Chování posloupnosti částečných součtů, přesněji limita této posloupnosti, zřejmě určuje chování celé nekonečné řady.

Definice 51 (**Konvergence, divergence, oscilace nekonečné řady**)**.** Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k číslu s, nebo také že má součet s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k $\pm\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Pokud limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ osciluje. □

Příklad 176.

- Geometrická řada s $a = 0$ (a $q \in \mathbb{R}$ libovolným) zřejmě konverguje (k 0), protože v tomto případě je $s_n = 0$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = 1$ zřejmě diverguje (k $\pm\infty$ podle znaménka čísla a), protože v tomto případě je $s_n = (n + 1)\, a$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = -1$ zřejmě osciluje, protože je v tomto případě $s_n = \{a, 0, a, 0, a, 0, \dots\}$ a limita této posloupnosti neexistuje.

□

Příklad 177. Rozhodněte o konvergenci a případně určete součet dané geometrické řady

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

Řešení. (a) Protože je $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ (viz Příklad 175(a)), je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}\Big) = \boxed{2},$$

tj. uvedená $\boxed{\text{řada konverguje}}$. Konvergenci této řady lze také ukázat názorně na obrázku.

(b) Protože je $s_n = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4\cdot 3^n}$ (viz Příklad 175(b)), je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{3}{4} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{4\cdot 3^n}}_{\to 0}\Big) = \boxed{\frac{3}{4}},$$

tj. uvedená $\boxed{\text{řada konverguje}}$. □

V Příkladu 176 jsme vyšetřili geometrickou řadu s $|q| = 1$. Ve vzorci (59) pro n–tý částečný součet geometrické řady se vyskytuje posloupnost q^{n+1}, která zřejmě konverguje k 0 pro $|q| < 1$, konverguje k ∞ pro $q > 1$, a nemá limitu pro $q < -1$. Odsud tedy plyne jednoduchá podmínka pro konvergenci geometrické řady.

Tvrzení 12 (Konvergence a součet geometrické řady). *Nechť $a \neq 0$. Potom geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$. V tomto případě (a také v případě $a = 0$) je pak její součet*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}}, \qquad |q| < 1.$$

Příklad 178. V Příkladech 175 a 177 je

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

□

Příklad 179. Z výšky $a = 2$ metry nad rovným povrchem pustíme kouli. Pokaždé, když koule dopadne na povrch z výšky h, odrazí se do výšky $qh = \frac{h}{3}$ (tedy $q = \frac{1}{3}$). Určete celkovou vzdálenost, kterou koule urazí při nekonečně mnoha takových doskocích.

Řešení. Celková vzdálenost je

$$s = 2 + 2\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{2}{27} + \cdots = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Jedná se tedy o geometrickou řadu, kde $a = \frac{4}{3}$ a $q = \frac{1}{3}$. Podle Tvrzení 12 je tedy

$$s = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \boxed{4 \text{ metry}}.$$

Přepočítejte si tento příklad s obecnými parametry $a > 0$ a $q \in (0, 1)$.

[Řešení je pak $s = a\,\frac{1+q}{1-q}$.] □

Někdy se při výpočtu n–tého částečného součtu s_n mnoho výrazů „pokrátí“.

Příklad 180. Rozhodněte o konvergenci a případně určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}.$$

Řešení. Protože platí (viz rozklad na parciální zlomky v Odstavci 2.3)

$$\frac{1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

je n–tý částečný součet roven

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \to 1. \end{aligned}$$

A proto uvedená nekonečná řada $\boxed{\text{konverguje}}$ a její součet je

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1}.$$

□

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně <u>zmenšovat</u> (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

Věta 84 (Nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom nutně platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{60}$$

To znamená, že pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ je různá od nuly nebo pokud tato limita neexistuje, potom nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Příklad 181.

(a) Nekonečná řada

$$1+2+3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} n$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty} n=\infty\neq 0$. Zřejmě tato řada diverguje k ∞.

(b) Nekonečná řada

$$-1+2-3+4-5+6-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, n$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\, n$ neexistuje (a jedná se o neohraničenou posloupnost). Zřejmě tato řada osciluje.

(c) Nekonečná řada

$$1-1+1-1+1-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje (a jedná se o ohraničenou posloupnost). Zřejmě tato řada osciluje. Tato řada je geometrická s $q=-1$ a $a=1$, viz Příklad 176.

(d) Nekonečná řada

$$-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{3}{7}-\frac{4}{9}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n}{2n+1}$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+1}=-\frac{1}{2}\neq 0$. Zřejmě tato řada diverguje k $-\infty$.

□

Podmínka (60) je obecně pouze podmínkou nutnou pro konvergenci nekonečné řady. Existují tedy nekonečné řady, které nekonvergují, ale podmínku (60) splňují.

Příklad 182.

(a) Nekonečná řada

$$\underbrace{1}_{1\text{ člen}}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{2\text{ členy}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{4\text{ členy}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^n\text{ členů}}+\cdots$$

nekonverguje, přestože $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Zřejmě tato řada diverguje k ∞.

(b) Jak ukážeme později (viz Příklad 186), tzv. harmonická řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

nekonverguje, přestože $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. V Příkladu 186 ukážeme, že tato řada diverguje k ∞.

□

Pro konvergentní (a částečně i divergentní) nekonečné řady platí následující algebraická pravidla.

Věta 85 (Pravidla pro nekonečné řady). *Nechť nekonečné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergují a nechť platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$$

(i) *Pravidlo konstantního násobku: pro libovolné* $c \in \mathbb{R}$ *nekonečná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot A.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu: nekonečná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B.$$

Příklad 183. Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n}.$$

Řešení. Podle Věty 85(ii) je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n},$$

neboť obě uvedené nekonečné řady konvergují. Jsou to totiž geometrické řady s $a = 1$ a s $q = \frac{1}{2}$, resp. s $q = \frac{1}{6}$, viz Tvrzení 12. Je tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

□

Poznámka 64. Pokud některá z řad diverguje k $\pm\infty$, chová se součtová/rozdílová řada podle pravidel pro „počítání s nekonečny“, jako např.

$$\infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty, \qquad \pm\infty \pm B = \pm\infty, \qquad A \pm \infty = \pm\infty, \qquad \ldots$$

Např. tedy jestliže řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergují obě k ∞ nebo obě k $-\infty$, potom nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ také diverguje k $\pm\infty$.

Samozřejmě, výrazy typu $\infty - \infty$ či $-\infty + \infty$ jsou neurčité a tímto způsobem je vyčíslit nelze. □

Ve Větě 85 se nic neříká o součinu (a podílu) nekonečných řad. Tato problematika je mnohem složitější, než se na první pohled zdá, a kolem součinu řad existuje celá teorie (protože existují různé součiny nekonečných řad). Uvědomte si totiž, že při násobení mnohočlenů platí

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \,.\, (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \\ = a_0 b_0 + a_0 b_1 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n,$$

tedy dostáváme nejen „diagonální součiny“ $a_i b_i$, ale také všechny „smíšené součiny“ $a_i b_j$. A pro součin takovýchto nekonečných mnohočlenů (tedy pro součin nekonečných řad) bude situace ještě mnohem složitější, protože bude záležet na tom, jakým způsobem výsledný součet jednotlivých součinů uspořádáme (srovnejte s Příklady 199 a 200 uvedenými dále).

7.2. **Nekonečné řady s nezápornými členy.** Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s nezápornými členy je její posloupnost částečných součtů neklesající, tj.

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n, \quad s_{n+1} = a_0 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_n \leq s_{n+1}}$$

(jednoduše proto, že do s_{n+1} přidáváme nezápornou hodnotu). A pokud je tedy neklesající posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k ∞ (tj. nemůže divergovat k $-\infty$ ani oscilovat).

Věta 86 (Srovnávací kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti nezáporných čísel, pro které platí*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{pro všechna } n = N, N+1, N+2, \ldots \tag{61}$$

pro nějaké $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(i) *Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, potom také konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

(ii) *Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞, potom také řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje k ∞.*

Nerovnost (61) nemusí nutně platit pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Uvedený předpoklad říká, že musí být splněna od „jistého indexu počínaje“. Pro použití srovnávacího kritéria je zřejmě potřeba mít „v zásobě“ nějaký soubor nekonečných řad, o kterých víme, že jsou konvergentní/divergentní.

Příklad 184. Nekonečná řada

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konverguje podle Věty 86(i) (ve které můžeme vzít $N = 0$), protože všechny její členy lze shora omezit příslušnými členy konvergentní řady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Pro součet uvedené řady pak zřejmě platí odhad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

□

Příklad 185. Nekonečná řada

$$\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

diverguje k ∞ podle Věty 86(ii) (ve které můžeme vzít $N = 3$), protože její členy lze zdola omezit příslušnými členy (divergentní) harmonické řady, tj. platí

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \qquad \text{pro všechna } n \geq 3.$$

□

Dále uvedeme tři nejznámější kritéria (Věty 87, 88 a 89) pro konvergenci/divergenci nekonečných řad s nezápornými či kladnými členy.

Věta 87 (Integrální kritérium). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $[N, \infty)$ pro nějaké $N \in [0, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí*

$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje k } \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

V integrálním kritériu se používá nevlastní integrál 1. druhu, viz Definice 21.

Příklad 186. Harmonická řada (viz Příklad 182(b))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞ podle Věty 87, protože pro funkce $f(x) := \frac{1}{x}$ je na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n \geq 1$, přičemž je nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty,$$

viz Příklad 119(c), resp. Příklad 118(c). □

Příklad 187. Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konverguje či diverguje.

Řešení.

- Pro $p < 0$ je jedná o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^q$, kde $q := -p > 0$. Tato řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence (60), a proto nekonverguje. Protože se jedná o řadu s nezápornými členy, tak tato řada diverguje k ∞.

- Pro $p = 0$ se jedná o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, která zřejmě diverguje k ∞.

- Pro $p > 0$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n^p}$ pro $n \geq 1$. Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

  - Pro $p = 1$ je jedná o harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje k ∞ (viz Příklad 186).

  - Pro $p \neq 1$ máme
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\right) - \frac{1}{1-p}.$$
Uvedená limita závisí na tom, zda je exponent $1-p$ kladný nebo záporný, protože
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \infty & \text{pro } 1-p > 0, \\ 0 & \text{pro } 1-p < 0. \end{cases}$$
A proto je
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \infty & \text{pro } p < 1, \text{ tj. tento nevlastní integrál diverguje k } \infty, \\ \frac{1}{p-1} & \text{pro } p > 1, \text{ tj. tento nevlastní integrál konverguje.} \end{cases}$$
Podle integrálního kritéria (Věta 87 s $N = 1$) tedy platí, že pro $p > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje a pro $p \in (0, 1)$ tato řada diverguje k ∞.

Celkově jsme tedy ukázali, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \boxed{\text{diverguje k } \infty \text{ pro } p \leq 1 \text{ a konverguje pro } p > 1}.$$
□

Příklad 188. Zejména tedy konverguje řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$
protože v Příkladu 187 vezmeme $p = 2$.

Součet této řady určíme v Příkladu 219.

Dále, protože je $\frac{1}{n\,(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 86(i)) také konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$, viz Příklad 180. □

Věta 88 (Podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Potom

(i) *tato řada konverguje, pokud je $q < 1$,*

(ii) *tato řada diverguje k ∞, pokud je $q > 1$ nebo $q = \infty$,*

(iii) *tento test nelze rozhodnout, pokud je $q = 1$.*

V podílovém kritériu se tedy vyskytuje podíl dvou po sobě jdoucích členů nekonečné řady. A je zřejmě jedno, jestli je řada indexována od $n = 0$ nebo od $n = 1$ (nebo případně od jiného indexu).

Příklad 189.

(a) Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \cdots$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \boxed{\frac{1}{e} < 1},$$

přičemž ve výpočtu jsme použili limitu definující Eulerovo číslo e (viz Příklad 6). Uvedená řada tedy konverguje podle podílového kritéria (Věta 88(i)).

(b) Pro geometrickou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, kde $a > 0$ a $q > 0$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{aq^{n+1}}{aq^n} = q \to q,$$

a proto podle podílového kritéria (Věta 88) geometrická řada s kladnými členy konverguje pro $q < 1$ a diverguje k ∞ pro $q > 1$. Viz také Tvrzení 12.

□

Příklad 190. Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

platí (viz výpočet v Příkladu 189(a))

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \boxed{e > 1},$$

a proto uvedená řada diverguje k ∞ podle podílového kritéria (Věta 88(ii)). □

Příklad 191. Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots, \qquad \text{tj.} \qquad a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{1}{2^n} & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \dfrac{2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \dfrac{1}{2n} & \text{pro } n \text{ liché,} \\[2ex] \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \dfrac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2} & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud je vidět, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje, a proto podílové kritérium vůbec nelze použít.

Všimněte si, že lze psát

$$a_n = \frac{[(n+1) \mod 2] + (n \mod 2) \cdot n}{2^n},$$

kde funkce $x \mod 2$ dává zbytek po dělení čísla x číslem 2 (tedy jedničku, pokud je x liché, a nulu, pokud je x sudé). □

Věta 89 (Odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna $n \geq N$ pro nějaké $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Potom

(i) *tato řada konverguje, pokud je $q < 1$,*

(ii) *tato řada diverguje k ∞, pokud je $q > 1$ nebo $q = \infty$,*

(iii) *tento test nelze rozhodnout, pokud je $q = 1$.*

Příklad 192. Pro nekonečnou řadu v Příkladu 191 platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy platí nerovnosti

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Limita na pravé straně se spočte přes exponenciální funkci a l'Hospitalovo pravidlo (Věta 14):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \overset{\text{Věta 4(ii)}}{=} \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} \quad \left| \text{ typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = \mathrm{e}^0 = 1. \tag{62}$$

Z věty o třech limitách (Věta 3) potom plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \boxed{\frac{1}{2} < 1}.$$

Proto podle odmocninového kritéria (Věta 89(i)) uvedená řada konverguje. □

Poznámka 65. V Příkladech 191 a 192 jsme viděli, že někdy podílové kritérium k výsledku nevede zatímco odmocninové kritérium ano (pro nekonečnou řadu s kladnými členy). To platí i obecně, neboť pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kladných čísel platí nerovnosti

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

To znamená, že pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, potom také existuje limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a tyto dvě limity jsou si rovny.

Tedy pokud je podílové kritérium nerozhodnutelné (tj. platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$), potom je také odmocninové kritérium nerozhodnutelné (tj. platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$). Říkáme, že odmocninové kritérium je silnější, než podílové kritérium (každý příklad, který lze spočítat podílovým kritériem, lze spočítat i odmocninovým kritériem, ale ne naopak). □

Příklad 193. Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} = \frac{2}{1^2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4}{4^2} + \frac{2^5}{5^2} + \cdots$$

platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \overset{(9)}{\to} \frac{2}{1^2} = \boxed{2 > 1},$$

a proto podle odmocninového kritéria (Věta 89(ii)) uvedená řada $\underline{\text{diverguje k } \infty}$.

Všimněte si také, že uvedená řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence (60), neboť je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad \left| \text{ typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{2n} \quad \left| \text{ typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (\ln 2)^2}{2} = \infty \neq 0.$$

Tedy uvedená řada podle Věty 84 nekonverguje. Protože se ale jedná o řadu s kladnými členy, musí tato řada potom divergovat k ∞. □

Příklad 194. Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (viz Příklad 187), protože pro podílové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \overset{\text{Věta 4(ii)}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1,$$

a pro odmocninové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \overset{\text{Věta 4(ii)}}{=} \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^p = \frac{1}{1^p} = 1.$$

Zde jsme opět použili limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, viz (62). □

7.3. **Alternující řady.** Pro srovnání a úplnost uveďme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Potom se nekonečná řada

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{případně} \quad -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

nazývá alternující řada.

Příklad 195.

(a) Nekonečná řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

je alternující a nazývá se alternující harmonická řada nebo též Leibnizova řada.

(b) Každá geometrická řada, ve které je $a \neq 0$ a $q < 0$, je zřejmě alternující.

□

Z Věty 84 víme, že každá konvergentní řada, a tedy i každá alternující konvergentní řada, musí splňovat podmínku (60). Pro alternující řady můžeme ale říct mnohem více. Z podmínky (60) se nyní stává nutná a postačující podmínka pro konvergenci alternující řady.

