Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

Petr Hasil

Přednáška z MB152

Obsah

$$n = 1: \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

$$n = 2: \quad D \subseteq \mathbb{R}^2, f\colon D \to \mathbb{R}, \quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

$$n = 3, 4, \dots$$

K zavedení budeme potřebovat pojem měřitelné množiny.

Podmnožině $\mathbb{R}^n$ přiřadíme reálné číslo.
Pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ značí $m(A)$ *míru množiny A* (tj. $m(\cdot)$ je zobrazení z množiny podmnožin $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$).
Míra by měla splňovat (přirozené) podmínky pro (měřitelné) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

- $A = B \quad \Rightarrow \quad m(A) = m(B)$
- $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad m(A) \leq m(B)$
- $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

V poslední podmínce se někdy nahrazuje $A \cap B = \emptyset$ za slabší podmínku $m(A \cap B) = 0$. Pojem míry sjednocuje a zobecňuje pojem obsahu a objemu množin z $\mathbb{R}^n$, je tedy také přirozené očekávat např. v $\mathbb{R}^2$, že $m([0, 1] \times [0, 1]) = 1$.

Formálně množinovou funkci $m(\cdot)$ nazýváme mírou, jestliže

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. $m(A) \geq 0 \quad \forall A$ (nezápornost),
3. $A_n, n \in M \subseteq \mathbb{N}$, po dvou disjunktní množiny, pak

$$m(\bigcup A_n) = \sum m(A_n).$$

Jestliže vztah platí pro spočetnou množinu M, tedy lze i $M = \mathbb{N}$, pak mluvíme o spočetné aditivitě, neboli σ-aditivitě, pokud platí jen pro konečné počty množin A_n, jedná se o konečnou aditivitu.

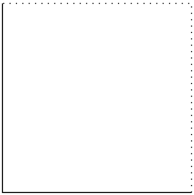
Poznámka

V $\mathbb{R}^2$ začneme tím, že požadujeme, aby byla jednotkovému čtverci přiřazena jednička, jeho čtvtině $1/4$ atd. a těmito „miničtverečky“ pak vyplňujeme libovolné obrazce k získání jejich míry. Celý postup, stejně jako další možnosti výstavby měr, vlastnosti a detaily jsou pak náplní tzv. teorie míry. Množina, které je možné jednoznačně přiřadit její míru, se nazývá *měřitelná*.

Věta 1

Omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když $m(h(A)) = 0$.

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná, omezená množina a $f : A \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na A. Síť řádu n vytvoří tzv. *pokrytí* řádu n množiny A. Čtverce



s touto dohodou jsou navzájem disjunktní množiny. Položíme $A = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$, kde množiny D_j jsou tvaru $D_j^n = A \cap C_j^n$, kde C_j^n je nějaký čtverec sítě řádu n.

Systém $\{D_1^n, \dots, D_m^n\}$ se nazývá *pokrytí* řádu n množiny A. Každá z množin D_j^n je měřitelná, neboť je průnikem měřitelných množin.

Poznámka

Obecně v $\mathbb{R}^k$ používáme tzv. *krychlové množiny řádu n*

$$C^n_{j_1,\dots,j_k} = \left\{ [x_1,\dots,x_k] \in \mathbb{R}^k : \frac{i_1}{2^n} \le x_1 < \frac{i_1+1}{2^n}, \dots, \frac{i_k}{2^n} \le x_k < \frac{i_k+1}{2^n} \right\},$$

což jsou (neuzavřené) po dvou disjunktní měřitelné množiny pokrývající $\mathbb{R}^k$ s mírou $m(C^n) = 2^{-kn}$.

Konstrukci a vlastnosti si pro přehlednost předvedeme v $\mathbb{R}^2$.

Nechť

$$M_j = \sup_{[x,y]\in D_j^n} f(x,y), \quad m_j = \inf_{[x,y]\in D_j^n} f(x,y),$$

pak definujeme

$$S_n(f,A) = \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot m(D_j^n), \quad s_n(f,A) = \sum_{j=1}^{m} m_j \cdot m(D_j^n)$$

horní a dolní součet řádu n a platí

$$S_{n+1}(f,A) \le S_n(f,A), \quad s_{n+1}(f,A) \ge s_n(f,A),$$

tj. posloupnost $\{S_n(f,A)\}$ je nerostoucí a zdola ohraničená a posloupnost $\{s_n(f,A)\}$ je neklesající a shora ohraničená, pak existují

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,A) =: \overline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \lim_{n\to\infty} s_n(f,A) =: \underline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

horní a dolní Riemannův integrál funkce f na množině A.

Definice 1

Pokud se horní Riemannův integrál rovná dolnímu, tj.

$$\overline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

řekneme, že funkce f je na A riemannovsky integrovatelná a definujeme

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\iint_A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Pro $n = 1$ lze použít libovolné dělení D, popř. se omezit na dyadické dělení $D^{[2]}$ (dyadická čísla $\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}$). Samozřejmě platí $D \supset D^{[2]}$, tedy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq [2]\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq [2]\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

odkud ihned plyne, že $[2]\underline{\int} \leq \underline{\int} \leq \overline{\int} \leq [2]\overline{\int}$. Tento vztah musí platit i naopak, jinak by šlo o jinou konstrukci.

