Nekonečné řady

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy

Obsah

Definice 1

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Položme $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Tuto posloupnost nazýváme *posloupnost částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, přičemž symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme nekonečný součet $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, jehož hodnotu definujeme takto:

- Jestliže existuje konečná limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, definujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \left(= \lim_{n\to\infty} s_n \right)$$

  a řekneme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*.
- Jestliže limita neexistuje, nebo je rovna nekonečnu, řekneme, že tato řada *diverguje*, a to k $\pm\infty$ v případě nevlastní limity (píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$), resp. řekneme, že *osciluje*, když $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Číslo a_n se nazývá *n–tý člen*, číslo s_n se nazývá *n–tý částečný součet* řady.

Příklad 1

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla. Tedy je to nekonečná řada, kde $a_n := aq^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické řady, přičemž q může být kladné či záporné. Posloupnost částečných součtů pro geometrickou řadu odvodíme snadno:

$$s_n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-2}+aq^{n-1}, qs_n = aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}+aq^n.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$s_n - qs_n = a - aq^n \quad \Rightarrow \quad s_n(1-q) = a(1-q^n).$$

- Je-li $q = 1$, potom je zřejmě $s_n = na$.
- Je-li $q \neq 1$, potom je
$$s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ihned tedy dostáváme

- Geometrická řada s $a = 0$ (a $q \in \mathbb{R}$ libovolným) *konverguje* (k 0), protože v tomto případě jsou $s_n = 0$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = 1$ zřejmě *diverguje* (k $\pm\infty$ podle znaménka čísla a), protože v tomto případě jsou $s_n = na$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = -1$ zřejmě *osciluje*, protože je v tomto případě $s_n = \{a, 0, a, 0, a, 0, \dots\}$ a limita této posloupnosti neexistuje.

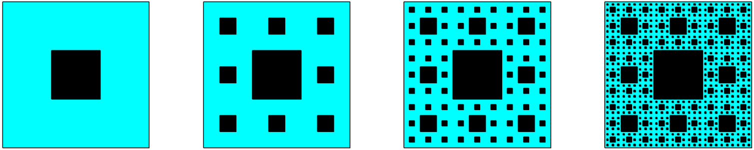
Věta 1

Nechť $a \neq 0$. Potom geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konverguje právě tehdy když $|q| < 1$. V tomto případě (a také v případě $a = 0$) je pak její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Příklad 2

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \qquad \left(a = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}\right)$
- Plocha Sierpinského koberce (o straně 1 jednotka)



$$P = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{9^n} = 1 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1 - 1 = 0$$

Příklad 3

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{3}{4}$

Příklad 4

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (Grandiho řada)

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \begin{cases} -1 & n \text{ liché} \\ 0 & n \text{ sudé} \end{cases}$$

Limita s_n neexistuje, řada osciluje.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonická řada)

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots \\ \geq &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

$s_{2^n} \to \infty$, $1 + n \cdot \frac{1}{2} \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Poznámka

1. $\sum a_n$ . . . rozumí se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. Charakter chování řady (konvergence, divergence, oscilace) zachováme, jestliže změníme konečný počet členů posloupnosti a_n. (Zvláště vynecháme-li konečný počet prvků např. na začátku.)
3. Často nás spíše než součet řady zajímá, zda řada konverguje, resp. diverguje, aniž nás zajímá konkrétní hodnota součtu.

Věta 2 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže řada $\sum a_n$ *konverguje, pak limita* $\lim a_n = 0$.

Důkaz.

Když $s = \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$ existuje a je konečná, pak $a_n = s_n - s_{n-1}$, tedy $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. $\square$

Poznámka

Opačné tvrzení neplatí – viz harmonickou řadu.

Věta 3 (Asociativní zákon pro nekonečné řady)

Nechť $\sum a_n = a$ *je konvergentní. Nechť* n_k *je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel,* $n_0 = 0$ *a* $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$*. Pak řada* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje se stejným součtem jako původní řada, tj.* $\sum b_k = a$*.*

Příklad 5

$\sum(-1)^n$ – asociativní zákon neplatí!