Věta 90 (Leibnizovo kritérium konvergence alternující řady). *Jestliže je $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel, potom nekonečná alternující řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \ \textit{konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{platí (60), tj.} \ \lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0.$$

Důkaz. Vzhledem k Větě 84 stačí ukázat směr „$\Leftarrow$“. Protože je posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nerostoucí, plyne odsud konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. □

Příklad 196. Alternující harmonická řada (viz Příklad 195(a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konverguje podle Věty 90, protože je její „generující“ posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ kladná a klesající (tudíž nerostoucí) a splňuje

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

V Příkladu 210 pak ukážeme, jaký je součet této nekonečné řady. □

Pokud tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje předpoklady Věty 90 a řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje, tj. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = A$, potom číslo A nutně leží vždy mezi dvěma po sobě následujícími částečnými součty s_n a s_{n+1}. A tedy se číslo A nemůže lišit od s_n o více, než kolik je člen a_{n+1}. Tj. musí platit odhad

$$|A - s_n| < a_{n+1}. \tag{63}$$

Ukázali jsme tedy následující užitečné tvrzení o odhadu chyby částečných součtů s_n pro alternující řadu.

Tvrzení 13 (**Odhad chyby alternující řady**). *Předpokládejme, že alternující řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ splňuje podmínky ve Větě 90 (a konverguje k číslu A). Potom pro n–tý částečný součet*

$$s_n := a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

platí odhad (63), tj. s_n aproximuje součet A této řady s chybou menší, než je absolutní hodnota prvního (do s_n) nezahrnutého člene $(-1)^{n+1} a_{n+1}$. Navíc, zbytek $A - s_n$ má stejné znaménko jako tento první (do s_n) nezahrnutý člen $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.

Příklad 197. Pokusme se ilustrovat Tvrzení 13 na alternující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n} = \underbrace{1}_{a_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \underbrace{\frac{1}{128}}_{a_7} \quad \Big| \quad + \underbrace{\frac{1}{256}}_{a_8} - \cdots,$$

jejíž součet známe. Protože se jedná o geometrickou řadu s $a = 1$ a $q = -\frac{1}{2}$, je součet této řady roven číslu (viz Tvrzení 12)

$$A = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0.6666667.$$

Potom Tvrzení 13 říká, že pokud tuto řadu „ukončíme“ po osmém členu (tj. $n = 7$), potom konečný součet

$$s_7 := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} = \frac{85}{128} = 0.6640625$$

aproximuje číslo A s chybou menší než je $a_8 = \frac{1}{256} = 0.00390625$. Skutečně,

$$|A - s_7| = \left|\frac{2}{3} - \frac{85}{128}\right| = \left|\frac{1}{384}\right| \approx 0.00260417 < 0.00390625 = a_8.$$

Přitom má rozdíl $A - s_7 = \frac{1}{384}$ stejné znaménko jako člen $(-1)^8 a_8 = \frac{1}{256}$, tedy je kladný. □

7.4. **Absolutně a relativně konvergentní řady.** Nejprve si všimněme, že pokud konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

Věta 91. *Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, potom konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Důkaz. Zřejmě pro každé n platí nerovnosti

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|, \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le a_n + |a_n| \le 2\,|a_n|.$$

Tedy pokud $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2\,|a_n|$ (podle pravidla konstantního násobku, viz Věta 85(i)). A dále, podle srovnávacího kritéria (Věta 86(i)), konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + |a_n|\big)$. A protože platí rovnost

$$a_n = \big(a_n + |a_n|\big) - |a_n|, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + |a_n|\big)}_{\text{konverguje}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}_{\text{konverguje}},$$

dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jako rozdíl dvou konvergentních řad. Tedy tato řada také konverguje podle pravidla rozdílu, viz Věta 85(ii). □

Poznámka 66. Opačná implikace ve Větě 91 zřejmě neplatí, protože např. alternující harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} \qquad \text{konverguje (viz Příklad 196)},$$

ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \text{která diverguje k } \infty \text{ (viz Příklad 186)}.$$

□

Má tedy smysl zavést následující definici.

Definice 52 (Absolutní a relativní konvergence). Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně (je absolutně konvergentní), pokud konverguje příslušná řada absolutních hodnot, tj. pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně, potom říkáme, že tato řada konverguje relativně (je relativně konvergentní).

(Pro termín relativní konvergence lze v literatuře lze najít i jiné názvy, např. konverguje neabsolutně či podmíněně). □

Příklad 198.

(a) Alternující harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} \qquad \text{konverguje relativně (viz Poznámka 66)}.$$

(b) Nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots \qquad \text{konverguje absolutně,}$$

protože příslušná řada absolutních hodnot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots \qquad \text{konverguje (viz Příklad 187, kde } p = 2\text{).}$$

□

Rozdíl mezi absolutně a relativně konvergentní řadou je zejména v tom, že členy absolutně konvergentní řady můžeme libovolně přeskládávat a nejenže dostaneme opět konvergentní řadu, ale tato nová přeskládaná řada bude mít stejný součet jako řada původní.

V následující větě ukazujeme, že relativně konvergentní řada má dostatek kladných členů (tj. pokud se kladné členy sečtou, dostaneme $+\infty$) i záporných členů (tj. pokud se záporné členy sečtou, dostaneme $-\infty$), aby převážily libovolný konečný počet členů původní řady.

Věta 92. *Nechť je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ relativně konvergentní, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverguje. Označme*

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- := \min\{a_n, 0\}.$$

Potom jsou obě nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ divergentní, neboli

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = -\infty.$$

Důkaz. Z definice vyplývá, že a_n^+ je rovno číslu a_n, pokud je a_n kladné, jiank je $a_n^+ = 0$. A naopak, a_n^- je rovno číslu a_n, pokud je a_n záporné, jinak je $a_n^- = 0$. Uvedené řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ jsou tedy řady kladných a záporných členů původní řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Nastává pro ně tedy právě jedna z následujících možností: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konverguje nebo diverguje k $-\infty$. Celkově je tedy možné zkombinovat tyto možnosti:

1. obě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konvergují,
2. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ konverguje a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ diverguje (k $-\infty$),
3. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ diverguje (k $+\infty$) a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konverguje,
4. obě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ divergují.

V prvním případě, kdy obě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konvergují, by konvergovaly i řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^+| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^-| = -\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^-|,$$

a proto by konvergovala i řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Tj. původní řada by konvergovala absolutně, což je spor s předpokladem, že řada absolutních hodnot diverguje. Ve druhém případě by byl součet původní řady roven $-\infty$ (jakožto součet nezáporného čísla a $-\infty$), což je spor s tím, že původní řada konverguje. Ve třetím případě by byl součet původní řady roven $+\infty$ (jakožto součet nekladného čísla a $+\infty$), což je spor s tím, že původní řada konverguje. Zbývá tedy poslední čtvrtá možnost, což je tvrzení věty. □

Naproti tomu členy relativně konvergentní řady nelze přeskládávat vůbec. Lze totiž jednoduše ukázat, že různým přeskládáním téže relativně konvergentní řady lze vytvořit řadu divergující k $\pm\infty$, konvergující k libovolně předem zvolenému reálnému číslu, či řadu oscilující. To vyplývá z toho, že v relativně konvergentní řadě musí být součet všech kladných členů ∞ a součet všech záporných členů $-\infty$, a při tom musí členy samotné konvergovat k nule (protože pro konvergentní řadu musí být splněna nutná podmínka konvergence, viz Věta 84).

Příklad 199. Ilustrujme tuto skutečnost například na relativně konvergentní alternující harmonické řadě (viz Příklad 198(a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{64}$$

Nejprve si všimněte, že součet všech kladných členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty,$$

která skutečně diverguje k ∞ (např. podle integrálního kritéria, viz Věta 87).

A dále součet všech záporných členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots = -\infty,$$

která skutečně diverguje k $-\infty$ (např. podle integrálního kritéria, viz Věta 87).

Potom vhodným přeskládáním členů alternující harmonické řady (64) lze získat nekonečnou řadu, která

(a) diverguje k ∞:

- Vezměme nejprve jeden kladný člen, tj. „součet“ je roven 1 $\boxed{\geq 1}$.
- Přidejme nyní jeden záporný člen a tolik kladných členů, aby byl součet $\boxed{\geq 2}$, tj. součet je pak
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{41} \approx 2.004063454 \geq 2.$$
(K tomu je zapotřebí k té 1 přidat 20 kladných členů.)
- Potom přidejme další (druhý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 3}$.
- Potom přidejme další (třetí) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 4}$.
- Potom přidejme další (čtvrtý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 5}$.
- ...

Uvědomte si, že kladných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici, protože součet těchto kladných členů je roven ∞.

Tímto způsobem po nekonečně mnoha krocích vyčerpáme všechny kladné i všechny záporné členy, tedy původní řadu vlastně „přerovnáme“, přičemž výsledný součet evidentně roste nade všechny meze. Tedy tato přerovnaná řada diverguje k ∞.

(b) diverguje k $-\infty$:

- Podobně jako v části (a) vytváříme součty, které jsou postupně ≤ -1, ≤ -2, ≤ -3, atd.

(c) konverguje k předem zvolenému reálnému číslu: Zvolme si nejprve nějaké číslo $s \in \mathbb{R}$, ke kterému má přerovnaná řada konvergovat (např. $s = 7553$).

- Nejprve vezměme tolik kladný členů, až je jejich součet $\boxed{\geq s}$.
- Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq s}$.
- Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet $\boxed{\geq s}$.
- Přidejme nyní tolik dalších záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq s}$.
- ...

Uvědomte si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici s, protože součet kladných členů je ∞ a součet záporných členů je $-\infty$.

A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje“ zvolenou hodnotu s a současně se k číslu s nekonečně blíží. Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada konverguje právě k číslu s.

(d) osciluje: Můžeme si dokonce zvolit, mezi jakými mezemi bude přerovnaná řada oscilovat. Zvolme si proto libovolná dvě čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (např. $a = -2$ a $b = 3$).

- Nejprve vezměme tolik kladný členů, až je jejich součet $\boxed{\geq b}$.
- Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq a}$.
- Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet $\boxed{\geq b}$.
- Přidejme nyní tolik dalších záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq a}$.
- ...

Uvědomte si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovené hranice b a a, protože součet kladných členů je ∞ a součet záporných členů je $-\infty$.

A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje“ zvolené hodnoty b (shora) a a (zdola). Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada osciluje (mezi čísly a a b).

Takže u relativně konvergentních řad nelze v žádném případě měnit pořadí jednotlivých členů, zatímco u absolutně konvergentních řad lze pořadí jednotlivých členů měnit libovolně. □

Příklad 200.

(a) V tomto příkladu si ukážeme, že i když obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ konvergovat nemusí.

Uvažujme nekonečné řady, kde $a_n = b_n := (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Potom jsou příslušné nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergentní, což plyne Leibnizova kritéria (viz Věta 90), zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞, viz Příklad 186.

(b) Na druhou stranu může nastat i situace, že takováto řada součinů $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n)$ konverguje, přestože jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje. Vezměme si např. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

která diverguje k ∞ (viz Příklad 187, kde $p = \frac{1}{2}$), zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konverguje podle Věty 90.

□

7.5. **Mocninné řady.** V Odstavci 1.20 jsme ukázali, jak k dané funkci $f(x)$ přiřadit Taylorův polynom stupně n (se středem v daném bodě x_0), který aproximuje funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0. V Poznámce 18 jsme pak naznačili, že lze takto získat i polynom „nekonečného stupně“, neboli nekonečnou mocninnou řadu.

Definice 53 (Mocninná řada). Nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

se nazývá mocninná řada se středem v bodě $x_0 = 0$.

Podobně, nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots$$

se nazývá mocninná řada se středem v bodě x_0.

Bod x_0 se nazývá střed mocninné řady a čísla $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ její koeficienty. □

Jedná se vlastně o zobecnění pojmu polynom do té roviny, že nyní povolujeme i „polynomy stupně ∞“.

Příklad 201.

(a) Pokud vezmeme všechny koeficienty $a_n = 1$ a $x_0 = 0$, dostaneme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Tato řada je geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = x$ a tedy podle Tvrzení 12 tato řada konverguje pro $|x| < 1$, přičemž její součet je $\frac{1}{1-x}$. Tuto skutečnost budeme vyjadřovat zápisem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \boxed{\frac{1}{1-x}} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1). \tag{65}$$

Všimněte si, že tato řada diverguje k ∞ pro $x = 1$ a osciluje pro $x = -1$ a tedy otevřený interval uvedený v (65) je maximální možný interval konvergence pro tuto mocninnou řadu.

(b) Podobně, mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

je geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = -x$ a tedy podle Tvrzení 12 tato řada konverguje pro $|x| < 1$, přičemž její součet je $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$. Tedy platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \boxed{\frac{1}{1+x}} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Všimněte si, že tato řada osciluje pro $x = 1$ a diverguje k ∞ pro $x = -1$ a tedy uvedený otevřený interval je maximální možný interval konvergence pro tuto mocninnou řadu.

(c) Mocninná řada s $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ a středem $x_0 = 2$ je řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \cdots,$$

která je také geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = -\frac{x-2}{2}$. Tedy podle Tvrzení 12 tato řada konverguje pro $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, tj. pro $x \in (0, 4)$, přičemž její součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2+x-2}{2}} = \boxed{\frac{2}{x}} \qquad \text{pro } x \in (0, 4).$$

□

Z výše uvedených příkladů je vidět, že součet mocninné řady je funkce $s(x)$ proměnné x, přičemž je potřeba určit jak součet řady $s(x)$ tak i pro která $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje.

Při studiu konvergence mocninných řad budeme používat kritéria z Odstavce 7.2, která aplikujeme na příslušnou řadu absolutních hodnot (protože se jedná o kritéria pro nekonečné řady s nezápornými členy). Zřejmě takto získáme informaci o absolutní konvergenci dané mocninné řady.

Příklad 202. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 88) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}}{\frac{1}{n}\, x^n} \right| = \frac{n}{n+1}\, |x| \to |x| \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy pro $|x| < 1$ tato řada konverguje (absolutně) a pro $|x| > 1$ nekonverguje (zřejmě pro $x < -1$ diverguje k $-\infty$ a pro $x > 1$ osciluje).

Pro $x = -1$ se jedná o zápornou harmonickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right),$$

která diverguje k $-\infty$. A pro $x = 1$ se jedná o alternující harmonickou řadu, která konverguje (relativně).

Celkově tedy uvedená mocninná řada $\boxed{\text{konverguje pro } x \in (-1, 1]}$, přičemž pro $x \in (-1, 1)$ konverguje absolutně.

V Příkladu 210 pak určíme součet této mocninné řady. □

Příklad 203. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 88) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2(n+1)-1}\, x^{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1}\, x^{2n-1}} \right| = \frac{2n-1}{2n+1} \left| x^2 \right| \to x^2 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy pro $x^2 < 1$ tato řada konverguje (absolutně) a pro $x^2 > 1$ nekonverguje (zřejmě osciluje).

Pro $x = 1$ se jedná o alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots , \tag{66}$$

která konverguje (relativně) podle Věty 90. A pro $x = -1$ se jedná o řadu s opačnými znaménky, než je řada (66), tedy se opět jedná o alternující řadu, která konverguje (relativně). V Příkladu 211 určíme součet této řady.

Celkově tedy uvedená mocninná řada $\boxed{\text{konverguje pro } x \in [-1, 1]}$, přičemž pro $x \in (-1, 1)$ konverguje absolutně. □

Příklad 204. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 88) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}}{\frac{1}{n!}\, x^n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!}\, |x| = \frac{1}{n+1}\, |x| \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy tato řada $\boxed{\text{konverguje (absolutně) a pro každé } x \in \mathbb{R}}$.

Zřejmě jste již odhadli, že součet této mocninné řady je funkce e^x. □

Příklad 205. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2\, x^2 + 6\, x^3 + 24\, x^4 + 120\, x^5 + \cdots$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 88) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = (n+1)\, |x| \to \infty \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy tato řada $\boxed{\text{konverguje pouze pro } x = 0}$ a nekonverguje pro každé $x \neq 0$. Zřejmě diverguje k ∞ pro $x > 0$ a osciluje pro $x < 0$. □

7.6. **Poloměr konvergence mocninné řady.** Každá mocninná řada konverguje ve svém středu, protože pro $x = x_0$ se jedná o nulovou řadu. Dále ze srovnávacího kritéria (Věta 86) plyne následující.

Tvrzení 14. *Uvažujme mocninnou řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n = a_0 + a_1\, (x - x_0) + a_2\, (x - x_0)^2 + a_3\, (x - x_0)^3 + \cdots \tag{67}$$

(i) *Jestliže tato mocninná řada konverguje pro nějaké $x = c$, potom konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $|x - x_0| < |c - x_0|$.*

(ii) *Jestliže tato řada nekonverguje (tj. diverguje k $\pm\infty$ nebo osciluje) pro nějaké $x = d$, potom nekonverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $|x - x_0| > |d - x_0|$.*

Graficky lze obsah Tvrzení 14 znázornit následovně. Tedy pro každou mocninnou řadu (67) nastává právě jedna z následujících možností:

- Existuje číslo $R > 0$ takové, že tato mocninná řada konverguje absolutně pro $|x - x_0| < R$, tj. pro $\boxed{x \in (x_0 - R, x_0 + R)}$ a nekonverguje pro $|x - x_0| > R$, tj. pro $x < x_0 - R$ a pro $x > x_0 + R$. Řada může a nemusí konvergovat v každém z krajních bodů $x = x_0 - R$ a $x = x_0 + R$.