Např. víme, že platí: *Je-li D_n nulová posloupnost dělení, pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n).$$

Věta 2

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná a omezená množina, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Jsou-li f, g integrovatelné na A, pak jsou na A integrovatelné i funkce $f \pm g$ a platí

$$\iint_A f(x,y) \pm g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \pm \iint_A g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dále, pro $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolné je integrovatelná i funkce $\alpha \cdot f$ a platí

$$\iint_A \alpha \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \cdot \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta 3

Nechť f je integrovatelná na omezené meřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a $B \subseteq A$ je měřitelná množina. Pak funkce f je integrovatelná i na B.

Věta 4

Nechť f je integrovatelná na měřitelných, omezených a disjunktních množinách $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je f integrovatelná i na $A \cup B$ a platí

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta 5

Nechť funkce f je omezená na A a $m(A) = 0$. Pak je f na A integrovatelná a platí

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Důsledek 1

Nechť A, B jsou měřitelné množiny a platí $m(A \cap B) = 0$. Je-li funkce f integrovatelná na A i na B, pak je integrovatelná i na $A \cup B$ a platí

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta 6

Nechť je funkce f spojitá a omezená na omezené měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je funkce f na množině A integrovatelná.

Snadno pro integrál v $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^k$) dostaneme i další tvrzení známá z $\mathbb{R}^1$.

Věta 7

Nechť jsou funkce f, g integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a platí $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$. Pak

$$\iint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \iint_A g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Věta 8

Nechť je funkce f integrovatelné na měřitelné množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak je funkce i funkce $|f|$ na množině A integrovatelná a platí

$$\left| \iint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \leq \iint_A |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Definice 2

Řekneme, že funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ má *skoro všude* na množině A vlastnost V, jestliže existuje množina B taková, že $B \subseteq A, m(B) = 0$ a funkce f má vlastnost V ve všech bodech množiny $A \smallsetminus B$.
(Tj. vlastnost není splněna na množině míry nula, přičemž $m(\emptyset) = 0$.)

Věta 9

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená měřitelná množina a $f, g \colon A \to \mathbb{R}$, kde f je na A integrovatelná a g je na A omezená. Pokud platí $f(x,y) = g(x,y)$ skoro všude na A, pak je na A funkce g integrovatelná a

$$\iint_A g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta 10

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená a měřitelná množina a nechť $f \colon A \to \mathbb{R}$ je omezená a skoro všude spojitá na A. Pak je funkce f na A integrovatelná.

- $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ... dvojný integrál
- $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ ... dvojnásobný integrál

Věta 11

Nechť $A = [a,b] \times [c,d]$ je obdélník v $\mathbb{R}^2$ a funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ je na množině A spojitá. Pak

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Věta 12 (Fubiniho věta)

Nechť f je spojitá na množině

$$A = \{[x, y] : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\},$$

kde $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Podobně pro

$$A = \{[x, y] : y \in [c, d], g(y) \le x \le h(y)\}, \quad g, h \in C[c, d],$$

platí

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Poznámka

Je-li ve větě o integraci přes obdélník funkce f pouze integrovatelná, platí

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\underline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\overline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Pokud označíme

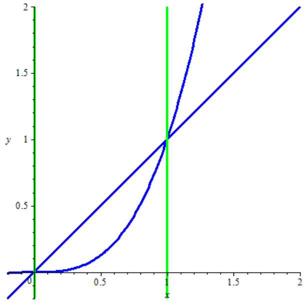
$$F(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad G(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

může nastat případ, kdy $F(x) < G(x)$ v jistých bodech $x \in [a,b]$, ale množina těchto bodů má Jordanovu míru rovnu nule, tedy

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 1

Vypočtěte $\iint_A x^3 y \, dx \, dy$, kde $A = \{[x, y] : 0 \le x \le 1, x^3 \le y \le x\}$.

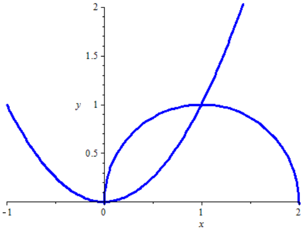


$$\iint_A x^3 y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} x^3 y \, dy \, dx$$
$$= \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(x^2 - x^6) \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 - x^9 \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{10}}{10}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{30}$$

$$\iint_A x^3 y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} x^3 y \, dx \, dy = \int_0^1 y \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_y^{\sqrt[3]{y}} dy$$
$$= \tfrac{1}{4}\int_0^1 y(y^{4/3} - y^4) \, dy = \tfrac{1}{4}\int_0^1 y^{7/3} - y^5 \, dy = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{3}{10} y^{10/3} - \tfrac{y^6}{6}\right]_0^1$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{10} - \tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{1}{30}$$

Příklad 2

Zaměňte pořadí integrace $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.



$$y = \sqrt{2x - x^2}$$
$$y^2 = 2x - x^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$
$$x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$
$$y = x^2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y}$$

Vybereme odpovídající horní, resp. dolní kousky, tedy

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Samozřejmě platí

$$\boxed{m(A) = \iint_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}.$$

Příklad 3

Vypočítejte míru množiny $A = \{[x, y] : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$.