Věta 4 (Cauchyovo–Bolzanovo kritérium konvergence)

Řada $\sum a_n$ je konvergentní právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů s_n je cauchyovská, tj.
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0, \forall n > n_0$ *a* $\forall m \in \mathbb{N} : |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$

Věta 5

Nechť $\sum a_n = a$ *a* $\sum b_n = b$ *jsou konvergentní řady a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pak i řada $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ *je konvergentní a platí*

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

Poznámka

$\sum a_n = a$ a $\sum b_n = \infty$, pak $\sum(a_n + b_n) = \infty$

Řadami s nezápornými členy rozumíme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro které $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (Často budemem uvažovat i řady s kladnými členy, tedy $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.)
Je zřejmé, že součet nemůže být záporný (nekladný) a nemůže nastat oscilace. Tj. limita částečných součtů existuje a platí $0 \leq \lim s_n \leq \infty$, přičemž $\lim s_n = 0$ pouze pokud $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 6 (Prosté srovnávací kritérium)

Nechť $a_n, b_n \geq 0$ a nechť $a_n \leq b_n$ platí pro velká n, tj. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$.

- *Je-li $\sum b_n < \infty$, pak $\sum a_n < \infty$.*
- *Naopak, je-li $\sum a_n = \infty$, pak $\sum b_n = \infty$.*

Poznámka

Řada $\sum b_n$ ja majorantní řadou k řadě $\sum a_n$ a řada $\sum a_n$ ja minorantní řadou k řadě $\sum b_n$.

Příklad 6

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady $\sum \frac{1}{n^2}$.

Pro $n \geq 2$ máme $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Pokud dokážeme, že majorantní řada konverguje, lze použít předchozí větu. Pro velká $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{m} \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} \\ &= 1 - \frac{1}{m} \to 1 \text{ pro } m \to \infty,\end{aligned}$$

tedy $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Věta 7 (Integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť* $f(x)$ *je funkce definovaná na intervalu* $[N, \infty)$ *pro nějaké* $N \in [0, \infty)$*, která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí*

$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje } k\ \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Příklad 7

Pomocí integrálního kritéria snadno dokážeme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{diverguje pro } \alpha \leq 1, \\ \text{konverguje pro } \alpha > 1. \end{cases}$$

Věta 8 (Podílové (d'Alambertovo) kritérium)

Nechť $a_n > 0$ *pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *a nechť existuje limita* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, $L \in \mathbb{R}^*$.

- *Je-li* $L < 1$, *pak* $\sum a_n < \infty$;
- *je-li* $L > 1$, *pak* $\sum a_n = \infty$;
- *je-li* $L = 1$, *nelze rozhodnout.*

Poznámka

Pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ i pro $a_n = \frac{1}{n}$ je $L = 1$, přitom jedna řada konverguje a druhá diverguje.

Věta 9 (Odmocninové (Cauchyovo) kritérium)

Nechť $a_n > 0$ *pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *a nechť existuje limita* $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$, $L \in \mathbb{R}^*$.

- *Je-li* $L < 1$, *pak* $\sum a_n < \infty$;
- *je-li* $L > 1$, *pak* $\sum a_n = \infty$;
- *je-li* $L = 1$, *nelze rozhodnout.*

Poznámka

Opět např. pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ i pro $a_n = \frac{1}{n}$ je $L = 1$, přitom jedna řada konverguje a druhá diverguje.

Poznámka

Lze ukázat, že platí

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Tedy pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, potom existuje i limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a tyto dvě limity si jsou rovny.

Navíc, jestliže je podílové kritérium nerozhodnutelné ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$), potom je také odmocninové kritérium nerozhodnutelné ($\sqrt[n]{a_n} \to 1$). Říkáme, že odmocninové kritérium je silnější, než podílové kritérium (každý problém, který lze vyřešit podílovým kritériem, lze vyřešit i odmocninovým kritériem, ale ne naopak).