- Tato mocninná řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (v tomto případě klademe $R := \infty$).

- Tato mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a nekonverguje pro všechna $x \neq 0$ (v tomto případě klademe $R := 0$).

Číslo R mající výše popsané vlastnosti nazýváme poloměr konvergence mocninné řady (67). Pokud je $R > 0$ (tj. pokud nastane první nebo druhá z výše uvedených možností), potom hovoříme o intervalu konvergence či o konvergenčním intervalu.

Příklad 206.

(a) Pro mocninné řady (viz Příklady 201(a), (b))

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^n$$

je poloměr konvergence $\boxed{R = 1}$.

(b) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 201(c))

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \, (x-2)^n$$

je poloměr konvergence $\boxed{R = 2}$.

(c) Pro mocninné řady (viz Příklady 202 a 203)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

je poloměr konvergence $\boxed{R = 1}$.

(d) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 204)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

je poloměr konvergence $\boxed{R = \infty}$.

(e) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 205)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \, x^n$$

je poloměr konvergence $\boxed{R = 0}$.

□

Pro poloměr konvergence R mocninné řady platí následující.

Věta 93 (O poloměru konvergence mocninné řady). *Pokud existuje limita (vlastní nebo nevlastní)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \qquad \textit{případně} \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a, \tag{68}$$

potom poloměr konvergence mocninné řady (67) *je*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \textit{pro } a > 0, \\ \infty & \textit{pro } a = 0, \\ 0 & \textit{pro } a = \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Vztah pro poloměr konvergence R plyne z podílového kritéria (Věta 88), resp. z odmocninového kritéria (Věta 89). Pokud totiž existuje limita v (68), potom je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}\,(x-x_0)^{n+1}}{a_n\,(x-x_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x-x_0| \to a \cdot |x-x_0| \qquad \text{pro } n\to\infty,$$

resp.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n\,(x-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|x-x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| \to a \cdot |x-x_0| \qquad \text{pro } n\to\infty.$$

Tedy mocninná řada konverguje (absolutně), pokud je $a \cdot |x-x_0| < 1$, a nekonverguje, pokud je $a \cdot |x-x_0| > 1$. Pro $a \cdot |x-x_0| = 1$ konvergovat může i nemusí.

To znamená, že pokud je $a > 0$, řada konverguje pro $|x-x_0| < \frac{1}{a}$ a nekonverguje pro $|x-x_0| > \frac{1}{a}$, neboli $R = \frac{1}{a}$.

Pokud je $a = 0$, je $a \cdot |x-x_0| = 0 < 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a tedy řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboli $R = \infty$.

A pokud je $a = \infty$, je $a \cdot |x-x_0| = \infty > 1$ pro všechna $x \neq x_0$, neboli řada nekonverguje pro všechna $x \neq x_0$, neboli $R = 0$. □

Poznámka 67.

(i) Předpoklad existence limity v (68) je příliš silný. Lze ukázat, že stačí místo limity použít limitu superior (která existuje vždy), tj.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \qquad \text{případně} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a.$$

(ii) Z Poznámky 65 plyne, že pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$, potom také existuje limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ (a tyto dvě limity jsou si rovny).

(iii) Může ale nastat situace, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ existuje, zatímco $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ neexistuje (viz např. Příklady 191 a 192). Je tedy vidět, že stačí vždy počítat poloměr konvergence pomocí vzorečku s $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ (pokud tedy tato limita existuje jako vlastní nebo jako nevlastní).

□

Příklad 207.

(a) Pro mocninné řady z Příkladu 206(a) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = 1,$$

a proto je podle Věty 93 (kde $a = 1$) jejich poloměr konvergence roven $\boxed{R = 1}$. Všimněte si, že podle Poznámky 67(ii) je také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

(b) Pro mocninnou řadu z Příkladu 206(b) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto je podle Věty 93 (kde $a = \frac{1}{2}$) její poloměr konvergence roven $\boxed{R = 2}$. Všimněte si, že podle Poznámky 67(ii) je také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Pro mocninné řady z Příkladu 206(c) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = 1,$$

a proto je podle Věty 93 (kde $a = 1$) jejich poloměr konvergence roven $\boxed{R = 1}$. Všimněte si, že podle Poznámky 67(ii) je také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \overset{\text{Věta 4(ii)}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} \overset{(62)}{=} 1,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} = 1,$$

přičemž poslední limita se spočítá l'Hospitalovým pravidlem podobně jako (62).

(d) Pro mocninnou řadu z Příkladu 206(d) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

a proto je podle Věty 93 (kde $a = 0$) její poloměr konvergence roven $\boxed{R = \infty}$.

(e) Pro mocninnou řadu z Příkladu 206(e) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

a proto je podle Věty 93 (kde $a = \infty$) její poloměr konvergence roven $\boxed{R = 0}$. □

Mocninné řady (jakožto „polynomy“ nekonečného stupně) sdílejí s polynomy všechny důležité vlastnosti. Zejména, jak uvidíme níže,

- součet mocninné řady je spojitá funkce,
- mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence,
- mocninnou řadu můžeme integrovat (neurčitým i určitým integrálem) člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence.

Pro jednoduchost uvádíme tyto vlastnosti pro mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$, ale evidentně tyto vlastnosti platí pro mocninné řady s libovolným středem x_0, přičemž konvergenční interval se změní z $(-R, R)$ na interval $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Věta 94 (Spojitost mocninné řady).

(i) *Nechť má mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *(*$R \in \mathbb{R}$ *nebo* $R = \infty$*), tj.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = s(x) \qquad \textit{pro } x \in (-R, R).$$

Potom je součet $s(x)$ *této řady spojitá funkce na intervalu* $(-R, R)$.

(ii) *Je-li* $R < \infty$ *a je-li tato řada konvergentní v pravém krajním bodě* $x = R$*, potom je součet* $s(x)$ *funkce spojitá zleva v bodě* $x = R$*, tj. platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, R^n = \lim_{x \to R^-} s(x).$$

(iii) *Je-li* $R < \infty$ *a je-li tato řada konvergentní v levém krajním bodě* $x = -R$*, potom je součet* $s(x)$ *funkce spojitá zprava v bodě* $x = -R$*, tj. platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (-R)^n = \lim_{x \to -R^+} s(x).$$

Příklad 208. V Příkladu 201 vidíme, že součet mocninné řady je spojitá funkce na příslušném konvergenčním intervalu. Vlastnost z bodu (ii) ve Větě 94 budeme ilustrovat v Příkladu 210 (tento příklad vyžaduje „znalost“ integrování mocninné řady, kterou probereme níže ve Větě 96). □

Věta 95 (Derivace mocninné řady). *Nechť má mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *(*$R \in \mathbb{R}$ *nebo* $R = \infty$*), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \cdots \qquad \textit{pro } x \in (-R, R).$$

Potom má funkce $s(x)$ na intervalu $(-R, R)$ derivace všech řádů, přičemž platí

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + 4\, a_4\, x^3 + \cdots \qquad \textit{pro } x \in (-R, R),$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n.$$

Tedy mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a derivace), přičemž se nemění poloměr konvergence.

Důkaz. Ukažme si alespoň, že se při derivování mocninné řady nemění poloměr konvergence. Nechť a je číslo z Věty 93, které určuje poloměr konvergence R (původní řady). Potom pro derivovanou řadu platí

$$\frac{(n+2)\, a_{n+2}}{(n+1)\, a_{n+1}} = \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}_{\to a} \xrightarrow{(8)} 1 \cdot a = a \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy podle Věty 93 je poloměr konvergence derivované řady roven R, tj. je stejný, jako je poloměr konvergence původní řady. $\square$

Poznámka 68. Pro derivace vyšších řádů pak platí podobně

$$s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} = 2\, a_2 + 6\, a_3\, x + 12\, a_4\, x^2 + 20\, a_5\, x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2}\, x^n,$$

a podobně pro $s'''(x)$, $s^{(4)}(x)$, atd.

Zejména tedy můžeme vyšetřovat vlastnosti mocninné řady z kapitoly 1 na intervalu $(-R, R)$ týkající se monotonie, lokálních extrémů, konvexnosti/konkávnosti, inflexních bodů, atd. $\square$

Příklad 209. Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x + 2\, x^2 + 3\, x^3 + 4\, x^4 + \cdots$$

Pomocí získaného výsledku určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots$$

Řešení. Poloměr konvergence určíme z Věty 93:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 = a, \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{a} = 1.$$

Tedy řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a zřejmě nekonverguje v krajních bodech tohoto intervalu.

Protože je $n\,x^{n-1} = (x^n)'$, součet této řady určíme z věty o derivaci mocninné řady (Věta 95):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'$$
$$= x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}}.$$

Volbou $x = \frac{1}{2}$ pak dostáváme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \boxed{2}.$$

□

Věta 96 (Neurčitý integrál mocninné řady). *Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ poloměr konvergence $R > 0$ ($R \in \mathbb{R}$ nebo $R = \infty$), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + \cdots \qquad \textit{pro } x \in (-R, R).$$

Potom na intervalu $(-R, R)$ platí

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0\,x + a_1\,\frac{x^2}{2} + a_2\,\frac{x^3}{3} + a_3\,\frac{x^4}{4} + \cdots + C \qquad \textit{pro } x \in (-R, R),$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\,x^n + C.$$

Tedy mocninnou řadu můžeme integrovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrování), přičemž se nemění poloměr konvergence.

Příklad 210. Určete součet mocninné řady (viz Příklad 202)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

a tedy pro $x = 1$ také součet alternující harmonické řady (viz Příklady 196 a 195)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Řešení. V Příkladu 202 jsme ukázali, že tato mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1]$. Protože je $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n\,\mathrm{d}x$, součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady (Věta 96):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int x^n\,\mathrm{d}x\right) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) \mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+x) + C \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Protože je pro $x = 0$ tato mocninná řada konvergentní se součtem 0 (každá mocninná řada má ve svém středu součet 0), po dosazení za $x = 0$ dostaneme rovnici $0 = \ln 1 + C$, tedy $C = 0$. Je tedy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = \ln(1+x)} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

A dále, protože tato řada konverguje v pravém krajním bodě $x = 1$ (je to alternující harmonická řada), je podle věty o spojitosti mocninné řady (Věta 94(ii))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \boxed{\ln 2}, \qquad \text{tj.} \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

$\square$

Příklad 211. Určete součet mocninné řady (viz Příklad 203)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Řešení. Z Příkladu 203 víme, že tato řada konverguje pro $x \in [-1, 1]$ a konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$. Protože je $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int x^{2n} \, dx$, součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady (Věta 96):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int x^{2n} \, dx \right) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2 \right)^n \right) dx$$
$$= \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Protože je pro $x = 0$ tato mocninná řada konvergentní se součtem 0 (každá mocninná řada má ve svém středu součet 0), po dosazení za $x = 0$ dostaneme rovnici $0 = \operatorname{arctg} 0 + C$, tedy $C = 0$. Je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \operatorname{arctg} x \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

A dále, protože tato řada konverguje v pravém krajním bodě $x = 1$, je podle věty o spojitosti mocninné řady (Věta 94(ii))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Podobný vztah platí pro $x = -1$, protože tato mocninná řada konverguje i v levém krajním bodě $x = -1$.

Celkově tedy platí vztah

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \operatorname{arctg} x} \qquad \text{pro } x \in [-1, 1].$$

$\square$

Věta 97 (Určitý integrál mocninné řady). *Nechť má mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *(*$R \in \mathbb{R}$ *nebo* $R = \infty$*), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-R, R).$$

Potom pro libovolný interval $[a, b] \subseteq (-R, R)$ *platí*

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_a^b x^n\,\mathrm{d}x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, \frac{b^{n+1}}{n+1} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, \frac{a^{n+1}}{n+1} \right).$$

Tedy mocninnou řadu můžeme integrovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrování).

Příklad 212. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots$$

Řešení. Protože platí

$$\frac{1}{(n+1)\, 2^{n+1}} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,\mathrm{d}x,$$

je podle věty o určitém integrálu mocninné řady (Věta 97)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, 2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,\mathrm{d}x \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \big[-\ln(1-x) \big]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - (-\ln 1) = -\ln \frac{1}{2} = -\ln 2^{-1} = \boxed{\ln 2}.$$

Tedy platí, že

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots$$

□

7.7. **Taylorovy a Maclaurinovy řady.** Pokud se v Taylorově polynomu (viz Odstavec 1.20) budou brát členy se stále vyššími derivacemi (až do nekonečna), dostaneme Taylorovu řadu příslušnou k dané funkci $f(x)$.

Definice 54 (Taylorova a Maclaurinova řada). Nechť $f(x)$ je funkce, která má na nějakém intervalu (obsahujícím bod x_0 jakožto vnitřní bod) derivace všech řádů. Taylorova řada se středem v bodě x_0 příslušná k funkci $f(x)$ je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x - x_0)^n \tag{69}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\,(x - x_0)^4 + \cdots$$

Tzn. Taylorova řada je mocninná řada se středem v bodě x_0 a koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Pokud je $x_0 = 0$, potom se Taylorova řada nazývá Maclaurinovou řadou příslušnou k funkci $f(x)$, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\, x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\, x^4 + \cdots$$

Tzn. Maclaurinova řada je mocninná řada se středem v bodě 0 a koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. □

V předchozí definici si připomeňme zavedenou konvenci, že $f^{(0)}(x) := f(x)$ („nultá derivace" je samotná funkce) a že je definováno $0! := 1$.

Příklad 213.

(a) Protože má funkce $f(x) = \sin x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\sin x$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně 0, 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, atd. (viz Příklad 71), Maclaurinova řada pro funkci $\sin x$ je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!}\, x^7 + \cdots$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$ (podle Věty 93), tj. tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(b) Protože má funkce $f(x) = \cos x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\cos x$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, 0 atd. (viz Příklad 72), Maclaurinova řada pro funkci $\cos x$ je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 - \frac{1}{6!}\, x^6 + \cdots$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$ (podle Věty 93), tj. tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(c) Protože má funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce e^x a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou všechny rovny 1 (viz Příklad 73), Maclaurinova řada pro funkci e^x je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \frac{1}{5!}\, x^5 + \cdots$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$ (viz Příklady 204 a 206(d)), tj. tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(d) Protože má funkce $f(x) = \ln(1+x)$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\ln(1+x)$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně rovny 0, 1, −1, 2, −6, 24, −120 (viz Příklad 74), Maclaurinova řada pro funkci $\ln(1+x)$ je tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{n!}\, x^n = x - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{1}{5}\, x^5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n.$$

Srovnejte tento výsledek s mocninnou řadou v Příkladu 210. Tato řada konverguje pro všechna $x \in (-1, 1]$ (viz Příklad 202).

□

Příklad 214. Určete Taylorovu řadu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ se středem v bodě $x_0 = 2$. Dále určete obor konvergence této mocninné řady a případně její součet.

Řešení. Derivace funkce $f(x)$ a její hodnoty v bodě 2 jsou následující:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= \tfrac{1}{2} = \tfrac{0!}{2^1}, \\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\tfrac{1}{4} = -\tfrac{1!}{2^2}, \\
f''(x) &= 2\,x^{-3}, & f''(2) &= \tfrac{2}{8} = \tfrac{2!}{2^3}, \\
f'''(x) &= -6\,x^{-4}, & f'''(2) &= -\tfrac{6}{16} = -\tfrac{3!}{2^4}, \\
f^{(4)}(x) &= 24\,x^{-5}, & f^{(4)}(2) &= \tfrac{24}{32} = \tfrac{4!}{2^5}, \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}, & f^{(n)}(2) &= \tfrac{(-1)^n\, n!}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Koeficient a_n v Taylorově řadě tedy je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}},$$

a proto má příslušná Taylorova řada se středem v bodě 2 tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,(x-2)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\,(x-2) + \frac{1}{2^3}\,(x-2)^2 - \frac{1}{2^4}\,(x-2)^3 + \frac{1}{2^5}\,(x-2)^4 - \cdots$$

Uvedená mocninná řada je geometrická řada s počátečním členem $a = \frac{1}{2}$ a kvocientem $q = -\frac{x-2}{2}$ (srovnejte s podobnou řadou v Příkladu 201). Tedy podle Tvrzení 12 je tato řada konvergentní pro $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, tj. pro $|x-2| < 2$, tj. pro $x \in (0,4)$, a její součet je

$$\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x} = f(x).$$

Alternativně lze poloměr konvergence uvedené řady spočítat z Věty 93, čili

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = a, \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{a} = 2.$$

V tomto příkladu tedy vidíme, že Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje na svém konvergenčním intervalu k funkci $f(x)$. $\square$

Z definice Taylorovy řady (69) plyne, že tato řada konverguje k číslu $f(x_0)$ pro $x = x_0$ (protože každá mocninná řada konverguje ve svém středu).

