Diferenciální počet funkcí více proměnných

Petr Hasil

Přednáška z MB152

Obsah

1. Diferenciální počet funkcí více proměnných
   - Základní pojmy, limita, spojitost
   - Parciální derivace a diferenciál
   - Kmenová funkce
   - Parciální derivace složených funkcí
   - Lokální extrémy
   - Absolutní extrémy

Definice 1

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ se nazývá (reálná) *funkce n* (reálných) *proměnných* a množina M je její definiční obor.

Příklad 1

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$
- $f(x,y,z) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{z}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$
- $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2^2 \cdots x_n^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Poznámka

- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n} = \{x = [x_1,\dots,x_n]; x_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n\}$
- $x_n \xrightarrow{\rho_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_\infty} x \Leftrightarrow x_n$ konverguje k x po souřadnicích

Definice 2

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$, pak se množina

$$Gr(f) = \big\{[x_1, \dots, x_n, y] \in \mathbb{R}^{n+1}; [x_1, \dots, x_n] \in M, y = f(x_1, \dots, x_n)\big\}$$

nazývá *graf* funkce f.

Definice 3

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, pak se množina

$$f_c = \{[x_1, \dots, x_n] \in M; f(x_1 \dots, x_n) = c\}$$

nazývá *vrstevnice* funkce f (na úrovni c).

Definice 4

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2, f\colon M \to \mathbb{R}$, pak

- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{xy} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{xy}} = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; f(x, y) = 0\right\},$$
- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{xz} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{xz}} = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; f(x, 0) = z\right\},$$
- řez funkce f (souřadnou) rovinou $\rho_{yz} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$ je množina
$$f_{\rho_{yz}} = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; f(0, y) = z\right\}.$$

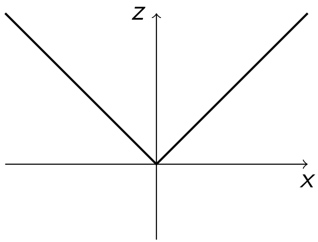
Poznámka

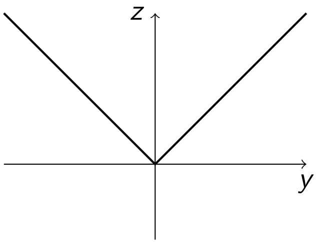
- Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak $f_{\rho_{xy}} = f_0$ (řez rovniou ρ_{xy} je shodný s vrstevnicí na úrovni 0).
- Samozřejmě lze stejným způsobem definovat řez libovolnou rovinou.
- Pro funkce více než dvou proměnných lze podobně zavést definici řezu (souřadnými) nadrovinami apod.

Příklad 2

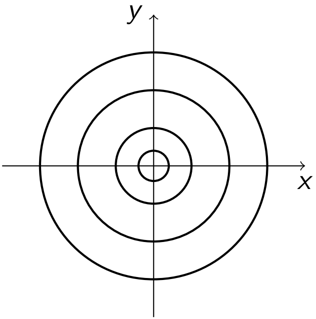
Načrtněte graf funkce
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nejprve si načrtneme řezy souřadnými rovinami a vrstevnice. Dostáváme $f_{\rho_{xz}} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2} = |x|$ a $f_{\rho_{yz}} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y|$, tedy řezy jsou

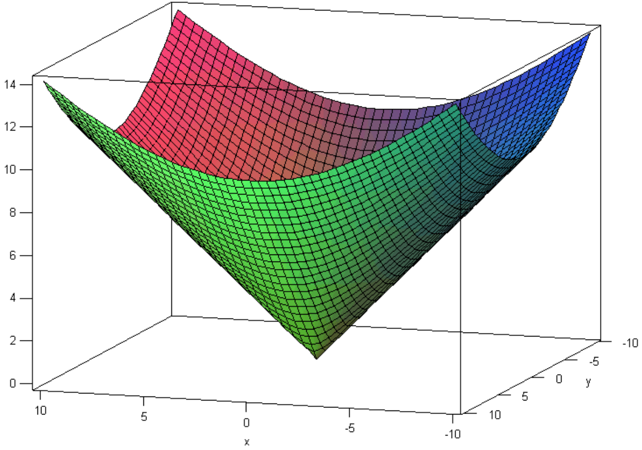




Vrstevnice jsou množiny $f_c = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = c\}$ tedy pokládáme $z = c \;\Rightarrow\; c = \sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2 = c^2$, tj. pro $c < 0$ je $f_c = \emptyset$ a pro $c \geq 0$ se jedná o kružnice se středem v počátku a poloměrem c,



Celkem jsme zjistili, že grafem funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ je rotační kužel postavený na špičce v počátku.