Příklad 8

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

- $\sum \frac{n^n}{n!}$
  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e > 1$ řada diverguje
- $\sum \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$
  $\lim \sqrt[n]{\frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$ řada konverguje

Poznámka

$\sum a_n, a_n > 0$ a člen a_n má n v exponentu, nebo obsahuje faktoriál. Pak je obvykle výhodné zkusit podílové nebo odmocninové kritérium.
Není-li tomu tak, pak zkusíme srovnávací kritérium s $1/n^\alpha$. Dále je k dispozici integrální kritérium.
Např.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha} = \left|\ln x = t, \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t\right| = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \text{konv.} & \alpha > 1 \\ \text{div.} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Definice 2

Nechť $a_n > 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ se nazývá *alternující řada*.

Poznámka

Alternující řada je také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ a obecně řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ splňující $\operatorname{sgn} f_n = -\operatorname{sgn} f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 10 (Leibnizovo kritérium)

Nechť $a_n > 0$ *je nerostoucí posloupnost. Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *pak alternující řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *konverguje.*

Poznámka

Vzhledem k platnosti nutné podmínky konvergence lze větu 10 formulovat i s ekvivalencí.

Příklad 9

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (Leibnizova řada)

$\frac{1}{n} \to 0, \left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje

Definice 3

Řekneme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje řada $\sum |a_n|$. Řekneme, že řada konverguje *neabsolutně* (relativně), jestliže řada $\sum a_n$ konverguje, ale řada $\sum |a_n|$ diverguje.

Příklad 10

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ je neabsolutně konvergentní – sama konverguje, ale absolutní hodnotou dostaneme harmonickou řadu, která diverguje.

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ je absolutně konvergentní, neboť $\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Věta 11

Je-li řada $\sum a_n$ absolutně konvergentní, pak je konvergentní.
(Tedy z absolutní konvergence plyne konvergence.)

Důkaz.

Podle Cauchyova–Bolzanova kritéria (věta 4) je řada $\sum |a_n|$ konvergentní právě tehdy, když posloupnost $\underbrace{|a_1| + \cdots + |a_n|}_{s_n}$ je cauchyovská, tj.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0, m \in \mathbb{N}:$

$$|s_{n+m} - s_n| = \big||a_{n+m}| + \cdots + |a_{n+1}|\big| < \varepsilon \Rightarrow |a_{n+m} + \cdots + a_{n+1}| < \varepsilon.$$

tedy posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je cauchyovská, tedy řada konverguje. □

Poznámka

Opak neplatí – viz Leibnizovu řadu.

Poznámka

Při rozhodování o konvergenci/divergenci je někdy výhodné otestovat nejprve $\sum |a_n|$ pomocí kritérií o řadách s nezápornými členy. Je-li $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$.

Definice 4

Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Řekneme, že řada $\sum b_n$, kde $b_n = a_{f(n)}$, je *přeřazením* řady $\sum a_n$. Řekneme, že pro řadu $\sum a_n$ platí *komutativní zákon*, jestliže pro libovolnou bijekci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí $\sum a_n = \sum a_{f(n)}$.

Věta 12 (Komutativní zákon pro nekonečné řady)

Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, tj. $\sum |a_n| < \infty$. Pak pro tuto řadu platí komutativní zákon.

Definice 5

Pro posloupnost a_n označme

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad a_n^- = \begin{cases} a_n & a_n \leq 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}.$$

Potom $\{a_n^+\}$ nazýváme *kladná část* a $\{a_n^-\}$ *záporná část posloupnosti* $\{a_n\}$.

Poznámka

Zřejmě platí $a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} = \max\{a_n, 0\}$, resp. $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2} = \min\{a_n, 0\}$.

Věta 13

Nechť $\sum a_n$ *je neabsolutně konvergentní, pak* $\sum a_n^+ = +\infty$ *a* $\sum a_n^- = -\infty$.

Důkaz.