Situace v předchozím Příkladu 214 ohledně konvergence Taylorovy (či Maclaurinovy) řady k samotné funkci $f(x)$ je „obvyklá“ pro většinu funkcí. Existují ale také funkce, které mají derivace všech řádů (tudíž k nim existuje Taylorova řada), tato Taylorova řada konverguje, ale již ne k funkci $f(x)$ (kromě bodu x_0).

Příklad 215. Funkce

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je spojitá a má derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. V bodě $x_0 = 0$ toto lze ukázat pomocí výpočtu jednostranných derivací $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$, $f''_-(0)$ a $f''_+(0)$, atd., viz Poznámka 4(ii). Zejména jsou všechny tyto derivace v bodě $x_0 = 0$ rovny 0. Tedy příslušná Maclaurinova řada je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2}\, x^2 + \frac{0}{3!}\, x^3 + \cdots = \boxed{0}.$$

Tedy jedná se o nulovou řadu, která samozřejmě konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ k nulové funkci $s(x) \equiv 0$, která není rovna původní funkci $f(x)$ s výjimkou $x = 0$. □

Otázku, kdy Taylorova (Maclaurinova) řada funkce $f(x)$ konverguje k funkci $f(x)$, zodpovídá následující tvrzení, které je bezprostředním důsledkem Věty 22.

Věta 98 (**O konvergenci Taylorovy řady**).

(i) *Taylorova řada* (69) *funkce $f(x)$ konverguje na svém konvergenčním intervalu I k funkci $f(x)$, tj. platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x - x_0)^n \qquad \text{pro všechna } x \in I, \tag{70}$$

$\Leftrightarrow$ *pro posloupnost Taylorových zbytků $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (viz* (36)*) platí*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

(ii) *Zejména, pokud jsou všechny derivace $f^{(n)}(x)$ stejně ohraničené na intervalu I, tj. pokud pro nějaké $M > 0$ je*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ a pro všechna } x \in I,$$

potom platí (70).

Z Věty 98 vyplývá, že pokud chceme vyjádřit funkci $f(x)$ jako nekonečnou řadu

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n \\ &= a_0 + a_1\, (x - x_0) + a_2\, (x - x_0)^2 + a_3\, (x - x_0)^3 + \cdots + a_n\, (x - x_0)^n + \cdots , \end{aligned} \tag{71}$$

potom volbou $x = x_0$ nutně dostáváme $a_0 = f(x_0)$. Dále derivováním rovnice (71) dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2\, a_2\, (x - x_0) + 3\, a_3\, (x - x_0)^2 + \cdots + n\, a_n\, (x - x_0)^{n-1} + \cdots , \\ f''(x) &= 2\, a_2 + 6\, a_3\, (x - x_0) + \cdots + n(n-1)\, a_n\, (x - x_0)^{n-2} + \cdots , \\ f'''(x) &= 6\, a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)\, a_n\, (x - x_0)^{n-3} + \cdots , \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n!\, a_n + \cdots \end{aligned}$$

Dosazením za $x = x_0$ pak vychází, že

$$f'(x_0) = a_1, \quad f''(x_0) = 2\,a_2, \quad f'''(x_0) = 6\,a_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n.$$

Odsud již vyplývá, že rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady se středem v bodě x_0 má nutně uvedený tvar (70).

Příklad 216. Uveďme si přehled Maclaurinových řad pro některé elementární funkce, se kterými se často setkáváme.

(a) Pro funkci $f(x) = \sin x$ platí (viz Příklad 213(a))

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!}\, x^7 + \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}}\,.$$

(b) Pro funkci $f(x) = \cos x$ platí (viz Příklad 213(b))

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 - \frac{1}{6!}\, x^6 + \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}}\,.$$

(c) Pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ platí (viz Příklad 213(c))

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \frac{1}{5!}\, x^5 + \cdots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}}\,.$$

(d) Pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$ platí (viz Příklady 213(d) a 210)

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n = x - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{1}{5}\, x^5 + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-1, 1]}\,.$$

(e) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1-x}$ platí (viz Příklad 201(a))

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-1, 1)}\,.$$

(f) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ platí (viz Příklad 201(b))

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \qquad \text{pro } x \in (-1, 1)}\,.$$

(g) Každý polynom $P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$ je svým vlastním Maclaurinovým rozvojem (na celém $\mathbb{R}$), neboť platí, že

$$P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2\,a_2, \quad P'''(0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3!\,a_3, \quad \ldots, P^{(n)}(0) = n!\,a_n.$$

□

Výše uvedené rozvoje elementárních funkcí do nekonečných řad bychom také mohli chápat jako definice těchto funkcí (jak je skutečně provedeno ve skriptech [8]). A pak lze pomocí vlastností (např. spojitosti, derivace, integrálu, atd.) mocninných řad uvedených v této kapitole také odvodit základní vlastnosti a vztahy těchto elementárních funkcí, jako např.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad \cdots$$

Pro rozvoje funkcí do nekonečných řad můžeme používat normální algebraická pravidla (sčítání, odčítání, násobení, substituce).

Příklad 217.

(a) Maclaurinova řada funkce $x \sin x$ je (pro rozvoj funkce $\sin x$ viz Příklad 216(a))

$$\begin{aligned} x \sin x &= x \cdot \left(x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!}\, x^7 + \cdots \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3!}\, x^4 + \frac{1}{5!}\, x^6 - \frac{1}{7!}\, x^8 + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+2}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Maclaurinova řada funkce $\frac{\sin x}{x}$ je (pro rozvoj funkce $\sin x$ viz Příklad 216(a))

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!}\, x^7 + \cdots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3!}\, x^2 + \frac{1}{5!}\, x^4 - \frac{1}{7!}\, x^6 + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v tohoto vzorce je snadné odvodit limitu $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (viz Příklad 13).

(c) Maclaurinova řada funkce e^{-x^2} je (pro rozvoj funkce e^x viz Příklad 216(c))

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x^2} &= \left(1 + t + \frac{1}{2!}\, t^2 + \frac{1}{3!}\, t^3 + \frac{1}{4!}\, t^4 + \frac{1}{5!}\, t^5 + \cdots \right) \Bigg|_{t=-x^2} \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}\, x^4 - \frac{1}{3!}\, x^6 + \frac{1}{4!}\, x^8 - \frac{1}{5!}\, x^{10} + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

7.8. **Aplikace nekonečných řad.** Nekonečné (číselné i mocninné) řady mají mnoho aplikací. Nebudu zacházet do přílišných podrobností, ale chci zmínit alespoň následující.

- Přibližné výpočty funkčních hodnot – srovnejte např. s Příklady 69 a 217.
- Aproximace funkcí – srovnejte např. s Příklady 216 a 76.
- Výpočet integrálů vyšších funkcí – viz Poznámka 23.

Příklad 218.

(a) Primitivní funkce k funkci $\frac{\sin x}{x}$ je funkce (viz Příklad 217(b))

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1 - \frac{1}{3!}\,x^2 + \frac{1}{5!}\,x^4 - \frac{1}{7!}\,x^6 + \cdots\right)\mathrm{d}x \\ &= x - \frac{1}{3!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!}\,\frac{x^7}{7} + \cdots + C \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot(2n+1)}\,x^{2n+1} + C}, \qquad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

neboť lze mocninnou řadu integrovat člen po členu a poloměr konvergence se integrováním nemění.

(b) Primitivní funkce k funkci e^{-x^2} je funkce (viz Příklad 217(c))

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1 - x^2 + \frac{1}{2!}\,x^4 - \frac{1}{3!}\,x^6 + \frac{1}{4!}\,x^8 - \frac{1}{5!}\,x^{10} + \ldots\right)\mathrm{d}x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\,\frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!}\,\frac{x^9}{9} - \frac{1}{5!}\,\frac{x^{11}}{11} + \cdots + C \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot(2n+1)}\,x^{2n+1} + C}, \qquad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

neboť lze mocninnou řadu integrovat člen po členu a poloměr konvergence se integrováním nemění.

$\square$

- Výpočet limit – viz např. Příklad 217(b).
- Řešení některých diferenciálních rovnic – viz např. Příklad 142.
- Jen tak pro zajímavost

Příklad 219. Určete součet číselné řady (viz Příklad 188)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

Řešení. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ má rozvoj (viz Příklad 217(b))

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}\,x^2 + \frac{1}{5!}\,x^4 - \frac{1}{7!}\,x^6 + \cdots \tag{72}$$

Kořeny této funkce jsou zřejmě v bodech $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, atd. a tedy tuto funkci lze „rozložit“ na (nekonečný) součin kořenových činitelů

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{x}{4\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{4\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots\end{aligned} \tag{73}$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 v rozvoji (72) a (po roznásobení) v (73) dostaneme

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \cdots,$$

čili po vynásobení číslem $-\pi^2$ dostaneme

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Jen pro zajímavost, tuto úvahu provedl Leonard Euler již v 18. století. □

Poznámka 69. Protože je $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, plyne ze vzorců (72) a (73) volbou $x = \frac{\pi}{2}$ vyjádření

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{\pi}{2}} &= \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi}\right)\cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{6}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{8}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{8}\right)\cdots \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots,
\end{aligned}$$

neboli dostáváme známý Wallisův vzorec

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

pro vyjádření čísla $\frac{\pi}{2}$ (a tedy i čísla π) pomocí nekonečného součinu.

Nekonečné součiny (a otázky spojené s jejich konvergencí) ale v tomto kurzu neprobíráme, tak to berte jen jako zajímavost. □

7.9. **Řady funkcí.** Stejně jako když jsme studovali mocninné řady, tj. řady „generované" mocninami x^n s koeficienty a_n, můžeme studovat řady „generované" jinými funkcemi. Např. Fourierovy řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

případně můžeme uvažovat obecné řady funkcí (či funkcionální řady)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

přičemž $f_n(x)$ jsou funkce definované na nějakém (společném) intervalu I. V této souvislosti je pak přirozené klást otázky týkající se konvergence takové funkcionální řady, tj. pro která $x \in I$ je definována funkce

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

a jaké vlastnosti funkce $s(x)$ bude mít (zejména týkající se spojitosti, derivace a primitivní funkce – viz příslušné Věty 94, 95, 96 a 97 o mocninných řadách).

Stejně jako u mocninných či číselných řad je při studiu obecných funkcionálních řad potřeba vyřešit otázku konvergence posloupnosti částečných součtů

$$s_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x),$$

tj. za jakých podmínek a na jakém intervalu konverguje (funkcionální) posloupnost $s_n(x)$ k funkci $s(x)$, tj. $s_n(x) \to s(x)$ pro $x \in I$. Pro každé pevně zvolené $x \in I$ se ale jedná o číselnou posloupnost (či řadu), a proto můžeme použít všechny nástroje počínaje Odstavcem 7.1. Hovoříme pak o bodové konvergenci dané funkcionální řady.

Ovšem je nutné zdůraznit, že již nejjednodušší vlastnosti (jako např. spojitost) funkcí $f_n(x)$ (a tedy i funkcí $s_n(x)$) se při takové bodové konvergenci nepřenášejí na součtovou funkci $s(x)$.

Příklad 220. Uvažujme funkce $s_n(x) := x^n$ pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jedná se tedy o posloupnost částečných součtů

$$s_0(x) = 1, \quad s_1(x) = x, \quad s_2(x) = x^2, \quad s_3(x) = x^3, \quad s_4(x) = x^4, \quad \ldots$$

funkcí

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x - 1, \quad f_2(x) = x^2 - x, \quad f_3(x) = x^3 - x^2, \quad \ldots, \quad f_n(x) = x^n - x^{n-1}, \quad \ldots$$

Všechny tyto funkce $f_n(x)$ jsou spojité na intervalu $[0,1]$ pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dále jsou všechny funkce $s_n(x)$ spojité na intervalu $[0,1]$. Přitom

$$\text{pro } x \in [0,1) \text{ je} \quad s_n(x) = x^n \to 0 \qquad \text{a pro } x = 1 \text{ je} \quad s_n(x) = 1^n \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Tedy posloupnost $s_n(x)$ bodově konverguje na intervalu $[0,1]$ k funkci

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0,1), \\ 1 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

přičemž tato funkce $s(x)$ je nespojitá. □

Z Příkladu 220 je tedy vidět, že pro obecné funkcionální řady je potřeba silnější pojem konvergence, než je bodová konvergence, který bude zaručovat přenos vlastností funkcí $f_n(x)$ na součtovou funkci $s(x)$. Tímto se dostáváme k termínu stejnoměrné konvergence na intervalu I.

8. Fourierova řada a transformace

8.1. Stejnoměrná konvergence.

Definice 55. Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ε existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a,b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

O řadě funkcí řekneme, že konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Věta 99. *Uvažme funkce $f_n(x)$ na intervalu $I = [a,b]$.*

(1) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$, je i funkce $S(x)$ spojitá na I.*
(2) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojitě diferencovatelné na I, a obě řady*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

konvergují stejnoměrně, pak je také funkce $S(x)$ spojitě diferencovatelná a platí $S'(x) = T(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

(3) *Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ Riemannovsky integrovatelné na I a řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$ na I, je tamtéž integrovatelná i funkce $S(x)$ a platí vztah*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Věta 100 (Weierstrassův test)**.** *Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $I = [a,b]$ a platí $|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$. Je-li řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak řada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně.*

Weierstrassův test můžeme ihned použít na již probrané mocninné řady $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se středem v bodě x_0. Již víme, že každá taková řada konverguje na $(x_0 - r, x_0 + r)$, kde tzv. poloměr konvergence $r \geq 0$ může být také nula nebo ∞. Zejména k důkazu konvergence řady $S(x)$ ji můžeme srovnat s vhodnou geometrickou posloupností. Podle Weistrassova testu je proto řada $S(x)$ stejnoměrně konvergentní na každém kompaktním (tj. konečném) intervalu [a,b] uvnitř intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$. Platí tedy následující věta (viz věty 94, 95,96).

Věta 101. *Každá mocninná řada $S(x)$ je ve všech bodech uvnitř svého intervalu konvergence spojitá a spojitě diferencovatelná. Funkce $S(x)$ je také integrovatelná a derivování i integrování lze provádět člen po členu.*

8.2. **Fourierovy řady.** Nejprve zavedeme několik pojmů.

Definice 56. (i) Jestliže pro funkci f na intervalu $[a,b]$ existuje konečný integrál

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazývá se funkce f integrovatelná s kvadrátem, píšeme $f \in L^2[a,b]$.

(ii) Výraz

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f, g \in L^2[a,b],$$

nazýváme skalární součin funkcí f, g na intervalu $[a,b]$.

(iii) Číslo

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad f \in L^2[a,b],$$

nazýváme norma funkce f na intervalu $[a,b]$.

Poznamenejme, že každá spojitá (popř. po částech spojitá, tedy mající konečný počet budů nespojitosti prvního druhu) funkce je integrovatelná s kvadrátem. Dále je-li funkce integrovatelná s kvadrátem, je integrovatelná i funkce $|f|$ a tedy i samotná funkce f. Navíc, součin dvou funkcí integrovatelných s kvadrátem je integrovatelný, tedy skalární součin je konečné číslo. Je-li toto číslo rovno nule, nazývají se příslušné funkce ortogonální (kolmé).

Definice 57. Uvažujme systém funkcí $\{f_1, f_2, \dots\}$ z $L^2[a,b]$ (konečný nebo nekonečný). Řekneme, že tyto funkce tvoří na intervalu $[a,b]$ ortogonální systém, jestliže jsou po dvou ortogonální, tj.

$$\langle f_m, f_n\rangle = \int_a^b f_m(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n.$$

Pokud je navíc norma každé z těchto funkcí rovna jedné, tj.

$$||f_i||^2 = \langle f_i, f_i\rangle = \int_a^b f_i^2(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

tvoří na intervalu $[a,b]$ ortonormální systém.

Do ortogonálního systému nezahrnujeme funkce, které jsou (skoro všude) nulové, tedy funkce, pro které je norma rovna nule. Ortonormální systém poté získáme ze systému ortogonálního výnásobením každé funkce vhodnou konstantou (rovnou převrácené hodnotě normy příslušné funkce).

Poznamenejme, že ortogonální systém lze obdržet např. použitím Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu.