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \, \mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t \\ 0 = \sin 0, 1 = \sin \pi/2 \end{array} \right| = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, \mathrm{d}t$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos 2t \, \mathrm{d}t}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

Věta 13

Uvažujme reálný interval $[a, b]$. *Nechť*

$$A = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x), G(x, y) \le z \le H(x, y)\big\},$$

kde funkce $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *jsou na* $[a, b]$ *spojité a funkce* $G, H\colon B \to \mathbb{R}$ *jsou spojité na množině*

$$B = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\big\}.$$

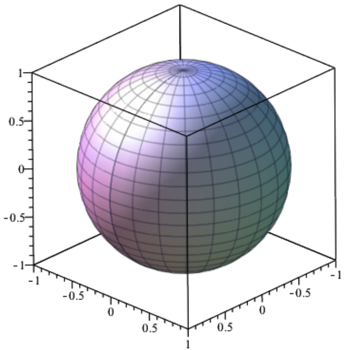
Pak, je-li $f : A \to \mathbb{R}$ *spojitá na* A, *platí*

$$\iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Příklad 4

Vypočítejte $\iiint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$A = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},$$
$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\Big\}.$$



$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{l} y=\sqrt{1-x^2}\sin t,\ \mathrm{d}y=\sqrt{1-x^2}\cos t\,\mathrm{d}t \\ y=-\sqrt{1-x^2}\to t=-\pi/2, y=\sqrt{1-x^2}\to t=\pi/2 \end{array} \right|$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(1-x^2)-(1-x^2)\sin^2 t}\sqrt{1-x^2}\cos t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\pi\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_{0}^{1}1-x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Poznámka

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je n-rozměrný kvádr. Je-li f spojitá na A, pak

$$\int_A f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1.$$

Příklad 5

$\iiiint_A \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4$, kde $A = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0, 1-x_1], x_3 \in [0, 1-x_1-x_2], x_4 \in [0, 1-x_1-x_2-x_3]\}$.

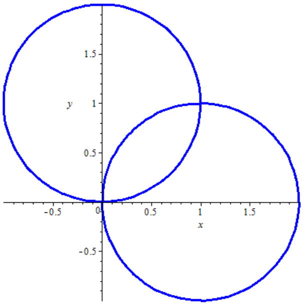
Takové množině A se říká *jednotkový simplex*, používá se k triangulaci n-rozměrných těles a v optimalizaci („n-rozměrný trojúhelník“).

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \mathrm{d}x_4\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} (1-x_1-x_2-x_3)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&\quad\quad = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left[(1-x_1-x_2)x_3 - \frac{x_3^2}{2}\right]_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&\quad\quad\quad = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (1-x_1-x_2)^2 - \frac{1}{2}(1-x_1-x_2)^2\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&\quad\quad\quad\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x_1} (1-x_1-x_2)^2\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{(1-x_1-x_2)^3}{3}\right]_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_1 \\
&\quad\quad\quad\quad\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-x_1)^3\,\mathrm{d}x_1 = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left[(1-x_1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4!}
\end{aligned}
$$

Příklad 6

Vypočtěte plochu obrazce daného nerovnostmi

$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0, \qquad x^2 - 2y + y^2 \leq 0.$$



$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$
$$x = 1 - \sqrt{1 - y^2},\ y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$x^2 - 2y + y^2 \leq 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$
$$x = \sqrt{2y - y^2},\ y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} - 1 + \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi-2}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \left|x-1=t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\right|$$
$$= \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left|\ \text{sudá funkce}\ \right| = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- Střední hodnota:

$$\operatorname{av}(f) = \frac{\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m(A)}.$$

- Uvažujme $\iint_A F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota v bodě $[x,y]$ a $\rho(x,y)$ vzdálenost bodu $[x,y]$ od osy otáčení o, pak

funkce F	integrál z funkce F
1	Obsah množiny A (S)
$\sigma(x,y)$	hmotnost množiny A (m)
$y\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose x (U_x)
$x\sigma(x,y)$	lineární moment vzhl. k ose y (U_y)
$y^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose x (J_x)
$x^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose y (J_y)
$\rho^2(x,y)\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti vzhl. k ose o (J_o)
y^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose x (I_x)
x^2	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose y (I_y)
$\rho^2(x,y)$	kvadratický moment průřezu vzhl. k ose o (I_o)

- Souřadnice těžiště průřezu $[x_T, y_T]$ $(\sigma(x, y) = 1)$:

$$x_T = \frac{\iint_A x \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}, \qquad y_t = \frac{\iint_A y \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}.$$

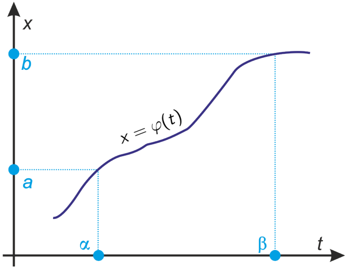
$\boxed{n = 1}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = |x = \varphi(t),\, \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