1. $\sum a_n^+ < \infty$ a $\sum a_n^- > -\infty$
2. $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- > -\infty$
3. $\sum a_n^+ < \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$
4. $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$

Kdyby platilo 1, pak $\sum |a_n| = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ konverguje podle věty o konvergenci součtu dvou konvergentních řad $\to$ spor, neboť $\sum |a_n| = \infty$.
Kdyby platilo 2 nebo 3, pak $\sum a_n = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$ a součet bude ∞ (případ 2) nebo $-\infty$ (případ 3) $\to$ spor s $\sum a_n < \infty$.
Tedy nutně $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$. $\square$

Věta 14 (Riemannova věta o přeřazení, velká věta o přeřazení)

Nechť řada $\sum a_n$ *je neabsolutně konvergentní a* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$, $L_1 \leq L_2$. *Pak existuje permutace množiny* $\mathbb{N}$ *taková, že pro posloupnost částečných součtů* t_n *přeřazení řady* $\sum a_{f(n)}$ *(tj.* $t_n = a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)}$*) platí* $\limsup t_n = L_2$ *a* $\liminf t_n = L_1$. *Zejména neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, že diverguje k* $\pm\infty$ *nebo osciluje.*

Důkaz.

Předpokládejme, že $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $L_1 < L_2$ a $L_2 > 0$ (pro ostatní případy je modifikace důkazu zřejmá). Platí $\sum a_n^+ = \infty$ a $\sum a_n^- = -\infty$.

- Existuje $n_1 : a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > L_2$ a nechť n_1 je nejmenší takový index.
- Nechť n_2 je takový index, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{n_2}^- < L_1$ a nechť je nejmenším indexem s takovou vlastností.
- Důležité je, že $a_n \to 0$ (což je nutná podmínka konvergence $\sum a_n$) $\Rightarrow |a_n| \to 0$ a tedy velikost „přelezení/podlezení" hodnot L_1, L_2 se blíží k nule.

Z konstrukce plyne, že $\limsup t_n = L_2$ a $\liminf t_n = L_1$.
(Např. pro $L_1 = -\infty, L_2 = \infty$ budeme součty „rozkmitávat".) $\square$

Poznámka

Konečné řady:

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_m) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_m.$$

Nekonečné řady:

$$\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right) = ?$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n & \cdots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Jednou z hlavních otázek je proto v jakém pořadí následně sčítat.
V literatuře lze najít pro jednotlivé postupy detailní vlastnosti. Např. tzv. Dirichletův (po „elkách“) nebo Cauchyův (po diagonálách) součin.

Věta 15

Nechť řady $\sum a_n, \sum b_n$ *jsou absolutně konvergentní a nechť* $\sum c_n$ *je libovolná nekonečná řada, v níž posloupnost* $\{c_n\}$ *je permutací posloupnosti* $\{a_i b_j\}$ *(tj.* $\{c_n\}$ *je libovolná posloupnost obsahující permutaci prvků z uvedené tabulky). Pak* $\sum c_n$ *konverguje také absolutně a platí* $\sum c_n = c = a \cdot b$*, kde* $\sum a_n = a$*,* $\sum b_n = b$*.*

Definice 6

Předpokládejme, že řada $\sum a_n$ je konvergentní. Výraz $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ se nazývá *zbytek po n-tém členu*, tj. $\sum a_n = s_n + R_n$.

Věta 16

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel a $\lim a_n = 0$. Pak pro zbytek alternující řady $\sum (-1)^{n-1} a_n$ platí $|R_n| < a_{n+1}$.
Navíc $\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n$.

Věta 17

Nechť a_n *je monotónní posloupnost nezáporných čísel, řada* $\sum a_n$ *konverguje a* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *je monotónní a pro* $n \in \mathbb{N} : f(n) = a_n$*. Pak* $R_n \leq \int_n^\infty f(x) \mathrm{d}x$*.*

Příklad 11

Kolik členů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ musíme vzít, aby chyba (zbytek) byla menší než 0,01?

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow n \geq 100.$$

Definice 7

Nechť a_n je posloupnost reálných čísel a $x_0 \in \mathbb{R}$, pak nekonečná řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se nazývá *mocninná řada* se středem x_0 a koeficienty a_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka

- Substitucí $y = x - x_0 \Rightarrow \sum a_n y_n$ lze každou řadu převést na řadu se středem $y_0 = 0$. Můžeme proto uvažovat řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- Mocninná řada vždy konverguje ve svém středu.
- Konvence: $\sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Každá mocninná řada konverguje ve svém středu, protože pro $x = x_0$ se jedná o nulovou řadu. Dále ze srovnávacího kritéria (Věta 6) plyne následující.