■

Definice 5

Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ je hromadný bod definičního oboru f. Řekneme, že funkce f má v bodě $x^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tj. pro $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ máme $\lim_{x \to x^*} f(x) = L \;\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x = [x_1, \dots, x_n] \neq x^* :$$
$$|x_i - x_i^*| < \delta\ (i = 1, \dots, n) \;\Rightarrow\; f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Definice 6

Nevlastní limitu definujeme jako

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = \infty[-\infty] \;\Leftrightarrow$$
$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\} : f(x) > A\ [f(x) < A].$$

Příklad 3

- $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} (x^2 + y^3) = 1 + 8 = 9$
- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}$
  $= \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1 = 2$
- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$

Poznámka

Značení se různí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Příklad 4

- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2} = |y = kx| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}$
  limita neexistuje, protože závisí na směrnici přímky, po níž se blížíme k bodu $[0,0]$.

- $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = |y = kx| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0,$
  ale pro paraboly máme
  $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = |y = kx^2| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k}$
  a limita proto neexistuje.

Dvojná a dvojnásobna limita

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 5 se nazývá *dvojná*. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně. Limity

$$L_{xy} = \lim_{y \to y_0} \Big(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \Big) \quad \text{a} \quad L_{yx} = \lim_{x \to x_0} \Big(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \Big)$$

se nazývají *dvojnásobné* (popř. postupné). Potom pro L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y)$ platí:

(i) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$, pak limita L *nemusí* existovat;

(ii) existuje-li limita L (i nevlastní), pak L_{xy} a L_{yx} *nemusí* existovat;

(iii) existuje-li L a některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, pak se obě *rovnají*;

(iv) existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$;

(v) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak limita L neexistuje.

Výpočet limity L pomocí postupných limit L_{xy}, L_{yx} je výhodné zejména tehdy, je-li předem známa existence L. Na druhou stranu část (v) udává další nutnou podmínku pro existenci limity L (pro neexistenci limity L stačí ukázat $L_{xy} \neq L_{yx}$).

Poznámka

Pro funkce více proměnných nemáme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.

Věta 1 (Transformace do polárních souřadnic)

Limita $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ *je rovna* L, *jestliže existuje funkce* $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *jedné proměnné s vlastností* $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *tak, že existuje* $r_0 > 0$ *takové, že pro každé* $r \in (0, r_0)$ *platí*

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r) \qquad \forall \varphi \in [0, 2\pi).$$

Příklad 5

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\varphi)^3 + (r\sin\varphi)^3}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}_{\text{ohraničená funkce}} = 0$$

Poznámka

Podobně můžeme při výpočtu limity funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ využít transformaci do *sférických souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho \cos\varphi \sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho \cos\vartheta,$$

kde

- $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. *sférický poloměr*),
- $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. *azimutální úhel*),
- $\vartheta \in [0, \pi]$ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. *sférický úhel*).

Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. Opačné tvrzení lze opět naformulovat jako větu.

Věta 2

Je-li $L \in \mathbb{R}$ *a existuje-li nezáporná funkce* g *taková, že* $\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$ *a*

$$|f(x_0 + \rho \cos\varphi \sin\vartheta, y_0 + \rho \sin\varphi \sin\vartheta, z_0 + \cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ *z nějakého pravého ryzího okolí bodu* 0 *a každé* $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, *pak platí*

$$\lim_{[x,y,z] \to [x_0,y_0,z_0]} f(x, y) = L.$$

Definice 7

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^* \in \overline{M}$. Potom $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in M}} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in (\mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}) \cap M : \; f(x) \in \mathcal{O}(L, \varepsilon).$$

Příklad 6

Z teorie funcí jedné proměnné známe jednostranné limity

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in [x_0, \infty)}} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Definice 8

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x^* \in \mathbb{R}^n$.

- Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě x^**, jestliže

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*).$$

- Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je *spojitá na M*, je-li spojitá v každém bodě množiny M.
- Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ není otevřená, pak řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x^*, jestliže $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in M}} f(x) = f(x^*)$.

Poznámka

Vzhledem k rovnosti $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in M}} f(x) = \lim_{x \to x^*} f(x)$ pro vnitřní body x^* množiny M, tedy můžeme definovat, že funkce f je spojitá na $M \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $x^* \in M$ platí $\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in M}} f(x) = f(x^*)$.