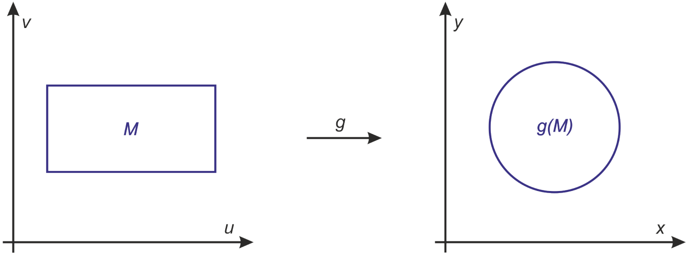
kde $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Také lze psát jako

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g' \neq 0$ (g je prostá).



$\boxed{n=2}$ zobrazení $g\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, $x = x(u,v), y = y(u,v)$



Věta 14 (O transformaci)

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^2$ je otevřená množina v rovině (u, v), g je prosté zobrazení množiny M do roviny (x, y) dané funkcemi $x = x(u, v), y = y(u, v)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť funkce

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je různá od nuly a ohraničená na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné množiny a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\iint_{g(M)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M f\left(x(u, v), y(u, v)\right) \cdot |J(u, v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Transformace v $\mathbb{E}^2$ do polárních souřadnic je dána

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr) a $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu.

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \neq 0$$

Příklad 7

Vypočítejte obsah množiny

$$M : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0.$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1,$$

$$m(M) = \int_M \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{lll} x = \rho \cos\varphi & \rho \in (0, 2\cos\varphi] & \\ y = \rho \sin\varphi & \varphi \in [0, \pi/2] & J(\rho,\varphi) = \rho \neq 0 \end{array} \right|$$

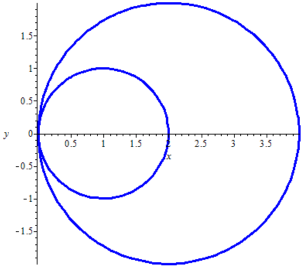
$$= \iint_D \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos^2\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Příklad 8

Vypočítejte obsah množiny

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 - 1 \geq 0, (x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$



$$\varphi \in [0, \pi/2],$$
$$\rho \in [2\cos\varphi, 4\cos\varphi]$$

$$m(M) = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_D \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} [\rho^2]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \cdots = 3\pi$$

Poznámka

Obsah obrazce v polárních souřadnicích

a) $n = 1, P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ (aproximace kruhovou výsečí),

b) $n = 2$, pomocí dvojného integrálu snadno odvodíme

$$P = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\rho(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka

Volba transformace pro $n = 1$ byla dána funkcí, pro $n = 2, 3, \ldots$ je dána tvarem množiny, přes kterou integrujeme.

Věta 15 (O transformace trojného integrálu)

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^3$ je otevřená množina v prostoru (u, v, w), g je prosté zobrazení na M do prostoru (x, y, z) dané funkcemi $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, které mají na M spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť $J(u, v, w) \neq 0$ je ohraničené na M. Nechť M a $g(M)$ jsou měřitelné a funkce f je spojitá a ohraničená na $g(M)$. Pak platí

$$\iiint_{g(M)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_M f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \cdot |J(u, v, w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

Transformace v $\mathbb{E}^3$

- válcové (cylindrické) souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z, \qquad J(\rho,\varphi,z) = \rho,$$

kde $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost od osy z (poloměr válce) a $\varphi \in [0,2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v kladném smyslu v rovině rovnoběžné s rovinou xy.

- sférické (kulové) souřadnice

$$x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z = \rho\cos\vartheta, \quad J(\rho,\varphi,\vartheta) = -\rho^2\sin\vartheta$$

kde $\rho \in [0,\infty)$ je vzdálenost od počátku (poloměr koule), $\varphi \in [0,2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) je odchylka od kladné poloosy x v projekci do roviny xy (rovina $z=0$) a $\vartheta \in [0,\pi]$ je odchylka od kladné poloosy z.

Transformace v $\mathbb{E}^n$ do hypersférických souřadnic

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \rho \sin\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \rho \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \rho \cos\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho \cos\vartheta_{n-2},
\end{aligned}
$$

kde $\rho \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$ (popř. $[-\pi,\pi]$) a $\vartheta_i \in [0,\pi], i = 1,\dots,n-2$.

$$J(\rho,\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2}) = (-1)^n \rho^{n-1} \sin\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \cdots \sin^{n-2}\vartheta_{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho^2$$

Poznámka

- $\rho \in [0, \infty)$ je vzdálenost od počátku,
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ (popř. $[-\pi, \pi]$) je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ (rovina $x_n = 0$) od kladné poloosy x_1,
- $\vartheta_{n-2} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče daného bodu od kladné poloosy x_n,
- $\vartheta_{n-3} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ od kladné poloosy x_{n-1},
- $\vartheta_{n-4} \in [0, \pi]$ je odchylka průvodiče projekce daného bodu do roviny $x_n = 0$ promítnuté do roviny x_{n-1} od kladné poloosy x_{n-2},
- $\dots$.