Věta 18

Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. *Jestliže tato mocninná řada konverguje pro nějaké $x = c$, potom konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $|x - x_0| < |c - x_0|$.*
2. *Jestliže tato řada nekonverguje (tj. diverguje k $\pm\infty$ nebo osciluje) pro nějaké $x = d$, potom nekonverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $|x - x_0| > |d - x_0|$.*

Věta 19

Nechť $a := \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

- *Je-li* $a = 0$, *pak mocninná řada* $\sum a_n x^n$ *konverguje* $\forall x \in \mathbb{R}$.
- *Je-li* $a = \infty$, *pak řada konverguje pouze ve svém středu* $x_0 = 0$.
- *Je-li* $0 < a < \infty$, *pak řada konverguje* $\forall x \in \mathbb{R} : |x| < R := \frac{1}{a}$ *a diverguje pro* $x \in \mathbb{R} : |x| > R$.

Číslo R *se nazývá poloměr konvergence mocninné řady* $\sum a_n x^n$.

Poznámka

Interval I takový, že pro $x \in I$ příslušná řada (absolutně) konverguje nazýváme intervalem (absolutní) kovergence této řady.

Důkaz.

Předpokládejme, že existuje limita $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = a$. Pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ aplikujeme na řadu $\sum |a_n x^n|$ odmocninové kritérium

$$\lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} = a \cdot |x| \begin{cases} < 1 & \text{konverguje} \\ > 1 & \text{diverguje} \\ = 1 & \text{nevíme} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |x| < \frac{1}{a} = R & \text{řada konv.} \\ |x| > \frac{1}{a} = R & \text{řada div.} \end{cases}$$

□

Poznámka

- Protože platí

$$\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

  lze v případě existence limity podílu použít pro určení poloměru konvergence ji.
- Protože ve zmíněných limitách jsou absolutní hodnoty, získáváme uvnitř intervalu konvergence přímo absolutní konvergenci.
- Pro hodnoty x, kde limity vychází jedna (krajní body intervalu konvergence) tyto hodnoty dosadíme a řešíme konvergenci příslušných číselných řad.

Příklad 12

1. $\sum x^n, \quad a = \lim \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$
   pro $x = -1$ řada osciluje, pro $x = 1$ řada diverguje, řada konverguje (absolutně) pro $x \in (-1, 1)$
2. $\sum \frac{x^n}{n}, \quad a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$
   pro $x = 1$ máme $\sum \frac{1}{n}$, která diverguje (harmonická řada),
   pro $x = -1$ máme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, která konverguje (Leibnizova řada),
   řada konverguje pro $x \in [-1, 1)$, absolutně konverguje pro $x \in (-1, 1)$
3. $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}, \quad R = 1$, konverguje pro $x \in (-1, 1]$, absolutně konverguje pro $x \in (-1, 1)$
4. $\sum \frac{x^n}{n^2}, \quad R = 1, \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně,
   $x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje absolutně, řada konverguje absolutně pro $x \in [-1, 1]$

Příklad 13

$R =?$

1. $\sum \frac{x^n}{n!}$
   $a_n = \frac{1}{n!}$, $R = \lim \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1)n!}{1} = \lim(n+1) = \infty$
   řada konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum n! x^n$
   $a_n = n!$, $R = 0$, řada konverguje pouze pro $x = 0$

Poznámka

Proč se říká poloměr konvergence?

Často se uvažuje řada $\sum a_n z^n, z \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C}$, kde pak místo intervalu konvergence pracujeme s kružnicemi o poloměru $|z|$. Tedy hledáme takové číslo R, kdy daná řada konverguje pro všechny $z \in \mathbb{C}, |z| < R$ a diverguje pro všechny $z \in \mathbb{C}, |z| > R$.

Věta 20

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak $\forall r : 0 < r < R$ řada konverguje na intervalu $[-r, r]$ absolutně (dokonce tzv. stejnoměrně).