Pro funkce více proměnných platí analogie většiny základních vět o limitách (spojitosti) jako u funkce jedné proměnné, které lze odvodit (dokázat) přímo z definic.

Věta 3

Nechť $\lim_{x\to x^*} f(x) = L_1, \lim_{x\to x^*} g(x) = L_2, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, *potom*

- $\lim_{x\to x^*}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,
- $\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,
- $\lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *pokud* $L_2 \neq 0$.

Věta 4

$\lim_{x\to x^*} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$, *v němž je funkce* g *ohraničená, pak* $\lim_{x\to x^*}(f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Věta 5 (Věta o třech limitách)

Nechť pro funkce $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ v nějakém ryzím okolí bodu $x^* \in \mathbb{R}^n$ a současně

$$\lim_{x \to x^*} h(x) = \lim_{x \to x^*} g(x) = L.$$

Potom také

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = L.$$

Věta 6 (O limitě složeného zobrazení I)

Nechť pro funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *platí* $\lim_{x \to x^*} g(x) = L$ *a nechť funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá v bodě* L. *Potom*

$$\lim_{x \to x^*} f(g(x)) = f(L).$$

Věta 7 (O limitě složeného zobrazení II)

Nechť funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je definována v nějakém ryzím okolí bodu* x^*, *přičemž* $\lim_{x \to x^*} g(x) = L$ *a* $g(x) \neq L$ *pro* x *z nějakého ryzího okolí bodu* x^*. *Jestliže funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je definována v nějakém ryzím okolí bodu* L *a platí* $\lim_{x \to L} f(x) = M$, *potom*

$$\lim_{x \to x^*} f(g(x)) = M.$$

Věta 8 (Weierstrass)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní (tj. uzavřená a ohraničená) množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak

a) *f je na M ohraničená, tedy $f(M) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in M\}$ je ohraničená množina v $\mathbb{R}$, tj. $\exists K > 0 : |f(x)| < K\ \forall x \in M$.*

b) *Je-li*

$$m_1 = \sup_{x \in M} f(x), \qquad m_2 = \inf_{x \in M} f(x),$$

pak existují $x_1, x_2 \in M$ takové, že $f(x_1) = m_1, f(x_2) = m_2$, tj. f nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

Definice 9

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina (v libovolné metrice). Řekneme, že tato množina je *souvislá*, pokud pro všechna $x, y \in M$ existuje konečná posloupnost bodů $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y, x_i \in M$, taková, že lomená čára s vrcholy v bodech $x_0, \dots, x_n$ je celá v M.

Věta 9 (Bolzano)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená, souvislá množina a* $f : M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M,

a) *jsou-li* $x_1, x_2 \in M$ *takové, že* $f(x_1) \cdot f(x_2) \leq 0$, *pak existuje* $c \in M : f(c) = 0$,

b) *jsou-li* $x_1, x_2 \in M$ *libovolné a* $f(x_1) < f(x_2)$, *pak pro libovolné* $d \in (f(x_1), f(x_2))$ *existuje* $c \in M : f(c) = d$.

Definice 10

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + h, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě x^* *parciální derivaci* podle i-té proměnné x_i s hodnotou této limity.
Tuto derivaci značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*).$$

Poznámka

Derivace vyšších řádů zavádíme tak, že uvažujeme o parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jako o funkci, kterou derivujeme. Samozřejmě tato funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ musí existovat.

U funkce dvou proměnných $f(x, y)$ pak mluvíme např. o parciálních derivacích druhého řádu podle x

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$

nebo o smíšených derivacích $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = (f_x)_y$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = (f_y)_x$.

Poznámka

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f_x(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = f_y(x, y) = f'_y(x, y)$$

Příklad 7

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot y^2 \cdot \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2(\mathrm{e}^x \sin xy + \mathrm{e}^x \cos xy \cdot y) = y^2\, \mathrm{e}^x(\sin xy + y \cos xy)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x(2y \cdot \sin xy + y^2 \cdot \cos xy \cdot x) = \mathrm{e}^x\, y(2 \sin xy + xy \cos xy)$$

Příklad 8

Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Poznámka (Geometrický význam parciální derivace)

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ je směrnice křivky, která vznikne řezem grafu funkce rovinou $y = y^*$. V n-rozměrném prostoru„řežeme“ nadrovinou.