Poznámka

- Samozřejmě existuje celá řada dalších často používaných transformací (např. zobecněné sférické pro elipsoidy) a snadno lze dle tvaru množiny vytvořit transformaci „na míru“.
- Uvedené vzorce pro transformace nejsou jediné možné, (hyper)sférické souřadnice (a tedy i polární) lze použít i např. takto

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \rho \sin\varphi \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \rho \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
&\ \vdots\\
x_{n-1} &= \rho \sin\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \rho \sin\vartheta_{n-2},
\end{aligned}
$$

kde $J(\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = \rho^{n-1} \cos\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2 \cdots \cos^{n-2}\vartheta_{n-2}$.

Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na neprázdné množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definice 3

Bod $A \in \overline{\Omega}$ se nazývá *singulární bod* funkce f, jestliže f není ohraničená na žádné množině tvaru $\Omega \cap \mathcal{O}(A)$, kde $\mathcal{O}(A)$ je libovolné kruhové okolí bodu A.

Protože bod A nemůže být izolovaným bodem množiny Ω, jsou možné dva případy. Buď je A vnitřním bodem množiny Ω, nebo je jejím hromadným hraničním bodem; v druhém případě nemusí A ležet v množině Ω.

Definice 4

Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, se *smršťuje k bodu A*, jestliže

1. Bod A je vnitřním bodem každé z množin M_n.
2. Platí $\lim_{n\to\infty} d(M_n) = 0$.

- Číslo $d(M) = \sup\{\rho(X, Y) : X, Y \in M\}$ je průměr množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$, přitom ρ je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$.
- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotonní vzhledem k inkluzi.

Předpoklad 1

Funkce f je integrovatelná na každé množině $\Omega \setminus M$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je libovolná měřitelná množina obsahující A ve svém vnitřku. (Z tohoto předpokladu plyne, že množina Ω je měřitelná.)

Definice 5

Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Řekneme, že *nevlastní integrál* z funkce f *konverguje* na množině Ω, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťujících se k bodu A. Pak píšeme

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω *diverguje*.

Lemma 1

Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nechť posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ se smršťuje k bodu $A \in \overline{\Omega}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega \setminus M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Pokud tedy použijeme postup pro nevlastní integrál na vlastní integrál, dostaneme správný výsledek.

Věta 16

Nechť funkce f, g *jsou definované na omezené množině* $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, *a* A *je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrály*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergují a α, β *jsou libovolné konstanty, pak konverguje také integrál* $\iint_\Omega \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *(pokud je vůbec nevlastní) a platí*

$$\iint_\Omega \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 17

Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Pak je nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergentní právě tehdy, když existuje posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$ smršťující se k bodu A taková, že číselná posloupnost mající členy

$$\iint_{\Omega \setminus M_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N},$$

je ohraničená.

Důsledek 2

Nechť je nezáporná funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, *kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Buď* $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost kruhů se středy v bodě A a poloměry* r_n, *přičemž posloupnost* $\{r_n\}$ *je klesající a* $r_n \to 0$ *pro* $n \to \infty$. *Pak je intergál*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergentní právě tehdy, když je posloupnost

$$\iint_{\Omega \setminus K_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad n \in \mathbb{N}$$

ohraničená.

Příklad 9

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina, $A = [x_0, y_0]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$$

konverguje pro $0 < \alpha < 2$ a diverguje $\alpha \geq 2$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Bod A je pro $\alpha > 0$ zřejmě singulárním bodem integrandu $1/r^\alpha$, protože $1/r^\alpha \to \infty$ pro $[x, y] \to [x_0, y_0]$.

Díky aditivitě vlastního integrálu vzhledem k integračnímu oboru, lze množinu M při vyšetřování konvergence nahradit kruhem K se středem A o dostatečně malém poloměru $R > 0$. (Může se tak změnit hodnota, ale nikoli konvergence/divergence.)

Označme K_n kruh se středem v A a poloměrem $1/n, n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{K_n\}$ se smršťuje k singulárnímu bodu A a pro každé $n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor 1/R \rfloor + 1$, je $K_n \subset K$. Vypočítáme integrály

$$\iint_{K \setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Protože množina $K \setminus K_n$ je mezikruží se středem v bodě A s poloměry $1/n$ a R, použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0).