Věta 21 (Spojitost)

- *Nechť mocninná řada* $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $0 < R$. *Pak její součet* $f(x) = \sum a_n x^n$ *je funkce, která je spojitá pro* $x \in (-R, R)$.
- *Nechť mocninná řada* $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $0 < R < \infty$ *a předpokládejme, že pro* $x = R$ *je tato řada konvergentní. Pak její součet* $f(x) = \sum a_n x^n$ *je funkce, která je v* $x = R$ *zleva spojitá, tj.*

$$\sum a_n R^n = f(R) = \lim_{x \to R^-} f(x).$$

Obdobně pro $x = -R$.

Věta 22

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$. *Pak* $\forall x \in (-R, R)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

přičemž derivováním se poloměr konvergence nemění.

Věta 23

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$. *Pak* $\forall x \in (-R, R)$ *platí*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

přičemž řada na pravé straně rovnosti má poloměr konvergence opět R.

Věta 24

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$. *Pak* $\forall x \in (-R, R)$ *a libovolný interval* $[c, d] \subseteq (-R, R)$ *platí*

$$\int_c^d \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_c^d x^n \mathrm{d}x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{c^{n+1}}{n+1} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{d^{n+1}}{n+1} \right).$$

Příklad 14

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$\lim \frac{n+1}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje a má tedy smysl pokračovat.

- Využijeme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$. Ihned máme $R = \lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$, tedy pro $x = \frac{1}{2}$ absolutně konverguje.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \int x^{n-1} \mathrm{d}x\right]'$$

$$= x \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right]' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$

- Přímo pomocí částečných součtů máme

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}, \quad \frac{s_n}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Odkud odečtením získáme

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Příklad 15

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Využijeme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Ihned máme $R = \lim \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$, tedy pro $x = \frac{1}{2}$ absolutně konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = [-\ln|1-t|]_0^x = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

Příklad 16

Určete poloměr konvergence a součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n$.

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$$

Pro $x \in (-1, 1)$ máme $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Protože pro $x = 0$ máme ihned $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = 0$, budeme předpokládat, že $x \neq 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \left[\frac{1}{1-x}\right]' \quad \Big/ \cdot x^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2} = \frac{x^3}{(1-x)^2} \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^{n+1} = \frac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^{n} = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}$$

Výsledný vztah platí i pro $x = 0$, tedy lze ho použít pro všechna $x \in (-1, 1)$.

Definice 8

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů, pak se mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývá *Taylorova řada* funkce f. Je-li $x_0 = 0$, pak se řada nazývá *Maclaurinova řada*.

Poznámka

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Problém – platí (a kde) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

Příklad 17

Uvažujme funkci $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ Potom $a_0 = 0, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n \in \mathbb{N}$.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = |x = \frac{1}{t}| = \lim_{t\to\pm\infty} (t \cdot e^{-t^2})$$
$$= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{2t\, e^{t^2}} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = 0$$

Podobně

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

což znamená

$$f(x) \mapsto \sum 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x).$$

Poznámka

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kde ξ je mezi 0 a x, $T_n(x)$ je $(n+1)$-ní částečný součet $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.
Platí $T_n(x) \to f(x)$, pokud $R_n(x) \to 0$.

Věta 25

Nechť funkce f má na intervalu $I = [-r, r]$ derivace všech řádů a existuje konstanta $K > 0$ taková, že

$$|f^{(n)}(x)| \leq K \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pak Maclaurinova řada funkce f konverguje na intervalu $I = [-r, r]$ stejnoměrně k funkci f.

Důkaz.