Tvrzení 15. *Systém funkcí*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\} \tag{74}$$

je ortogonální na každém intervalu délky 2π*.*

Důkaz. Tvrzení lze dokázat přímým výpočtem skalárních součinů všech kombinací funkcí. □

Přímým výpočtem také snadno zjistíme, že konstantní funkce 1 má oproti ostatním funkcím systému (74) větší normu, přesněji, na každém intervalu délky 2π platí

$$||1|| = \sqrt{2\pi}, \quad ||\sin nx|| = \sqrt{\pi} = ||\cos nx||. \tag{75}$$

Tím jsme také dokázali, že všechny funkce ze systému (74) náležejí do $L^2[a, a+2\pi]$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme nyní, že je možné funkci $g \in L^2[a,b]$ zapsat jako kombinaci funkcí z daného ortogonálního systému $\{f_1, f_2, \dots\}$, tedy

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x),$$

přičemž řada napravo koverguje k funkci g na intervalu $[a,b]$ stejnoměrně. Vynásobením funkcí f_j a následnou integrací od a do b obdržíme

$$\int_a^b g(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní s použitím věty 99 zaměníme sumaci a integraci (koeficient c_i je vzhledem k integrálu konstantní, tedy je možné ho vytknout)

$$\int_a^b g(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b f_i(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní vezmeme v úvahu, že systém funkcí $\{f_1, f_2, \dots\}$ je ortogonální. To znamená, že na pravé straně zůstane jediný nenulový sčítanec, tedy

$$\int_a^b g(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x = c_j \int_a^b f_j^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud snadno vyjádříme koeficient c_j jako

$$c_j = \frac{1}{||f_j||^2} \int_a^b g(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Takto vypočtené koeficienty budeme nazývat Fourierovy koeficienty funkce g v systému $\{f_1, f_2, \dots\}$.

Snadno tedy můžeme vyjádřit například Fourierovy koeficienty funkce $g \in L^2[-\pi,\pi]$ v tzv. trigonometrickém systému (74). Připomeňme normy prvků tohoto systému (75). Uvažujeme-li Fourierovu řadu ve tvaru

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{76}$$

na intervalu $[-\pi,\pi]$, pak koeficienty obdržíme jako

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{77}$$

Konvergence takto sestrojené řady je popsána v následující větě.

Věta 102. *Nechť g je po částech spojitá na intervalu $[-\pi,\pi]$ a má na něm po částech spojitou derivaci. Pak její Fourierova řada (76) konverguje na $[-\pi,\pi]$ a platí*

(1) *$F(x_0) = g(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi,\pi)$, ve kterém je funkce g spojitá;*

(2) *v každém bodě $x_0 \in (-\pi,\pi)$, ve kterém je funkce g nespojitá je*

$$F(x_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} g(x) + \lim_{x\to x_0^-} g(x)\right];$$

(3) *v krajních bodech intervalu $[-\pi,\pi]$ je*

$$F(\pi) = F(-\pi) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -\pi^+} g(x) + \lim_{x\to \pi^-} g(x)\right].$$

Pokud navíc je $g(x)$ spojitá, periodická s periodou 2π a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada $F(x)$ stejnoměrně.

Příklad 221. Určete Fourierovu řadu funkce $g(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ a rozhodněte k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$.

Řešení. Přímým výpočtem s použitím metody per partes obdržíme koeficienty (viz (77))

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

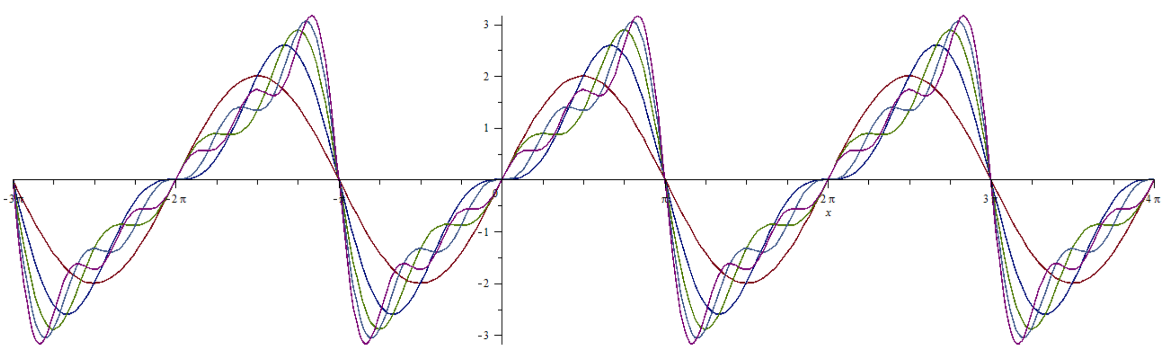
Řada je tedy tvaru (viz (76))

$$F(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right), \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

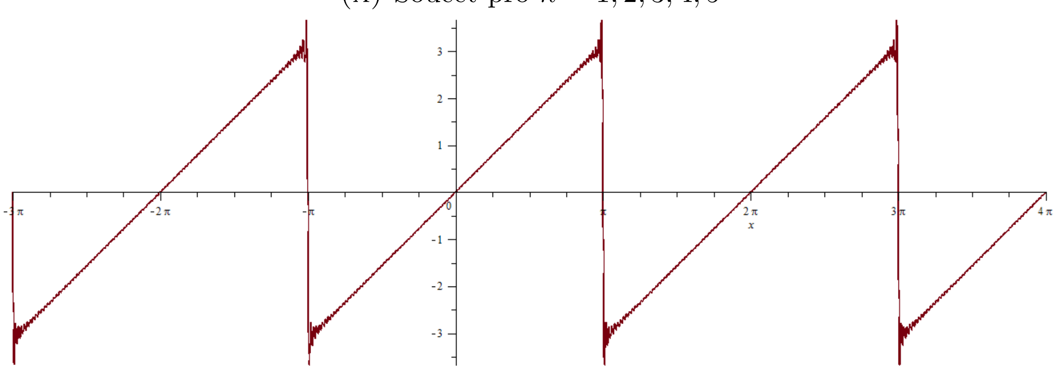
Vzhledem ke spojitosti a spojitosti derivace funkce $g(x)$ pro $x \in (-\pi, \pi)$ konverguje tato řada k zadané funkci, tj.

$$F(x) = x, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Pro rozhodnutí k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$ potřebujeme ještě hodnoty v krajních bodech intervalu (body nespojitosti uvnitř intervalu nejsou). Hodnoty v krajních bodech intervalu snadno dopočítáme dle věty 102 (3) jako $F(\pi) = F(-\pi) = 0$. Součet řady na $\mathbb{R}$ je pak dán periodickým opakováním intervalu $[-\pi, \pi]$. □



(A) Součet pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$



(B) Součet pro $n = 100$

Poznamenejme, že nulovost koeficientů a_i není náhodná. Platí totiž, že liché funkce mají tzv. sinový rozvoj. Podobně sudé funkce mají rozvoj kosinový.

Předchozí úvahy lze samozřejmě provést i na libovolném intervalu $[a, b]$ pro funkci $g \in L^2[a, b]$. Ortogonální systém (74) bude mít potom tvar

$$\left\{1, \sin\frac{2\pi x}{b-a}, \cos\frac{2\pi x}{b-a}, \sin\frac{4\pi x}{b-a}, \cos\frac{4\pi x}{b-a}, \dots, \sin\frac{2n\pi x}{b-a}, \cos\frac{2n\pi x}{b-a}, \dots\right\}$$

a Fourierova řada bude

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

s koeficienty

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ukažme si na další liché funkci (rozvoj tedy bude opět sinový) chování Fourierovy řady v případě, že funkce má bod nespojitosti.

Příklad 222. Určete Fourierovu řadu funkce $g(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-1, 1)$ a rozhodněte k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$.

Řešení. Jde o lichou funkci, tedy

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0.$$

Dále

$$\begin{aligned} b_n = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 \\ = \frac{2}{n\pi}[(-1)^{n+1} - (-1)] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] \end{aligned}$$

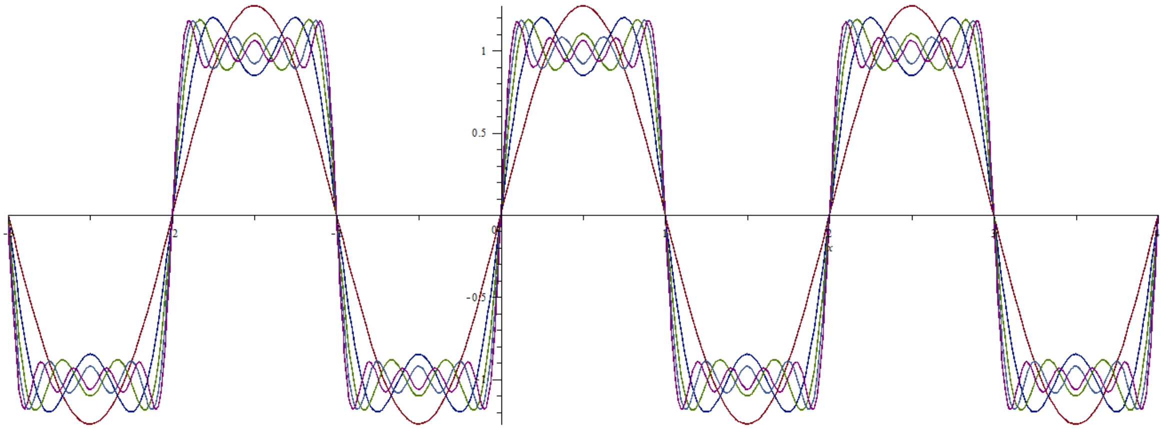
Řada je tedy tvaru (viz (76))

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \dots\right).$$

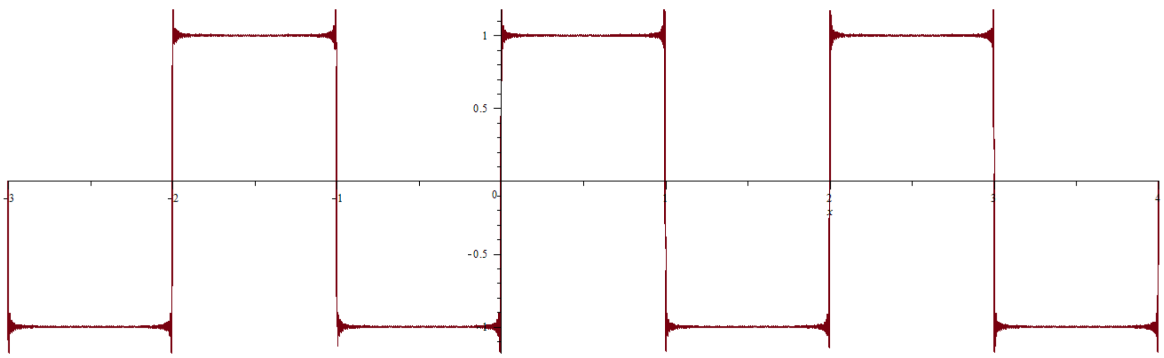
Vzhledem ke spojitosti a spojitosti derivace funkce $g(x)$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ konverguje tato řada k zadané funkci, tj.

$$F(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0), \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Pro rozhodnutí k jaké funkci získaná řada konverguje na $\mathbb{R}$ potřebujeme ještě hodnoty v krajních bodech intervalu a v bodě nespojitosti uvnitř intervalu. Tyto hodnoty snadno dopočítáme dle věty 102 (2) a (3) jako $F(1) = F(-1) = F(0) = 0$. Součet řady na $\mathbb{R}$ je pak dán periodickým opakováním intervalu $[-1, 1]$. □



(A) Součet pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$



(B) Součet pro $n = 100$

8.3. **Fourierova transformace.**

Poznámka 70. Budeme používat následující značení prostorů funkcí.

- $\mathcal{S}[a, b]$ pro všechny po částech spojité funkce na intervalu $[a, b]$. Funkce z $\mathcal{S}[a, b]$ mají v každém bodě intervalu $[a, b]$ konečné jednostranné limity a bodů nespojitosti je nejvýše konečně mnoho. (Tj. mají nejvýše konečný počet nespojitostí a to buď odstranitelných, nebo skoků, jsou tedy na $[a, b]$ ohraničené.)
- $\mathcal{S}^k[a, b], k \in \mathbb{N}$, pro funkce z $\mathcal{S}[a, b]$, jejichž derivace až do řádu k patří do $\mathcal{S}[a, b]$.
- Pro zdůraznění lze psát $\mathcal{S}[a, b] = \mathcal{S}^0[a, b]$.
- V případě neomezeného intervalu budeme značit $\mathcal{S}_c$ po částech spojité funkce s kompaktním nosičem, tj. nulové vně nějakého uzavřeného intervalu. Analogicky $\mathcal{S}_c^k$.

Uvažujme vektorový prostor $\mathcal{S}[a, b]$ všech po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$. Lineární zobrazení $\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ se nazývají (reálné) lineární funkcionály. Například

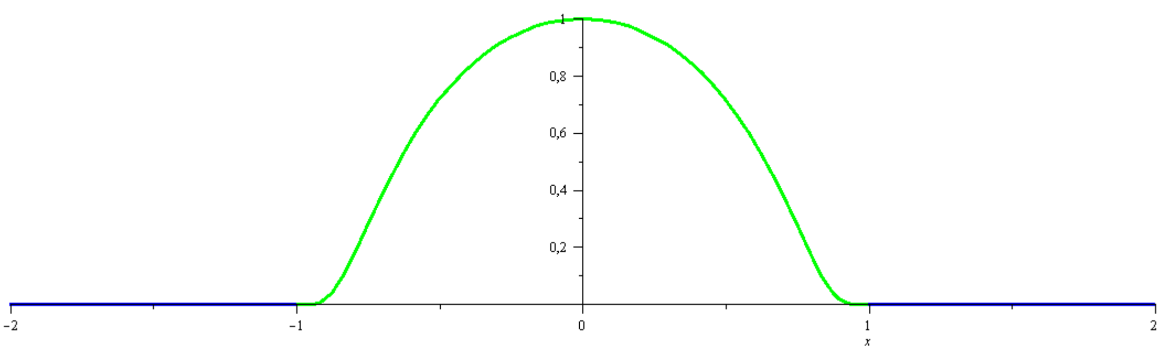
- vyčíslení funkce v jednotlivých bodech je lineární funkcionál $L : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, tedy
$$f \mapsto L(f) = f(x_0);$$
- pomocí integrace můžeme zadat tzv. integrální funkcionál s pomocí pevně zvolené funkce $g(x)$ jako
$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $g(x)$ zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci $f(x)$. Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s $g(x) = 1$ pro všechny body $x \in [a, b]$.

Uvažujme nyní jako váhu například funkci

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2 - a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

Jde o funkci hladkou (tj. existují její derivace všech řádů) na celém $\mathbb{R}$ s kompaktním nosičem (množinou na které je funkce nenulová) v intervalu $(-a, a)$.



(A) Funkce $g(x)$ pro $a = 1$

Integrální funkcionál

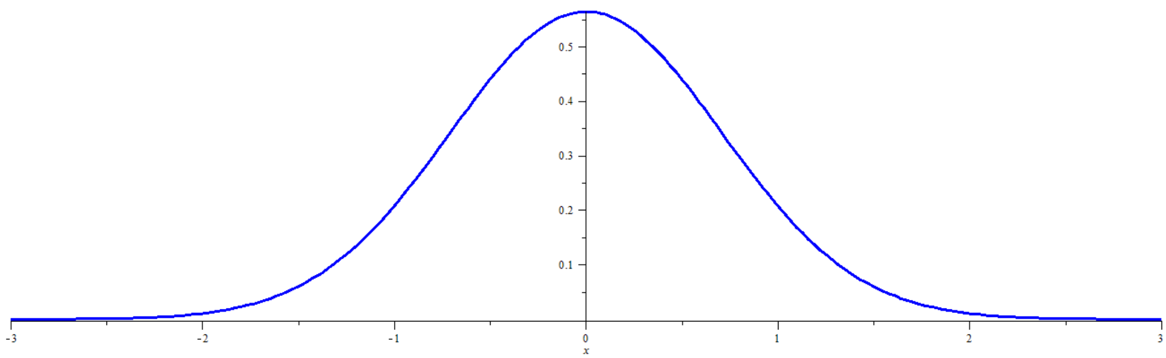
$$L_y(f) = \int_a^b f(x) g(y - x)\, dx$$

je pak možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování“ hodnot funkce f kolem bodu $x = y$ (funkce g má ve svém středu hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti a na obě strany). Jde tedy o váženou kombinaci hodnot s rychle se zmenšující vahou při vzdalování se od počátku. Integrál funkce g na celém $\mathbb{R}$ je konečný, tedy je možné funkci přenásobením konstantou upravit na funkci, jejíž integrál přes celé $\mathbb{R}$ je 1.