Tedy $x = x_0 + \rho\cos\varphi, y = y_0 + \rho\sin\varphi, J = \rho$. Množina $K \setminus K_n$ je obrazem obdélníku $L_n = [1/n, R] \times [0, 2\pi]$. Vyjde

$$\iint_{K\setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint_{L_n} \frac{\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{1/n}^R \rho^{1-\alpha}\ \mathrm{d}\rho$$

$$= \begin{cases} 2\pi\left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{1/n}^R = \frac{2\pi}{2-\alpha}(R^{2-\alpha} - n^{\alpha-2}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln\rho]_{1/n}^R = 2\pi(\ln R + \ln n) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$

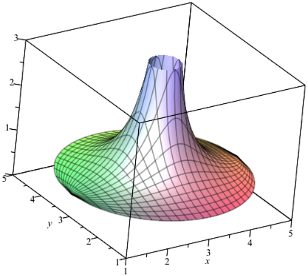
Odtud je vidět, že pro $0 < \alpha < 2$ je

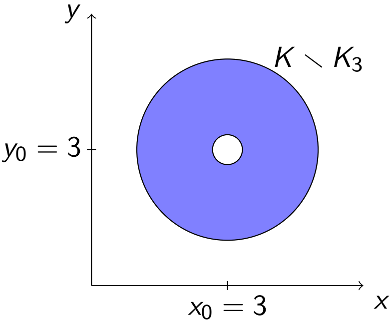
$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K\setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

a pro $\alpha \geq 2$ je

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K\setminus K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \infty.$$

Protože integrand je kladná funkce, podle Důsledku 2 integrál konverguje právě pro $0 < \alpha < 2$. Na obrázcích je horní a dolní hranice tělesa omezeného shora grafem funkce $1/r^\alpha$ a zdola rovinou $z = 0$ na mezikruží $K \setminus K_3$ pro $\alpha = 1, x_0 = y_0 = 3$ a $R = 2$.





Poznámka

Analogicky lze dokázat zobecnění výsledku z předchozího příkladu.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $A = [y_1, \dots, y_n]$ je její vnitřní bod a α je reálné číslo. Označme $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Pak nevlastní integrál $\int \cdots \int_M \frac{1}{r^\alpha}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ konverguje pro $0 < \alpha < n$ a diverguje pro $\alpha \geq n$ (pro $\alpha \leq 0$ jde o vlastní integrál).

Při výpočtu použijeme sférické souřadnice. Je-li speciálně $M = K$, kde K je n-rozměrná koule se středem v bodě A a poloměrem $R > 0$, vyjde pro $\alpha < n$ konvergentní integrál s hodnotou

$$\int \cdots \int_M \frac{1}{r^\alpha}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{R^{n-\alpha}}{(n-\alpha)(n-2)!!} \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdot \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

(Pro $n = 1$ položíme $(-1)!! = 1$.)

Vzorec platí i pro $\alpha \leq 0$, kdy jde o vlastní integrál.

Věta 18 (Srovnávací kritérium)

Nechť jsou nezáporné funkce f, g *definované na omezené množině* $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, *a* A *je jejich společný singulární bod. Nechť obě funkce splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že platí* $f(x,y) \leq g(x,y)$ *pro každé* $[x,y] \in \Omega$.

1. *Jestliže integrál* $\iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *konverguje, konverguje i integrál* $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. *Jestliže integrál* $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *diverguje, diverguje i integrál* $\iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Lemma 2

Nechť je funkce f definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál

$$\iint_\Omega |f(x,y)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konverguje, konverguje i integrál

$$\iint_\Omega f(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 19

Nechť funkce f, g *jsou definované na omezené množině* $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, *a* A *je jejich společný singulární bod a nechť obě splňují Předpoklad 1. Předpokládejme, že funkce* g *je nezáporná,* $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ *pro každé* $[x,y] \in \Omega \setminus \{A\}$ *a integrál* $\iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *je konvergentní. Pak je konvergentní i integrál* $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Definice 6

Řekneme, že nevlastní integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje integrál $\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Věta 20

Nechť funkce f je definovaná na omezené množině $\Omega \setminus \{A\}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde A je singulární bod funkce f splňující Předpoklad 1. Jestliže nevlastní integrál $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konverguje, pak konverguje i integrál

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tedy všechny konvergentní integrály jsou absolutně konvergentní.

Nevlastní integrál na neomezené množině

Pro každé $r > 0$ označme $K(r)$ kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Definice 7

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neomezená množina. Řekneme, že posloupnost omezených množin $\{M_n\}$, $M_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, *vyčerpává množinu Ω*, jestliže

1. Platí $M_n \subset \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
2. Ke každému $r > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq m$ platí $\Omega \cap K(r) \subset M_n$.

- Množiny M_n nemusí být souvislé.
- Posloupnost množin M_n nemusí být monotonní vzhledem k inkluzi.

Uvažujme funkci f definovanou na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. O funkci f učiníme následující předpoklad.

Předpoklad 2

Funkce f je integrovatelná na každé (omezené) měřitelné množině $M \subset \Omega$.

Definice 8

Nechť funkce f je definovaná na neomezené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a splňuje Předpoklad 2. Řekneme, že *nevlastní integrál* z funkce f *konverguje* na množině Ω, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{M_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K$$

pro libovolnou posloupnost měřitelných množin $\{M_n\}$, která vyčerpává množinu Ω. Pak píšeme

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = K.$$

V opačném případě, tj. pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál z funkce f na množině Ω *diverguje*.

Příklad 10

Ukažte, že nevlastní integrál

$$\iint_{\Omega} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\},$$

diverguje.

Najdeme dvě vyčerpávající posloupnosti $\{K_n\}$ a $\{M_n\}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \lim_{n\to\infty}\iint_{M_n} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tím bude dokázáno, že daný integrál diverguje.