$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq K \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, neboť řada $\sum \frac{r^n}{n!}$ konverguje.
$\left(\sum \frac{r^n}{n!} : \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{r^n} = \frac{r}{n+1} \to 0 \right)$ $\square$

Příklad 18

- $e^x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
  $\forall r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : (e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow |e^x| \leq e^r \ \ \forall x \in [-r, r]$
  $\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{e^r}{(n+1)!} \to 0 \Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$ na $[-r, r]$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

- pro $\sin x, \cos x$ platí
  $\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |(\sin x)^{(n)}| \leq 1, |(\cos x)^{(n)}| \leq 1 \ \forall x \in [-r, r]$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Příklad 19

- $\ln(1+x) \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots,\ R = 1,$
  pro $[-r, r] \subset (-1, 1) : |R_n(x)| \leq \frac{1}{(1-r)^{n+1}(n+1)} \to 0$
  $$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1, 1]}$$
  Pro $x = 1$ konverguje podle věty 21. (Tedy známe součet Leibnizovy řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$.)
- $$\boxed{(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots, \forall x \in (-1, 1)}$$
  $$\alpha \in \mathbb{R},\ R = 1,\ \binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}^{n \text{ činitelů}}}{n!}$$

Příklad 20

Určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

Maclaurinova řada funkce $\frac{\sin x}{x}$ je

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

pro $x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$.

Kořeny funkce $\frac{\sin x}{x}$ jsou zřejmě v bodech $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, atd. a tedy tuto funkci lze „rozložit“ na (nekonečný) součin kořenových činitelů

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots\\ =\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 s příslušným koeficientem v rozvoji funkce $\frac{\sin x}{x}$ dostaneme

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\frac{1}{16\pi^2}-\cdots,$$

čili po vynásobení číslem $-\pi^2$ dostaneme

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Poznámka

Protože je $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, plyne ze vzorců v předchozím příkladu volbou $x = \frac{\pi}{2}$ vyjádření

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{\pi}{2}} &= \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right) \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdots \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \ldots,
\end{aligned}
$$

neboli dostáváme tzv. Wallisův vzorec

$$
\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots
$$

pro vyjádření čísla $\frac{\pi}{2}$ (a tedy i čísla π) pomocí nekonečného součinu.

Věta 26

Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *pro* $x \in (-r, r), r > 0$*. Pak*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy, je-li f *součtem mocninné řady se středem* $x_0 = 0$ *na* $(-r, r), r > 0$*, pak tato řada je Maclaurinovou řadou funkce* f*.*

Příklad 21

Určete Maclaurinův rozvoj funkcí
a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, b) $f(x) = e^x \sin x$, c) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ má derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

což je geometrická řada s $q = -x^2$ a $R = 1$. Tedy

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1].$$

Poznámka

Volbou $x = 1$ dostáváme historický vzoreček $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

b)

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \times$$
$$\times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$
$$= x + x^2 + x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + x^4\left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) + \cdots$$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots$$

vynásobíme kosinem a získáme

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) \cdot \left(c_1 x + c_3 x^3 + \cdots\right)$$

a porovnáním koeficientů máme

$$\begin{aligned}
x^1 &: 1 = c_1, \\
x^3 &: -\frac{1}{3!} = c_3 - \frac{c_1}{2!} = c_3 - \frac{1}{2} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \\
x^5 &: \frac{1}{5!} = \frac{c_1}{4!} - \frac{c_3}{2!} + c_5 \Rightarrow c_5 = \frac{2}{15},
\end{aligned}$$

tedy $f(x) = \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots$.

Příklad 22

Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}.$$

Cílem je využít předchozí znalosti. Víme, že $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, tedy $e^{x^2} = \sum \frac{x^{2n}}{n!}$. S využitím $(x^{2n+1})' = (2n+1)x^{2n}$ dostaneme

$$\sum \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = \sum \frac{1}{n!} (x^{2n+1})' = \left[x \sum \frac{x^{2n}}{n!} \right]'$$

$$= (x\, e^{x^2})' = e^{x^2} + x\, e^{x^2}\, 2x = e^{x^2}(2x^2+1).$$

Poznámka

Použití mocninných řad (mj.):

- přibližný výpočet funkčních hodnot ($f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$)
- přibližný výpočet integrálů
- řešení diferenciálních rovnic

Příklad 23

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \text{ s přesností } 10^{-3}.$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \underbrace{1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}}_{\text{stačí pro naši přesnost}} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$$

Příklad 24

$$y'' + y = 0$$

Hledáme řešení ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, tedy $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Rovnice má potom tvar