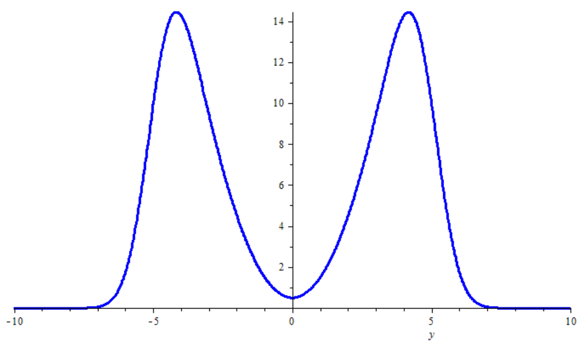
Podobně lze uvažovat tzv. Gaussovu funkci

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}, \quad \text{popř.} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

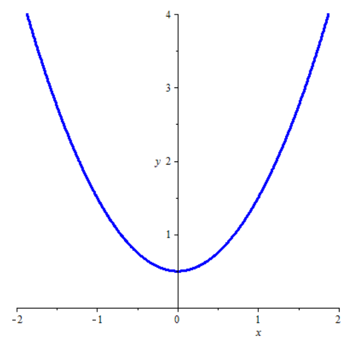
jejíž integrál přes celé $\mathbb{R}$ je 1 a jde tedy opět o „nerovnoměrné průměrování“ dané funkce. Pokud je váhou Gaussova funkce je zřejmé, že význam bodů dále od počátku bude klesat, ale nebude nulový.



(A) Gaussova funkce $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$



(B) $\int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}x$



(C) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}x$

Pohled na integrální funkcionál L_y jako na zprůměrované chování funkce f v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu $a = -\infty$, $b = \infty$. Místo prostoru $\mathcal{S}$ všech po částech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ budeme uvažovat po částech spojité a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce f v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr y může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce $f \mapsto \tilde{f}$, tj.

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx.$$

Této operaci se říká konvoluce funkcí f a g, značíme ji $f*g$. Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní funkce s kompaktním nosičem na celém $\mathbb{R}$.

Pomocí transformace $x = y - t$ se snadno spočte

$$(f*g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx = -\int_{\infty}^{-\infty} f(y-t)g(t)\,dt = (g*f)(y),$$

tedy konvoluce je coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní. Podobně lze ukázat, že platí

- asociativita
$$f*(g*h) = (f*g)*h;$$
- linearita ($c \in \mathbb{R}$)
$$f*(g+h) = f*g + f*h, \qquad f*(cg) = c(f*g) = (cf)*g;$$
- $$|f*g| \le |f| * |g|;$$
- konvoluce dvou spojitých funkcí je spojitá funkce.

Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument f je přenášenou informací, funkce g je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

Příklad 223. Uvažujme funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases}$$

Určete konvoluci $f * g$.

Řešení. Zřejmě je konvoluce daných funkcí pro proměnnou $|y| \geq 2$ nulová. Např. pro $y = 2$ dostáváme, že funkce $f(x)$ je nenulová pro $x \in (-1, 1)$ a funkce $g(2 - x)$ pro $x \in [1, 3]$, tedy jejich součin pro libovolné x je nulový. Pro $y > 2$ se nosiče funkcí $f(x)$ a $g(y - x)$ ještě více vzdalují. Pro $y \leq -2$ podobně (popř. přímo ze sudosti obou funkcí).

Zajímá nás tedy jen interval $(-2, 2)$. Nosič funkce $f(x)$ je stále interval $(-1, 1)$, zatímco nosič funkce $g(y - x)$ je „proměnný“ a jde o interval $(y - 1, y + 1)$. Proto musíme uvažovat dva případy. Nejprve pro $y \in (-2, 0]$ je součin $f(x)g(y - x)$ nenulový pro $x \in (-1, y + 1)$, tedy máme

$$(f * g)(y) = \int_{-1}^{y+1} (1 - x^2) \cdot 1 \, dx = -\frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3}.$$

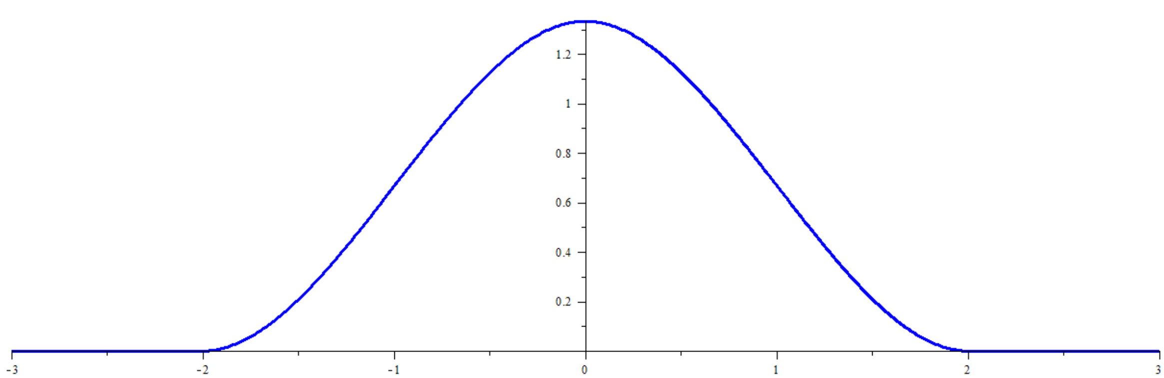
Podobně pro $y \in (0, 2)$ je součin $f(x)g(y - x)$ nenulový pro $x \in (y - 1, 1)$, tedy

$$(f * g)(y) = \int_{y-1}^{1} (1 - x^2) \cdot 1 \, dx = \frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3}.$$

Celkem jsme tedy zjistili, že

$$\begin{aligned} (f * g)(y) &= \begin{cases} -\frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in (-2, 0], \\ \frac{y^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in (0, 2), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{|y|^3}{3} - y^2 + \frac{4}{3} & y \in (-2, 2), \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases} \end{aligned}$$

□



(A) Konvoluce $(f * g)(y)$ z příkladu 223

Poznámka 71. Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostorech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y,x)\,dx$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definiční obor takových funkcionálů je nutné vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

Nyní se zaměříme na jeden mimořádně důležitý případ integrálních operátorů, tzv. Fourierovu transformaci $\mathcal{F}$, která úzce souvisí s Fourierovými řadami. Připomeňme si základní formuli pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání $\omega = 2\pi/T$, kde T je čas jednoho oběhu

$$\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t.$$

Zjevně funkce $\cos\omega nt$, $\sin\omega nt$ tvoří ortogonální systém funkcí s periodou T a jejich velikosti na intervalu délky periody jsou $\sqrt{T/2}$, např.

$$||\sin\omega nt||^2 = \int_{-T/2}^{T/2} (\sin\omega nt)^2 dt = \frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin ns)^2 ds = T/2.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci $f(t)$ zavedeme její komplexní Fourierovy koeficienty jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega nt}\;dt.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty Fourierových řad

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a těmito čísly c_n

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Při reálném f jsou samozřejmě c_n a c_{-n} komplexně konjugované.

Označíme-li $\omega_n = \omega n$, je původní funkce $f(t)$ s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{i\omega_n t}.$$

Při pevně zvoleném T vyjadřuje výraz $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T$ změnu ve frekvenci způsobenou nárustem n o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence.

Náš další postup bude spočívat v limitním přechodu $T \to \infty$. Přitom se spočetná množina hodnot c_n „zahustí“ na celé kontinuum reálných hodnot a získáme místo Fourierových koeficientů c_n novou funkci $\tilde{f}$.

Koeficient $1/T$ u formule pro c_n je roven $\Delta\omega/2\pi$, takže můžeme řadu pro $f(t)$ přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\Delta\omega\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega_n x}\;dx\,\mathrm{e}^{i\omega_n t}\right).$$

Představme si nyní hodnoty ω_n pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly $[\omega_n, \omega_{n+1}]$ o délce $\Delta\omega$. Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega,$$

kde $g(\omega)$ je funkce nabývající v bodech ω_n hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n x}\; dx.$$

Předpokládejme, že naše funkce f je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé $\mathbb{R}$. Pak můžeme limitně přejít $T \to \infty$ a dojde ke zjemňování normy $\Delta\omega$ našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\; dx.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci f na $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\; dt.$$

Této funkci $\tilde{f}$ říkáme Fourierova trasnformace funkce f, kde koeficient $1/\sqrt{2\pi}$ souvisí s definicí inverzní operace. Naše odvození totiž ukazuje, že pro „rozumné“ funkce $f(t)$ bude platit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\; d\omega.$$

Tím říkáme, že existuje k právě definované Fourierově transformaci $\mathcal{F}$ inverzní operace $\mathcal{F}^{-1}$, které říkáme inverzní Fourierova transformace.

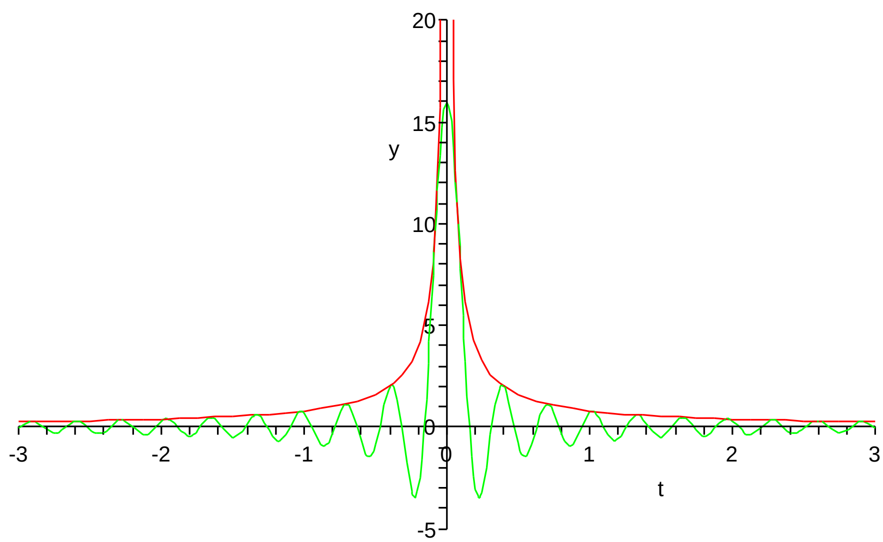
Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem $k(\omega, t) = \mathrm{e}^{\pm i\omega t}$.

8.4. **Vlastnosti Fourierovy transformace.** Fourierova transformace zajímavým způsobem převrací lokální a globální chování funkcí. Začněme jednoduchým příkladem, ve kterém najdeme funkci $f(t)$, která se ztransformuje na charateristickou funkci intervalu $[-w, w]$, tj. $\tilde{f}(x) = 0$ pro $|x| > w$ a $\tilde{f}(x) = 1$ pro $|x| \le w$. Inverzní transformace $\mathcal{F}^{-1}$ nám dává

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^{w} \mathrm{e}^{i\omega t}\; d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{it}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right]_{-w}^{w} = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iwt} - \mathrm{e}^{-iwt}) = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}} \sin(wt).$$

Přímým výpočtem limity v nule spočteme, že $f(0) = 2w(2\pi)^{-1/2}$, nejbližší nulové body jsou v $t = \pm\pi/w$ a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek $x = 0$.

Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro $w = 20$. Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím w naše funkce $f(t)$ stále rychleji „vlní“.



V dalším příkladu spočtěme Fourierovu transformaci derivace $f'(t)$ pro nějakou funkci f. Pro jednoduchost předpokládejme, že f má kompaktní nosič, tj. zejména $\mathcal{F}(f')$ i $\mathcal{F}(f)$ skutečně existují a počítejme metodou per partes

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathrm{e}^{-i\omega t} f(t)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)\end{aligned}$$

Tvrzení 16 (Transformace derivací)**.** *Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj.* $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$, $\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2\mathcal{F}(f), \ldots$.

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Najděme transformaci konvoluce $h = f * g$, kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče.

Při výpočtu zaměníme pořadí integrovanání, v dalším kroku pak zavedeme substituci $t - x = u$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,dx\right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,\mathrm{e}^{-i\omega(u+x)}\,du\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,\mathrm{e}^{-i\omega u}\,du\right) \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),\end{aligned}$$

tedy transformace konvoluce je (až na konstantu) součin transformací.

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce $f * g$ velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny f. Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro g. Prostě spočteme $\mathcal{F}(f * g)$ a podělíme obrazem $\mathcal{F}(g)$. Hovoříme pak o dekonvoluci.

9. Metrické prostory

9.1. Základní pojmy.

Definice 58 (Metrika a norma)**.** Množina X spolu se zobrazením $d : X \times X \to \mathbb{R}$ splňující

$$d(x,y) \geq 0 \text{ a } d(x,y) = 0, \text{ právě když } x = y, \tag{78}$$

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{79}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \tag{80}$$

se nazývá metrický prostor. Zobrazení d je metrika na X.

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ je funkce splňující

$$\|x\| \geq 0, \text{ přičemž } \|x\| = 0, \text{ právě když } x = 0, \tag{81}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|, \text{ pro všechny skaláry } \lambda, \tag{82}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{83}$$

pak funkci $\|\ \|$ nazýváme norma na X a prostor X je normovaný vektorový prostor.

Norma vždy zadává metriku $d(x,y) = \|x - y\|$.

Definice 59 (Cauchyovské posloupnosti)**.** Uvažme libovolnou posloupnost prvků $x_0, x_1, \dots$ v metrickém prostoru X takovou, že pro libolné pevně zvolené kladné reálné číslo ε platí pro všechny dvojice prvků x_i, x_j posloupnosti, až na konečně mnoho výjimek (které závisí na volbě ε),

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

Jinak řečeno, pro každé pevné $\varepsilon > 0$ existuje index N takový, že předcházející nerovnost platí pro všechna $i, j > N$. Takové posloupnosti prvků se říká cauchyovská posloupnost.

Stejně jako u reálných či komplexních čísel bychom rádi, aby každá cauchyovská posloupnost prvků $x_i \in X$ konvergovala k nějaké hodnotě x v následujícím smyslu:

Definice 60. Jestliže pro posloupnost prvků $x_0, x_1, \dots \in X$, pevně zvolený prvek $x \in X$ a pro libovolné kladné reálné číslo ε platí pro všechna i, až na konečně mnoho výjimek (závisejících na volbě ε),

$$d(x_i, x) < \varepsilon,$$

říkáme, že posloupnost x_i, $i = 0, 1, \dots$, konverguje k prvku x, kterému říkáme limita posloupnosti x_i, $i = 0, 1, \dots$ v metrickém prostoru X.

Díky trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro každou dvojici prvků x_i, x_j z konvergentní posloupnosti, s dostatečně velikými indexy (značení jako v definici výše),

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) < 2\varepsilon,$$

a proto je každá konvergentní posloupnost také cauchyovská.

Definice 61 (Úplné metrické prostory)**.** Metrické prostory, kde platí i obrácené tvrzení, tj. že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní nazýváme úplné metrické prostory.

Stejně jako v případě reálných čísel můžeme zformulovat konvergenci pomocí „otevřených okolí“.

Definice 62 (Otevřené a uzavřené množiny)**.** Otevřené ε–okolí prvku x v metrickém prostoru X (stručně ε–okolí) je množina

$$\mathcal{O}_\varepsilon(x) = \{y \in X;\ d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Podmnožina $U \subset X$ je otevřená, jestliže obsahuje s každým svým bodem i nějaké jeho ε–okolí. Pomnožina $W \subset X$ je uzavřená, jestliže je její doplněk $X \setminus W$ otevřenou množinou.

Namísto ε–okolí hovoříme také o (otevřené) ε–kouli se středem v x. V případě normovaného prostoru si vystačíme s ε–koulemi se středem v nule, jejichž přičtením k danému prvku x dostaneme právě jeho ε–okolí.

Hromadné body podmnožiny $A \subset X$ jsou takové $x \in X$, ke kterým konverguje posloupnost bodů z A neobsahující bod x.

Věta 103. *Množina je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body*

Důkaz. Skutečně, A je uzavřená, právě když pro každý bod $x \notin A$ existuje nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že celé ε–okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ má s A prázdný průnik. Pokud by tedy A byla uzavřená a x byl hromadný bod množiny A, který do A nepatří, pak v libovolném takovém ε–okolí takového x leží nekonečně mnoho bodů množiny A, což je spor.

Naopak předpokládejme, že A obsahuje všechny své hromadné body a uvažme $x \in X \setminus A$. Pokud by v každém ε–okolí bodu x existoval bod $x_\varepsilon \in A$, pak postupně volbami $\varepsilon = 1/n$ dostaneme posloupnost bodů $x_n \in A$ konvergující k x. Pak by ovšem x musel být hromadným bodem, a tedy v A, takže opět máme spor. □

Pro každou podmnožinu A v metrickém prostoru X definujeme její vnitřek jako množinu těch bodů v A, které do A patří i s celým svým nějakým okolím. Dále definujeme uzávěr $\bar{A}$ množiny A jako sjednocení původní množiny A s množinou všech jejích hromadných bodů.

Poznámka 72.