Označme

$$K_R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0\},$$
$$M_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$$

pro $R > 0$, $a > 0$. Pak transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\iint_{K_R} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho \sin \rho^2 \;\mathrm{d}\rho \;\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos \rho^2}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1 - \cos R^2),$$

tedy limita $\lim_{R\to\infty} \iint_{K_R} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje.

Oproti tomu

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{M_a}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{a\to\infty}\iint_{M_a}(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a\sin x^2\ \mathrm{d}x\int_0^a\cos y^2\ \mathrm{d}y\right)+\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a\cos x^2\ \mathrm{d}x\int_0^a\sin y^2\ \mathrm{d}y\right)$$
$$=2\int_0^\infty\sin x^2\ \mathrm{d}x\int_0^\infty\cos x^2\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

protože pro Fresnelovy integrály platí (např. pomocí metod komplexní analýzy)

$$\int_0^\infty\sin x^2\ \mathrm{d}x=\int_0^\infty\cos x^2\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Přitom posloupnosti $\{K_n\},\{M_n\}$, kde $n\in\mathbb{N}$, jsou posloupnosti množin vyčerpávající Ω.

Nyní je možné přenést na tento typ nevlastního integrálu všechna tvrzení z předchozí sekce. Zejména platí, že každý integrál konverguje absolutně. (Důkazy jsou téměř analogické.)

Příklad 11

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je vnějšek otevřeného kruhu se středem v bodě $[x_0, y_0]$ a poloměrem $R > 0$ a α je reálné číslo. Označme

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Dokažte, že nevlastní integrál

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha > 2$ a diverguje pro $\alpha \leq 2$.

Výpočet bude podobný jako v příkladu 9.

Označme K_n mezikruží se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$, vnitřním poloměrem R a vnějším poloměrem n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, kde $n_0 = \lfloor R \rfloor + 1$. Posloupnost $\{K_n\}$ zřejmě vyčerpává množinu M.

Vypočítáme integrály
$$\iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Protože množina K_n je mezikružím se středem v bodě A s poloměry R a n, použijeme transformaci, která je složením transformace do polárních souřadnic a posunutí o vektor (x_0, y_0). Tedy

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi, \quad J = \rho.$$

Množina K_n je obrazem obdélníku $L_n = [R, n] \times [0, 2\pi]$.

Dostaneme

$$\iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \iint_{L_n} \frac{\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\rho^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_R^n \rho^{1-\alpha}\ \mathrm{d}\rho$$
$$= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_R^n = \frac{2\pi}{2-\alpha}(n^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}) & \text{pro } \alpha \neq 2, \\ 2\pi[\ln \rho]_R^n = 2\pi(\ln n - \ln R) & \text{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$

Odtud je vidět, že pro $\alpha > 2$ je

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{\alpha - 2}$$

a pro $\alpha \leq 2$ je

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^\alpha} = \infty.$$

Protože integrand $1/r^\alpha$ je kladná funkce, podle analogie Důsledku 2 integrál konverguje právě pro $\alpha > 2$.

V následujícím budeme potřebovat tzv. limitní srovnávací kritérium pro nevlastní integrály funkce jedné proměnné, které jsme dosud nepotřebovali. Pro úplnost uveďme i prosté srovnávací kritérium a příslušný důsledek.

Věta 21 (Prosté srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g splňují pro $x \in [a, \infty)$ nerovnosti

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

(i) *Konverguje-li integrál $\int_a^\infty g(x)\ \mathrm{d}x$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$, přičemž platí*

$$0 \leq \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^\infty g(x)\ \mathrm{d}x.$$

(ii) *Diverguje-li integrál $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$, diverguje i integrál $\int_a^\infty g(x)\ \mathrm{d}x$.*

Věta 22 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť funkce f, g jsou nezáporné na intervalu $[a, \infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

(i) *Je-li $L < \infty$ a konverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x)\, \mathrm{d}x$, konverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$.*

(ii) *Je-li $L > 0$ a diverguje-li nevlastní integrál $\int_a^\infty g(x)\, \mathrm{d}x$, diverguje i nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$.*

Důsledek 3

Nechť $a > 0$ *a* $f(x) \geq 0$ *pro* $x \in [a, \infty)$. *Jestliže existuje* $\alpha > 1$ *takové, že*

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) < \infty,$$

pak integrál $\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ *konverguje. Jestliže existuje* $\alpha \leq 1$ *takové, že*

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) > 0,$$

pak nevlastní integrál $\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ *diverguje.*

Příklad 12

Dokažte, že integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

konverguje absolutně pro každé $x > 0$.

Rozdělme integrační obor na dvě části např. číslem 1.

- Pro $x \in [1, \infty)$ integrál $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ není nevlastní.
- Pro $x \in (0, 1)$ použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Uvažujme číslo $\delta \in (0, x)$ a počítejme

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{|\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|}{\frac{1}{t^{1-\delta}}} = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-\delta} = 0 < \infty.$$

  Protože nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ konverguje pro $\alpha < 1$ a máme $1 - \delta < 1$, konverguje i integrál $\int_0^1 |\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|\, \mathrm{d}t$.