Poznámka

Pro funkce jedné proměnné plyne z existence derivace řada pěkných vlastností, např. spojitost, diferencovatelnost (lze sestrojit tečnu). Pro funkce více proměnných z existence parciálních derivací téměř nic pěkného neplyne, zejména z existence parciální derivace neplyne spojitost.

Příklad 9

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = 0 \lor y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(Vytrhneme osový kříž a posuneme ho o jedna nad rovinu xy.)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale funkce f není spojitá v bodě $[0,0]$.

Parciální derivace popisují vlastnosti pouze ve směrech os x a y.

Definice 11

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bod $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ a jednotkový vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x^* *směrovou derivaci* ve směru vektoru v, jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^* + v_1 h, \dots, x_n^* + v_n h) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x^* + vh) - f(x^*)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x^*) = f'(x^*, v).$$

Poznámka

Parciální derivace je speciálním případem směrové derivace s vektory $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'([x, y], e_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'([x, y], e_2).$$

Poznámka

Z existence směrových derivací $f'(x^*, v)$ v bodě x^* ve směru libovolného vektoru $v \in \mathbb{R}^n$ neplyne spojitost v bodě x^*. Stále se k bodu x^* blížíme jen po přímkách, což nemusí stačit. Např. pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

lze přímým výpočtem ukázat, že $f'([0,0], v) = 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^2$, ale limita $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, tedy f není spojitá v bodě $[0,0]$.

Věta 10 (Schwarzova věta)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojité smíšené parciální derivace* f_{xy}, f_{yx}*. Pak platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Dalším použitím Schwarzovi věty (tedy indukcí) lze vidět, že za příslušných podmínek platí např.

$$f_{xyzxyzx}(x, y, z) = f_{xxxyyzz}(x, y, z) = f_{zzyyxxx}(x, y, z).$$

(Nezáleží na pořadí, jen na počtu.)

Pokusme se získat dostatečnou podmínku pro spojitost.

Poznámka

Diferenciál pro $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je člen $A \cdot h$ ze vztahu $f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h)$, kde $A \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$. Pro diferencovatelné funkce máme $A = f'(x_0)$.

Podmínku diferencovatelnosti lze psát jako (existenci $A \in \mathbb{R}$ splňujícího)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

Definice 12

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$, je *diferencovatelná* v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže existují $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) - (Ah_1 + Bh_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

což je ekvivalentní existenci funkce $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) = (Ah_1 + Bh_2) + \tau(h_1, h_2),$$

přičemž

$$\lim_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{\tau(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Poznámka (Geometrický význam diferencovatelnosti – tečná rovina)

Rovnice roviny procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Označme $[x, y] := [x_0 + h_1, y_0 + h_2] \;\Rightarrow\; h_1 = x - x_0, h_2 = y - y_0$.
Pak místo $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = Ah_1 + Bh_2 + \tau(h_1, h_2)$ píšeme

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0),$$

tedy

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \tau(x - x_0, y - y_0),$$

což je rovnice roviny procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ plus „chyba" τ (τ je rozdíl mezi přírůstkem na tečné rovině a přírůstkem funkce).
Jedná se o lineární aproximaci tečnou rovinou.

Definice 13

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, výraz $Ah_1 + Bh_2$ se nazývá *diferenciál* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h_1, h_2)$, tedy $\mathrm{d}f(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a je lineární.

Věta 11

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 12

Je-li f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak v tomto bodě existují obě parciální derivace a platí $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A$ a $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$.

Věta 13 (Postačující podmínka diferencovatelnosti)

Má-li funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace f_x, f_y, pak je funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná.

Poznámka

Rovina $z = Ax + By + C$ splňující

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

je tečnou rovinou grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Rovina daná rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

v případě diferencovatelnosti funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ tento požadavek splňuje, jedná se tedy o *tečnou rovinu* grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Věta 14

Nechť f je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ je libovolný jednotkový vektor. Pak má funkce f v $[x_0, y_0]$ směrovou derivaci ve směru vektoru u a platí $f'([x_0, y_0], u) = f_x(x_0, y_0) \cdot u_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot u_2$.