- Libovolný průnik a libovolné konečné sjednocení uzavřených množin v metrickém prostoru je opět uzavřená množina.
- Libovolné sjednocení oteřených množin je opět otevřená množina, ale jen konečný průnik otevřených množin je obecně opět otevřená množina.
- Vnitřek množiny A je právě sjednocením všech otevřených množin v A obsažených, zatímco uzávěr A je průnikem všech uzavřených množin obsahujících A.
- Uzavřené a otevřené množiny představují základní pojmy tzv. topologie.
- Pojem konvergence můžeme nyní zformulovat tak, že posloupnost prvků x_i v metrickém prostoru X, $i = 0, 1, \ldots$, konverguje k $x \in X$, právě když pro každou otevřenou množinu U obsahující x jsou všechny body naší posloupnosti, až na konečně mnoho výjimek, obsaženy v U.

Příklad 224. Například

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

což je uzavřená množina a

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1),$$

což je otevřená množina. □

Definice 63. Zobrazení $f : W \to Z$ mezi metrickými prostory je spojité jestliže vzor $f^{-1}(V)$ každé otevřené množiny $V \subset Z$ je otevřená množina ve W. Samořejmě to neznamená nic jiného než tvrzení, že pro každý prvek $z = f(x) \in Z$ a kladné číslo ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechny prvky $y \in W$ se vzdáleností $d_W(x, y) < \delta$ je také $d_Z(z, f(y)) < \varepsilon$.

Zcela stejně jako u reálných funkcí je zobrazení f mezi metrickými prostory spojité právě tehdy, když respektuje konvergence posloupností.

9.2. L_p**–normy.** Začneme na reálných nebo komplexních konečněrozměrných vektorových prostorech $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ a definujeme pro pevné reálné číslo $p \geq 1$ a libovolný vektor $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p\right)^{1/p}.$$

Dokážeme, že takto je definována norma. První dvě vlastnosti z definice jsou zřejmé. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Vyjdeme přitom z tzv. Hölderovy nerovnosti.

Lemma 3 (Hölderova nerovnost)**.** *Pro pevné reálné číslo $p > 1$ a každé dvě n–tice nezáporných reálných čísel x_i a y_i platí*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

kde $1/q = 1 - 1/p$.

Teď už budeme umět dokázat, že $\|\cdot\|_p$ je skutečně norma:

Lemma 4 (Minkowského nerovnost)**.** *Pro každé $p > 1$ a všechny n–tice nezáporných reálných čísel $(x_1, \dots, x_n)$ a $(y_1, \dots, y_n)$ platí*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

K ověření této praktické nerovnosti vede následující trik využívající Hölderovu nerovnost. Jistě platí (všimněme si, že $p > 1$)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

a stejně tak

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Nyní sečtením posledních dvou nerovností, s využitím skutečnosti, že $p + q = pq$ a tedy $(p-1)q = pq - q = p$, dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p},$$

ale $1 - 1/q = 1/p$, takže jde právě o dokazovanou Minkowského nerovnost.

Ověřili jsme si tedy, že na každém konečněrozměrném reálném nebo komplexním vektorovém prostoru máme třídu norem $\|\ \|_p$ pro všechna $p \geq 1$. Kromě toho ještě klademe

$$\|z\|_\infty = \max\{|z_i|,\ i = 1, \dots, n\},$$

což je zjevně také norma.

Všimněme si, že Hölderovu nerovnost můžeme v kontextu těchto norem zapsat pro všechna $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ jako

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

pro všechna $p \geq 1$ a q splňující $1/p + 1/q = 1$, přičemž pro $p = 1$ klademe $q = \infty$.

9.3. **L_p–normy pro posloupnosti a funkce.** Nyní docela snadno zavedeme normy i na vhodných nekonečněrozměrných vektorových prostorech. Vektorový prostor ℓ_p, $p \geq 1$, je množina všech posloupností reálných nebo komplexních posloupností $x_0, x_1, \dots$ takových, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Všechny posloupnosti s omezenými absolutními hodnotami členů tvoří prostor ℓ_∞. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ okamžitě z Minkowského nerovnosti vidíme, že výraz

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

je norma na ℓ_p. Obdobně klademe na ℓ_∞

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|, i = 0, 1, \dots\}$$

a opět dostáváme normu.

Konečně, vraťme se k prostorům funkcí $\mathcal{S}^0[a,b]$ na konečném intervalu $[a,b]$ nebo $\mathcal{S}^0_c[a,b]$ na neohraničeném intervalu. S normou $\| \ \|_1$ jsme se již setkali. Zjevně ale pro každé $p > 1$ a pro všechny funkce v takovém prostoru funkcí existují Riemannovy integrály

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

a můžeme tedy definovat

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Riemannův integrál jsme definovali pomocí limitního přechodu vycházejícího z tzv. Riemannových součtů, které odpovídají dělením D s reprezentanty ξ_i. V našem případě tedy jde o konečné součty

$$S_{D,\xi} = \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p (x_i - x_{i-1}).$$

Hölderova nerovnost použitá na Riemannovy součty součinu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ dá

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)||g(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1})^{1/p} |g(\xi_i)|(x_i - x_{i-1})^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p (x_i - x_{i-1}) \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i)|^q (x_i - x_{i-1}) \right)^{1/q},\end{aligned}$$

přičemž napravo máme zjevně právě součin Riemannových součtů pro integrály $\|f\|_p$ a $\|g\|_q$.

Limitním přechodem tak ověřujeme tzv. Hölderovu nerovnost pro integrály

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b g(x)^q \mathrm{d}x \right)^{1/q}$$

platnou pro všechny nezáporné reálné funkce f a g v našem prostoru po částech spojitých funkcí s kompaktním nosičem

Přesně stejným postupem jako v předchozím odstavci odvodíme z Hölderovy nerovnosti nerovnost Minkowského v její integrální formě:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Je tedy $\| \|_p$ je skutečně norma na vektorovém prostoru všech spojitých funkcí s kompaktními nosiči pro všechna $p > 1$ (a pro $p = 1$ jsme tuto skutečnost ověřili už dávno). Pro celý prostor $S^0[a, b]$ po částech spojitých funkcí budeme sice také slovo norma v tomto kontextu používat, měli bychom ale přitom vědět, že musíme ztotožňovat funkce, které se od sebe liší jen hodnotami v bodech nespojitosti.

Mezi těmito normami je výjimečný případ $p = 2$. V tomto případě jsme mohli odvodit trojúhelníkovou nerovnost daleko jednodušeji pomocí Schwarzovy nerovnosti.

Pro funkce z $\mathcal{S}^0[a, b]$ můžeme definovat i obdobu L_∞–normy na n–rozměrných vektorech. Protože jsou naše funkce po částech spojité, budou pro ně na konečném uzavřeném intervalu vždy existovat suprema absolutních hodnot a klademe tedy pro takovou funkci f

$$\|f\|_\infty = \sup\{f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Všimněme si, že kdybychom za hodnoty $f(x)$ v bodech nespojitosti považovali jak jednostranné limity (které podle naší definice vždy existují), tak samotnou hodnotu funkce, pak můžeme pracovat s maximy místo suprem. Opět je zřejmé, že jde o normu (až na problémy s hodnotami v bodech nespojitosti).

9.4. **Úplné a kompaktní metrické prostory.** Říkáme, že podmnožina $A \subset X$ v metrickém prostoru X je <u>hustá</u>, jestliže je uzávěrem A celý prostor X. Množina A je <u>řídká</u> v X, jestliže je $X \setminus \bar{A}$ hustá. Zjevně je A hustá v X, jestliže každá otevřená množina v celém prostoru X má s A neprázdný průnik.

Ve všech případech L_p norem na po částech spojitých funkcích je vcelku snadné vidět, že nejde o úplné metrické prostory. Snadno se totiž stane, že cauchyovská posloupnost funkcí z našeho vektorového prostoru $\mathcal{S}^0[a, b]$ by měla mít za limitu funkci, která již v tomto prostoru nebude. Vezměme si třeba na intervalu $[0, 1]$ funkce f_n, které jsou nulové na $[0, 1/n)$ a rovny $\sin(1/x)$ na $[1/n, 1]$. Zjevně budou konvergovat ve všech L_p normách k funkci $\sin(1/x)$, ta ale do našich prostorů již nepatří.

Nechť X je metrický prostor s metrikou d, která není úplná. Metrický prostor $\tilde{X}$ s metrikou $\tilde{d}$ takový, že $X \subset \tilde{X}$, d je zúžením $\tilde{d}$ na podmnožinu X a uzávěrem $\bar{X}$ je celý prostor $\tilde{X}$, se nazývá <u>zúplnění metrického prostoru X</u>.

Prakticky stejným postupem, jako lze vytvořit reálná čísla z racionálních, můžeme nyní najít zúplnění libovolného (neúplného) metrického prostoru X. A půjde to udělat jednoznačně.

9.5. **Jednoznačnost zúplnění.** O zobrazení $\varphi : X_1 \to X_2$ mezi metrickými prostory s metrikami d_1 a d_2 řekneme, že je <u>izometrie</u>, jestliže pro všechny prvky x,$y \in X$ platí

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y).$$

Každá izometrie je samozřejmě bijekcí na svůj obraz (plyne z vlastnosti, že vzdálenost libovolných různých prvků je nenulová) a příslušné inverzní zobrazení je také izometrie.

Uvažme nyní dvě vložení hustých podmnožin $\iota_1 : X \to \tilde{X}_1$ a $\iota_2 : X \to \tilde{X}_2$ do dvou zúplnění prostoru X a pišme d, d_1 a d_2 pro příslušné metriky. Evidentně je na husté podmnožině $\iota_1(X) \subset \tilde{X}_1$ dobře definované zobrazení

$$\varphi :\ \iota_1(X) \xrightarrow{\iota_1^{-1}} X \xrightarrow{\iota_2} \tilde{X}_2\ .$$

Jeho obrazem je hustá podmnožina $\iota_2(X) \subset \tilde{X}_2$ a toto zobrazení je navíc zjevně izometrií. Stejně tak funguje i opačné zobrazení $\iota_1 \circ \iota_2^{-1}$.

Každé izometrické zobrazení samozřejmě zobrazuje cauchyovské posloupnosti na cauchyovské posloupnosti. Zároveň budou takové cauchyovské posloupnosti konvergovat ke stejnému prvku v zúplnění právě, když totéž bude platit o jejich obrazech v izometrii φ.

Je-li tedy takové φ definované na husté podmnožině X metrického prostoru $\tilde{X}_1$, jistě bude mít jednoznačné rozšíření na celé $\tilde{X}_1$ s hodnotami v uzávěru obrazu $\varphi(X)$, tj. $\tilde{X}_2$.

Podle předchozí úvahy tedy existuje jediné zozšíření φ na zobrazení $\tilde{\varphi} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, které je bijektivní izometrií. Jsou tedy v tomto smyslu skutečně $\tilde{X}_1$ a $\tilde{X}_2$ stejné.

Věta 104 (Věta o zúplnění)**.** *Nechť X je metrický prostor s metrikou d, která není úplná. Pak existuje jeho zúplnění $\tilde{X}$ s metrikou $\tilde{d}$ a to jednoznačně až na bijektivní izometrie.*

Zobrazení $F : X \to X$ na metrickém prostoru X s metrikou d se nazývá kontrahující zobrazení, jestliže pro nějakou reálnou konstantu $0 \le C < 1$ a všechny prvky x, y v X platí

$$d(F(x), F(y)) \le C\, d(x, y).$$

Věta 105 (Banachova věta o kontrakci)**.** *Je-li F kontrahující zobrazení na úplném metrickém prostoru X, pak existuje jeho pevný bod $z \in X$, tj. $F(z) = z$.*

Pro libovolnou množinu A v metrickém prostoru X s metrikou d nazýváme reálné číslo

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

průměrem množiny A. O množině A říkáme, že je omezená, jestliže $\operatorname{diam} A < \infty$.

Věta 106 (Cantorova věta o průniku)**.** *Je-li $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_i \supset \dots$ neklesající řetězec neprázdných uzavřených podmnožin v úplném metrickém prostoru X a $\operatorname{diam} A_i \to 0$, pak existuje právě jeden bod $x \in X$ patřící do průniku všech A_i.*

Věta 107 (Bairova věta o průniku hustých množin)**.** *Je-li X úplný metrický prostor, pak průnik libovolného spočetného systému otevřených hustých množin A_i je množina hustá v metrickém prostoru X.*

Vnitřním bodem podmnožiny A v metrickém prostoru je takový prvek, který do A patří i s nějakým svým ε–okolím.

Hraniční bod množiny A je takový prvek $x \in X$, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s A tak s doplňkem $X \setminus A$. Hraniční bod tedy může, ale nemusí patřit do samotné množiny A.

Otevřené pokrytí množiny A je takový systém otevřených množin $U_i \subset X$, $i \in I$, že jejich sjednocení obsahuje celé A.

Izolovaným bodem množiny A rozumíme prvek $a \in A$, který má v metrickém prostoru X ε–okolí, jehož průnik s A je právě jednobodová množina $\{a\}$.

9.6. **Ohraničené a kompaktní množiny.** Množina A (s prvky z metrického prostoru) se nazývá ohraničená nebo omezená, jestliže je její průměr konečný, tj. existuje kladné reálné číslo r takové, že $d(x, y) \le r$ pro všechny prvky $x, y \in A$. V opačném případě je neohraničená nebo neomezená.

Metrický prostor X se nazývá kompaktní, jestliže v něm má každá posloupnost $x_i \in X$ podposloupnost konvergující k nějakému bodu $x \in X$.

Pro libovolné podmnožiny A, $B \subset X$ v metrickém prostoru X s metrikou d definujeme vzdálenost

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}.$$

Je-li $A = \{x\}$ jednobodová množina, hovoříme o vzdálenosti $\operatorname{dist}(x, B)$ bodu od množiny.

Řekneme, že je metrický prostor X totálně omezený, jestliže ke každému kladnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina A taková, že

$$\operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon$$

pro všechny body $x \in X$. Připomeňme, že metrický prostor je omezený, jestliže má celé X konečný průměr.

Je okamžitě vidět, že totálně omezený prostor je také omezený. Skutečně, průměr konečné množiny je vždy konečný a jeli A množina z definice totální omezenosti příslušná k ε, pak vzdálenost dvou bodů $d(x, y)$ můžeme vždy shora odhadnout součtem $\operatorname{dist}(x, A)$, $\operatorname{dist}(y, A)$ a $\operatorname{diam} A$, což je konečné číslo.

V případě metriky na podmožině konečněrozměrného euklidovského prostoru tyto pojmy splývají.

Věta 108. *Následující podmínky na metrický prostor X jsou ekvivalentní*

(1) *X je kompaktní,*
(2) *každé otevřené pokrytí X obsahuje konečné pokrytí,*
(3) *X je úplný a totálně omezený.*

10. Polynomy a interpolace

Následující kapitola je zde ponechána pro zájemce a pro případně využití v dalších kurzech.

Citace z [8, str. 237]: „V této kapitole začneme budovat nástroje umožňujících modelování závislostí, které nejsou ani lineární ani diskrétní. S takovou potřebou se často setkáme, když popisujeme systém vyvíjející se v čase a to ne jen v několika vybraných okamžicích, ale „souvisle“, tj. pro všechny možné okamžiky. Někdy je to přímo záměr či potřeba (třeba ve fyzikálních modelech klasické mechaniky), jindy je to vhodné přiblížení diskrétního modelu (třeba u ekonomických, chemických nebo biologických modelů).“

Polynomem nad $\mathbb{R}$ rozumíme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané výrazem

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, jsou pevně daná čísla (koeficienty).

Pokud je $a_n \neq 0$, říkáme, že polynom f je stupně n. Stupeň nulového polynomu není definován.

Pro polynomy f stupně n a g stupně m, existují jednoznačně určené polynomy q a r takové, že stupeň r je menší než m nebo je $r = 0$ a $f = q \cdot g + r$, viz [8, str. 238]. Je-li pro nějaký prvek $b \in \mathbb{R}$ hodnota $f(b) = 0$, pak to znamená, že v podílu $f(x) = q(x)(x - b) + r(x)$ musí být $r = 0$. Jinak by totiž nebylo možné dosáhnout $f(b) = q(b) \cdot 0 + r$, kde stupeň r je nulový. Říkáme, že b je kořen polynomu f. Stupeň q je pak právě $n - 1$. Pokud má q opět kořen, můžeme pokračovat a po nejvýše n krocích dojdeme ke konstantnímu polynomu. Dokázali jsme tedy, že každý nenulový polynom nad $\mathbb{R}$ má nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odtud již snadno dovodíme i následující pozorování.