- Nyní uvažujme integrál $\int_1^\infty |\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|\,\mathrm{d}t$. Opět použijeme limitní srovnávací kritérium pro jednoduché nevlastní integrály. Porovnávat budeme s $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ o kterém víme, že konverguje. Tedy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}|}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x+1} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{e}^{\ln t^{x+1}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{(x+1)\ln t - t} \overset{(*)}{=} 0 < \infty.$$

Tedy $\Gamma(x)$ skutečně absolutně konverguje $\forall x > 0$.

$(*)$ Protože $\lim_{u\to 0^+} u\ln u = \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} 0$, máme

$$\lim_{t\to\infty} \big[(x+1)\ln t - t\big] = \left| t = \tfrac{1}{u}, u \to 0^+ \right| = \lim_{u\to 0^+} \left[(x+1)\ln\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\right]$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{-(x+1)u\ln u - 1}{u} = -\infty.$$

Příklad 13

Dokažte, že pro každé $x > 0, n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\Gamma(x+n+1) = \Gamma(x) \prod_{i=0}^{n} (x+i) \tag{1}$$

Budeme postupovat indukcí.

- Pro $n = 0$ snadno spočítáme

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^x \, dt = \begin{vmatrix} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{vmatrix}$$
$$= -\left[t^x e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x\, e^{-t}\, t^{x-1} \, dt = x\Gamma(x).$$

- Nyní předpokládejme platnost (1) a proveďme indukční krok

$$\Gamma(x+n+2) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x+n+1}\, \mathrm{d}t$$

$$\left| \begin{array}{cc} u = t^{x+n+1} & u' = (x+n+1)t^{x+n} \\ v' = \mathrm{e}^{-t} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right|$$

$$= -\left[t^{x+n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (x+n+1)\,\mathrm{e}^{-t}\, t^{x+n}\, \mathrm{d}t = (x+n+1)\Gamma(x+n+1).$$

Poznámka

Protože

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = 1$$

plyne z příkladu 13 vztah

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

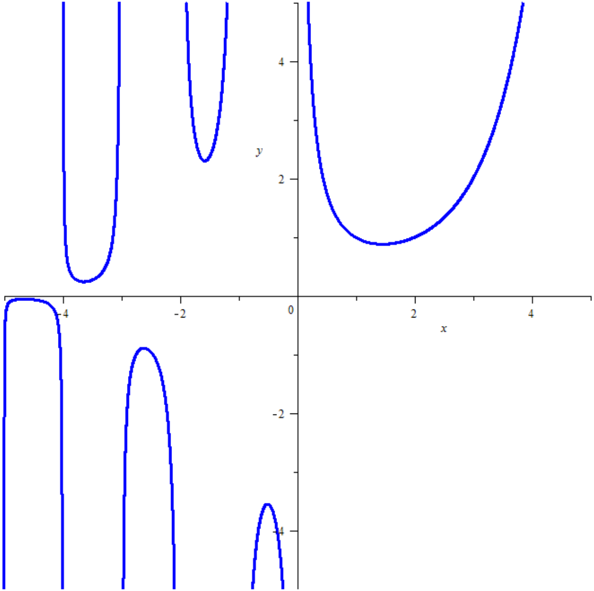
Definice 9

Eulerovu Gamma funkci definujeme jako

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t, & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x-\lfloor x \rfloor)}{x(x+1)\dots(x-\lfloor x \rfloor -1)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Poznámka

- Tedy $D(\Gamma) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
- Gamma funkci lze definovat pro libovolné komplexní číslo mimo $\{0, -1, -2, \dots\}$.


y
4
2
-2
-4
-4
-2
0
2
4
x

Věta 23

Pro každé $x \in D(\Gamma)$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = \Gamma(x-n)\prod_{i=1}^{n}(x-i).$$

Poznámka

Díky Větě 23 stačí znát hodnotu $\Gamma(x)$ pro $x \in (0,1]$ a pro jakékoli jiné (reálné) $x \in D(\Gamma)$ hodnotu snadno dopočítáme.

Poznámka

Často se můžeme setkat i s Eulerovou Beta funkcí

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x>0, y>0.$$

Příklad 14

Pomocí funkce $B(x, y)$ vypočítejte

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Snadno spočítáme

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$$

$$= \left|t = \sin^2 u\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin u\cos u}{\sin u\cos u}\,\mathrm{d}u = \pi.$$

Tedy dostáváme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|x^2 = u\right| = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Příklad 15

Vypočítejte

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

bez použití funkce $B(x,y)$.

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$= |\text{polární souř.}| = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$
$$= |\rho^2 = t| = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \frac{\pi}{4}\Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

tedy skutečně $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Další vlastnosti funkce $\Gamma(x)$

- $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \Gamma(x) = -\infty.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\, x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} = 1$ (Stirlingův vzorec) $\Rightarrow n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pro velká n.
- $\frac{d^n\Gamma(x)}{dx^n} = \int_0^\infty \left(e^{-t}\, t^{x-1} \ln^n t\right) dt$ pro $x > 0$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$
- ... a mnohem víc.