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (a_0 + 2 \cdot 1 \cdot a_2) + x(a_1 + 3 \cdot 2 \cdot a_3) + x^2(a_2 + 4 \cdot 3 \cdot a_4) + \cdots \\ &\qquad + x^{n-2}(a_{n-2} + n(n-1)a_n) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Odtud $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$. Volbou $a_0 = 0, a_1 = 1$ dostaneme

$$a_{2n} = 0, a_{2n-1} = -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x.$$

Volbou $a_0 = 1, a_1 = 0$ dostaneme podobně $y = \cos x$. Pokud bychom nepokládali a_1 rovno 1, resp. a_0, získali bychom řešení $y = a_1 \sin x$, resp. $y = a_0 \cos x$. Řešení je tedy

$$y = a_1 \sin x + a_0 \cos x, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Řady lze využít k zavedení elementárních funkcí, studiu jejich vlastností, popř. pro rozšíření jejich definice do komplexním oboru.

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad |x| < R, \quad z \mapsto \sum a_n z^n$$

Např.

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}, \sin z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

V $\mathbb{C}$ pak lze takto zjistit, že $\ln(-1) = i\pi$, nebo řešit rovnici $\sin z = 2$. ($\sin(x+iy)$ dosadíme do řady a vyjde nám součet vedoucí na $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, $z = 1.5708 \pm 1.31696i$.)

Poznámka (Sčítání divergentních řad)

- Cesàrova sumace:

$$(\mathcal{C})\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n},$$

kde $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Např. pro Grandiho řadu dostaneme

$$(\mathcal{C})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{6}, \dots\right\} = -\frac{1}{2}.$$

- Abelova sumace:
  Pro $\sum a_n$ uvažujeme $\sum a_n x^n$. Pokud konverguje pro $x \in (-R, R)$ k funkci, která má pro $x \to R^-$ limitu, nazveme tuto limitu Abelovou sumou, tj.

$$(\mathcal{A}) \sum a_n R^n := \lim_{x \to R^-} f(x), \quad f(x) = \sum a_n x^n, x \in (-R, R).$$

(Konzistence s předchozí teorií plyne z Abelovy věty 21.)
Sečtěme Grandiho řadu použitím

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n$$

což je geometrická mocninná řada s poloměrem $R = 1$ a součtem $\frac{-x}{1+x}$. Tedy

$$(\mathcal{A}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

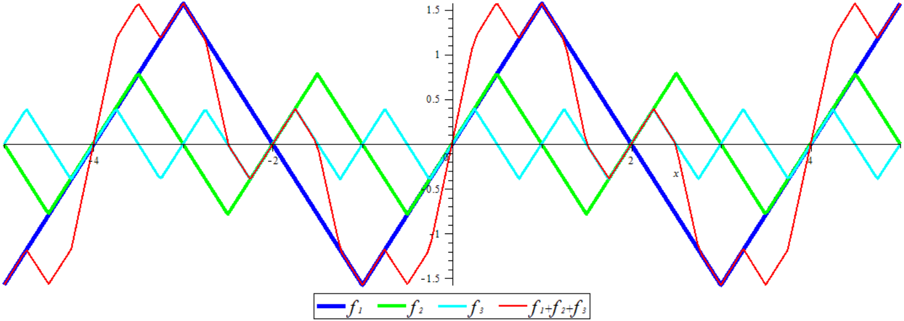
Poznámka (Konstrukce spojitých funkcí bez derivace)

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$ a posloupnost funkcí

$$f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = \frac{f(2x)}{2}, \dots, f_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}.$$

Je zřejmé, že $|f(2^n x)| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$. Přitom $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ stejnoměrně konverguje podle Weierstrassova kritéria (věta **??**). Označme součet této řady $F(x)$.

Funkce F je spojitá na $\mathbb{R}$, protože je stejnoměrným součtem spojitých funkcí, ale nemá derivaci v číslech $\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$. (Čísla tvaru $\frac{m}{2^n}$ se nazývají dyadická čísla a jsou hustá v $\mathbb{R}$.)


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-4
-2
0
2
4
x
f_1
f_2
f_3
$f_1+f_2+f_3$