Lemma 5. *Dva polynomy f a g nad $\mathbb{R}$ jsou si rovny (jako zobrazení), právě když mají shodné koeficienty.*

Důkaz. Předpokládejme $f = g$, tj. $f - g = 0$ jako zobrazení. Polynom $(f - g)(x)$ tedy má nekonečně mnoho kořenů, což je možné pouze tehdy, je-li nulovým polynomem. □

Příklad 225. Uvědomme si, že u konečných polí samozřejmě takové tvrzení neplatí. Uvažte např. polynom $p(x) = x^2 + x$ nad $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Potom je $p(0) = 0$ a $p(1) = 1 + 1 = 0$, ale $p(x)$ není nulový polynom. □

Hornerovo schéma je praktický nástroj pro výpočet hodnoty polynomu v nějakém bodě (v důsledku i pro výpočet kořenu polynomu a podílu po dělení příslušným kořenovým činitelem). Uvažme polynom

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

a pevně zvolený bod $x_0 \in \mathbb{R}$. Uvažujme postupně hodnoty

$$b_0 := a_n, \quad b_1 := x_0\, b_0 + a_{n-1}, \quad b_2 := x_0\, b_1 + a_{n-2}, \quad b_3 := x_0\, b_2 + a_{n-3}, \quad \ldots,$$

$$\ldots, \quad b_{n-1} := x_0\, b_{n-2} + a_1, \quad b_n := x_0\, b_{n-1} + a_0 = f(x_0).$$

Tj. násobíme číslo x_0 koeficientem a_n a přičteme koeficient a_{n-1}, pak to celé vynásobíme číslem x_0 a přičteme koeficient a_{n-2}, atd. Nakonec takto získáme hodnotu polynomu $f(x)$ v bodě x_0. Postup zapisujeme do tabulky takto

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	a_1	a_0
x_0	$b_0 := a_n$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	$b_n = f(x_0)$

Zejména, je-li poslední koeficient $b_n = f(x_0) = 0$, pak je číslo x_0 kořenem polynomu $f(x)$, tj. platí rovnost $f(x) = (x - x_0)\,g(x)$, kde $g(x)$ je polynom stupně $n-1$. Současně dostáváme z Hornerova schématu koeficienty polynomu $g(x)$, tj.

$$g(x) = b_0\,x^{n-1} + b_1\,x^{n-2} + b_2\,x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}\,x + b_{n-1}.$$

Příklad 226. Uvažujme polynom $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 18$. Pak pro jeho hodnotu v bodě $x_0 = 1$ platí

	3	-2	1	-18
1	3	1	2	-16

neboli $f(1) = -16$ a číslo $x_0 = 1$ není kořenem tohoto polynomu. Naopak, pro $x_0 = 2$ máme

	3	-2	1	-18
2	3	4	9	0

neboli číslo $x_0 = 2$ je kořenem tohoto polynomu. Pro polynom $f(x)$ pak platí, že

$$f(x) = (x-2)\,(3x^2 + 4x + 9),$$

což lze jednoduše ověřit zpětným roznásobením.

10.1. **Interpolace.** Citace z [8, str. 239]: „Často je užitečné zadat snadno počítatelný vztah pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných bodech $x_0, \dots, x_n$. Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom stupně $n+1$

$$f(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\dots\,(x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a nikde jinde. To ale není jediná polynomiální odpověď, protože požadovanou vlastnost má i nulový polynom. Ten je přitom jediný s touto vlastností ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše n. Obdobně to dopadne i v obecném případě.“

Věta 109. *Pro každou množinu různých bodů $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a předepsané hodnoty $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden polynom f stupně nejvýše n (případně nulový polynom), pro který platí*

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Důkaz. Označme si prozatím neznámé koeficienty polynomu f stupně n

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Dosazením požadovaných hodnot dostaneme systém $n+1$ rovnic pro stejný počet neznámých koeficientů a_i

$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \cdots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\ &\vdots \\ a_0 + x_n a_1 + \cdots + (x_n)^n a_n &= y_n. \end{aligned}$$

Jak je známo z lineární algebry, tento systém lineárních rovnic má právě jedno řešení pokud je determinant jeho matice různý od nuly. Musíme tedy vyšetřit tzv. Vandermondův determinant

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^n \end{vmatrix},$$

pro který platí $V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i,j=0,\dots,n, i>j}(x_i - x_j)$, tedy

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,n \\ i>j}} (x_i - x_j) \neq 0,$$

protože jsou body $x_0, \dots, x_n$ (po dvou) různé. Odtud ale vyplývá jednoznačná existence hledaného polynomu. Protože polynomy jsou jako zobrazení stejné, právě když mají stejné koeficienty, věta je dokázána. $\square$

Jednoznačně určený polynom f z předchozí věty nazýváme interpolační polynom pro hodnoty y_i v bodech x_i.

Citace z [7]: „Na první pohled se může zdát, že reálné nebo případně racionální polynomy, tj. polynomiálně zadané funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tvoří hezkou velikou třídu funkcí jedné proměnné. Můžeme jimi proložit jakékoli sady předem zadaných hodnot. Navíc se zdají být snadno vyjádřitelné, takže by s jejich pomocí mělo být dobře možné počítat i hodnoty těchto funkcí pro jakoukoliv hodnotu proměnné x. Při pokusu o praktické využití v tomto směru ovšem narazíme hned na několik problémů.

Prvním z nich je potřeba rychle vyjádřit polynom, kterým zadaná data proložíme. Pro řešení výše diskutovaného systému rovnic totiž budeme obecně potřebovat čas úměrný třetí mocnině počtu bodů, což při objemnějších datech je jistě těžko přijatelné. Podobným problémem je pomalé vyčíslení hodnoty polynomu vysokého stupně v zadaném bodě. Obojí lze částečně obejít tak, že zvolíme vhodné vyjádření interpolačního polynomu (tj. vybereme lepší bázi příslušného vektorového prostoru všech polynomů stupně nejvýše n, než je ta nejobvyklejší $1, x, x^2, \dots, x^n$).“

10.2. **Lagrangeův interpolační polynom.** Sestrojíme si nejprve pomocné polynomy ℓ_i s vlastností

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Zřejmě musí být tyto polynomy až na konstantu rovny výrazům

$$(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

a proto

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

Hledaný Lagrangeův interpolační polynom pak je dán jako

$$f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \dots + y_n\ell_n(x).$$

Citace z [8, str. 241]: „Toto vyjádření má nevýhodu ve velké citlivosti na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i, protože se v ní těmito rozdíly dělí. (Pozn.: všimněme si ale, že přímá konstrukce Lagrangeova polynomu může nahradit existenční část důkazu v předchozí Větě 109.)

Další nepříjemností je velice špatná stabilita hodnot reálných nebo racionálních polynomů při zvětšující se hodnotě proměnné x. Brzy budeme mít nástroje na přesný popis kvalitativního chování funkcí, nicméně i bez nich je zřejmé, že podle znaménka koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu se hodnoty velice rychle při rostoucím x vydají buď do plus nebo do mínus nekonečna. Ani toto znaménko koeficientu u nejvyššího stupně se ale u interpolačního polynomu při malých změnách prokládaných hodnot nechová stabilně.“

Viz soubor <interpolace.pdf>.

Příklad 227. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(2) = 1, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = -1, \quad P(5) = 6.$$

Tento příklad a jeho řešení je převzat z [8, str. 237–238].

Řešení. Řešíme buď přímo, tj. sestavením soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Předpokládáme polynom ve tvaru $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$. Víme, že polynom stupně nejvýše tři splňující podmínky v zadání je dán jednoznačně.

$$\begin{aligned}
a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\
a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \\
a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= -1 \\
a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 6.
\end{aligned}$$

Každá rovnice vznikla z jedné z podmínek v zadání.

Druhou možností je vytvořit hledaný polynom pomocí fundamentálních Lagrangeových polynomů:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 1 \cdot \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 0 \cdot (\dots) + \\
&\quad + (-1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 6 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \\
&= \frac{4}{3}\,x^3 - 12\,x^2 + \frac{101}{3}\,x - 29.
\end{aligned}$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou samozřejmě jediným řešením výše sestavené soustavy lineárních rovnic. □

10.3. **Derivace polynomu.** Derivace polynomu je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně nejvýše n do prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ polynomů stupně nejvýše $n-1$ takové, že každý polynom x^k standardní báze je zobrazen na polynom kx^{k-1}. Tuto operaci značíme $'$.

Příklad 228.

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^{100})' = 100x^{99}, \quad (1)' = 0.$$

□

Z linearity tohoto zobrazení tedy plyne, že derivace polynomu

$$P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

je polynom

$$P'(x) = n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \cdots + 2\,a_2\,x + a_1.$$

Druhá derivace polynomu je opět lineární zobrazení prostoru $\mathcal{P}_n$ do prostoru $\mathcal{P}_{n-2}$ definované jako iterace výše uvedeného zobrazení derivace. Tj. polynom x^k standardní báze je zobrazen na polynom $k(k-1)x^{k-2}$. Tuto operaci značíme $''$.

Příklad 229.

$$(x)'' = (1)' = 0, \quad (x^2)'' = (2x)' = 2, \quad (x^3)'' = (3x^2)' = 6x,$$
$$(x^{100})'' = (100x^{99})' = 9900x^{98}, \quad (1)'' = (0)' = 0.$$

□

Více se o derivacích (nejen polynomů) dozvíte později v tomto semestru.

10.4. **Hermitův interpolační polynom.** Citace z [8, str. 243]: „Uvažme opět $m+1$ po dvou různých reálných hodnot $x_0, \dots, x_m$, tj. $x_i \neq x_j$ pro všechna $i \neq j$. Budeme chtít zase prokládat pomocí polynomů předem dané hodnoty, tentokrát ale budeme vedle hodnot předepisovat i první derivace. Tj. předepíšeme y_i a y_i' pro všechna i. Hledáme polynom f, který bude nabývat těchto předepsaných hodnot a derivací.“

Zcela analogicky jako u interpolace pouhých hodnot obdržíme pro neznámé koeficienty polynomu $f(x) = a_n x^n + \dots a_0$ systém rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 + x_0 a_1 + \cdots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\
&\vdots \\
a_0 + x_m a_1 + \cdots + (x_m)^n a_n &= y_m \\
a_1 + 2x_0 a_2 + \cdots + n(x_0)^{n-1} a_n &= y_0' \\
&\vdots \\
a_1 + 2x_m a_2 + \cdots + n(x_m)^{n-1} a_n &= y_m'.
\end{aligned}$$

Toto je systém $2m+2$ rovnic pro $n+1$ neznámých. Volbou stupně hledaného polynomu $n = 2m+1$ bude determinant tohoto systému rovnic nenulový a tudíž bude existovat právě jedno řešení. Nalezený polynom nazýváme Hermitův interpolační polynom.

Příklad 230. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

Řešení. Máme $m = 1$ a hledáme polynom stupně $n = 2m+1 = 3$, tj. $P(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Dosazením za $x = 1$ a $x = 2$ do výrazu pro $P(x)$ a $P'(x)$ dostaneme systém

$$\begin{aligned}
P(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0, \\
P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3, \\
P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1, \\
P'(2) &= 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3.
\end{aligned}$$

Vyřešením tohoto systému dostaneme $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$. □

Stejně jako při konstrukci Lagrangeova polynomu lze Hermitův interpolační polynom zkonstruovat přímo pomocí tzv. fundamentálních Hermitových polynomů. Podrobnosti viz [8, str. 244].

Nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně $n = 1$, tj.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnicí v bodě x_0.

Příklad 231. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 2, \quad P'(1) = 3.$$

Řešení.

$$P(x) = P(1) + P'(1) \cdot (x - 1) = 2 + 3(x - 1) = 3x - 1.$$

□

Když zadáme hodnotu a derivaci ve dvou bodech, tj. $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$, $f(x_1) = y_1$, $f'(x_1) = y'_1$ pro dva různé body x_0 a x_1, dostaneme ještě pořád snadno počítatelný problém. Ukažme si jej ve zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Příklad 232. Hledáme polynom stupně $n = 2m+1 = 3$, tj. $f(x) = a_3\,x^3+a_2\,x^2+a_1\,x+a_0$. Dosazením za $x = 0$ a $x = 1$ do výrazu pro $f(x)$ a $f'(x)$ dostaneme systém

$$f(0) = a_0 = y_0, \quad f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = y_1, \quad f'(0) = a_1 = y'_0, \quad f'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = y'_1.$$

Tedy matice tohoto systému a její inverze mají tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Vypočtěte si tuto inverzi!)

Přímým vynásobením $A \cdot (a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ pak vyjde vektor $(y_0, y_1, y'_0, y'_1)^T$, neboli

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_0 - 2y_1 + y'_0 + y'_1 \\ -3y_0 + 3y_1 - 2y'_0 - y'_1 \\ y'_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y'_0 + y'_1)\,x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y'_0 - y'_1)\,x^2 + y'_0\,x + y_0.$$

□

Obdobně lze předepisovat libovolný konečný počet derivací v jednotlivých bodech a vhodnou volbou stupně polynomu obdržíme vždy jednoznačné interpolace.

Bohužel, u těchto interpolací pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky.

10.5. **Interpolace splajny.** Citace z [8, str. 241]: „Jak jsme viděli na obrázcích demonstrujících nestabilitu interpolace jedním polynomem dostatečně vysokého stupně, malé lokální změny hodnot zapříčiňovaly dramatické celkové změny chování výsledného polynomu. Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků nízkých stupňů, které ale musíme umět rozumně navazovat.

Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů polynomem stupně nejvýše jedna (pozn.: vzniká lomená čára). Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změní.
O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermitův polynom 3. stupně, viz výše. ... Takové polynomiální přiblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že první derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímo se proto vnucuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně.“

Definice 64 (**Kubický splajn).** Nechť $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ jsou reálné hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty $y_0, \ldots, y_n$. Kubickým interpolačním splajnem pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující podmínky:

- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i třetího stupně, $i = 1, \ldots, n$,
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \ldots n$,
- $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ pro všechny $i = 1, \ldots, n-1$,
- $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ pro všechny $i = 1, \ldots, n-1$.

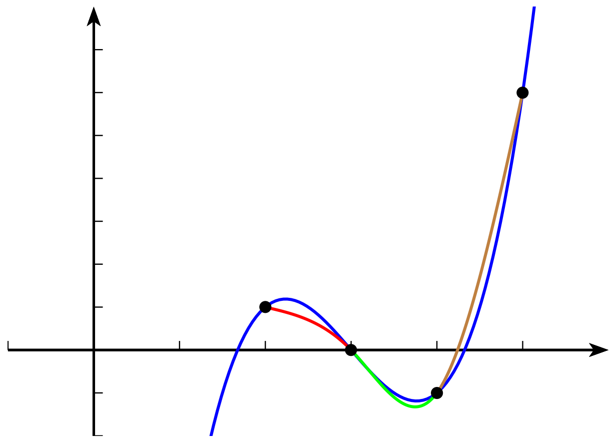
□

Citace z [8, str. 245]: „Kubický splajn pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n + (n-1) + (n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné.“ Při praktickém použití se dodávají hodnoty pro první derivace v krajních bodech, tzv. „úplný splajn“, nebo jsou zadány druhé derivace v krajních bodech jako nula, tzv. „přirozený splajn“.

Citace z [8, str. 246]: „Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermitových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Při vhodném uspořádání se však dosáhne matice systému, která má nenulové prvky prakticky jen ve třech diagonálách, a pro takové existují vhodné numerické postupy, které umožní splajn počítat také v čase úměrném počtu bodů.“

Příklad 233. Přirozený kubický interpolační splajn s hodnotami z Příkladu 227 (interpolace). Řešení je tvaru

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{8}{15}x^3 + \frac{16}{5}x^2 - \frac{103}{15}x + \frac{31}{5} & x \leq 3, \\ \frac{8}{3}x^3 - \frac{128}{5}x^2 + \frac{1193}{15}x - \frac{401}{5} & 3 \leq x \leq 4, \\ -\frac{32}{15}x^3 + 32x^2 - \frac{2263}{15}x + 227 & x \geq 4. \end{cases}$$



Obrázek 16. Srovnání kubického splajnu a Lagrangeova interpolačního polynomu.

□

Více ve skriptech [8, Odstavec 5.1].

Literatura

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* 6th Edition, John Wiley & Sons, New York, NY, 1997.

[2] B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy,* Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.

[3] Z. Došlá, J. Kuben, *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné,* Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[4] Z. Došlá, V. Novák, *Nekonečné řady,* Masarykova univerzita, Brno, 1998.

[5] O. Došlý, P. Zemánek, *Integrální počet v* $\mathbb{R}$, Masarykova univerzita, Brno, 2011.

[6] V. Novák, *Integrální počet v* $\mathbb{R}$, Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[7] M. Panák, J. Slovák, *Matematika drsně a svižně,* kapitoly 5–7, elektronický text k předmětu FI: MB102, 2011.

[8] J. Slovák, M. Panák, M. Bulant a kolektiv, *Matematika drsně a svižně,* Masarykova univerzita, Brno, 2013. Dostupné z `http://goo.gl/KUbMCO`.

[9] G. B. Thomas, R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry,* 9th Edition, Addison-Wesley, Reading, MA, 1996.

[10] Matematika online [cit. 2014-03-04], Ústav matematiky FSI VUT Brno, Dostupné z `http://mathonline.fme.vutbr.cz/`.