Poznámka

Vektor prvních derivací nazýváme *gradient*. Je to vektor kolmý na vrstevnice, směřující k větším funkčním hodnotám. Např. pro funkci $f = f(x, y, z)$ je $\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$. Směrová derivace funkce f ve směru jednotkového vektoru $v = (v_1, v_2, v_3)$ je tedy

$$f'([x, y, z], v) = \langle \nabla f, v \rangle = f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3.$$

V případě, že vektor jednotkový není, nejprve ho normujeme $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$, potom

$$f'([x, y, z], v) = \langle \nabla f, \tilde{v} \rangle = \frac{f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Příklad 10

Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2}$.

$$f(x^* + h) \approx f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(h)$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ [x_0, y_0] = [3,4],\ h_1 = -0{,}02,\ h_2 = 0{,}05$$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_x(3,4) = \frac{3}{5}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y(3,4) = \frac{4}{5}$$

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \frac{3}{5}\cdot(-0{,}02) + \frac{4}{5}\cdot(0{,}05) = \frac{0{,}14}{5}$$

$$\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2} \approx \sqrt{9+16} + \frac{0{,}14}{5} = 5 + \frac{0{,}28}{10} = 5{,}028$$

■

Příklad 11

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ v bodě $[1, 1, 2]$.

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = |\text{pro } [x, y] = [1, 1]| = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = |\text{pro } [x, y] = [1, 1]| = 3$$

tedy $z - 2 = 3(x - 1) + 3(y - 1) \Rightarrow z = 3x + 3y - 4$ ■

Připomeňme si koncept primitivní funkce pro funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což je funkce F taková, že $F' = f$.

Uvažujme funkce $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Existuje funkce $H = H(x, y)$ taková, že

$$H_x = P, \qquad H_y = Q,$$

neboli $\mathrm{d}H = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$?

Věta 15

Nechť $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají spojité parciální derivace* P_y, Q_x *a platí*

$$P_y = Q_x.$$

Pak existuje funkce $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *taková, že* $H_x = P, H_y = Q$*, tj.*

$$\mathrm{d}H(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Definice 14

Funkce H z věty 15 se nazývá *kmenová funkce* funkcí P a Q.

Příklad 12

Rozhodněte, zda ke dvojici funkcí

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \qquad Q(x,y) = 5 - 2xy$$

existuje kmenová funkce. Pokud existuje, tak ji určete.

Kmenová funkce H existuje, neboť $P_y = -2y = Q_x$.
Protože $H_x = P$, máme

$$H(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y).$$

Nyní využijeme znalosti $H_y = Q$ k určení $C(y)$, tj.

$$H_y = -2xy + C_y'(y) = Q = 5 - 2xy \;\Rightarrow\; C_y'(y) = 5 \;\Rightarrow\; C(y) = 5y + c,\; c \in \mathbb{R}.$$

Tedy $H(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y + c,\; c \in \mathbb{R}$.
Samozřejmě lze nejdříve využít Q a poté P, tj. $H(x,y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, kde potom $C = C(x)$. ■

Exaktní diferenciální rovnice

Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}.$$

Přepsáním na

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}, \quad a(x,y)\,\mathrm{d}x - b(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}H(x,y) = 0$$

vidíme, že pokud platí $a_y(x,y) = -b_x(x,y)$, pak rovnici vyřešíme nalezením příslušné kmenové funkce H. Její řešení je pak dáno implicitně vztahem $H(x,y) = c$ a říkáme, že jde o *exaktní diferenciální rovnici*.

Kmenová funkce tří a více proměnných

Kmenovou funkci zavádíme analogicky i pro funkce více než dvou proměnných. Uvažujme např. $P, Q, R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a hledejme funkci $H = H(x, y, z)$ splňující

$$\mathrm{d}H = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z, \qquad \text{tj.} \qquad H_x = P, H_y = Q, H_z = R.$$

Protože $H_{xy} = P_y, H_{yx} = Q_x, H_{zx} = R_x, H_{xz} = P_z, H_{yz} = Q_z, H_{zy} = R_y$, ověříme podmínky ve tvaru

$$P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$$

a postupujeme analogicky jako u funkcí dvou proměnných, pouze ve třech krocích místo dvou. První krok např.

$$H(x, y, z) = \int R(x, y, z)\,\mathrm{d}z, \qquad \text{kde potom} \qquad C = C(x, y).$$

Připomeňme situaci pro $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Věta 16

Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0 a funkce g má derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak složená funkce

$$F(x) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$

má derivaci v bodě x_0 a platí, že

$$F'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Věta 17

Nechť $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají parciální derivace prvního řádu v* $[x_0, y_0]$ *a* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je diferencovatelná v bodě* $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$*. Pak má funkce* $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ *parciální derivace prvního řádu v bodě* $[x_0, y_0]$ *a platí*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Poznámka

Pro $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ lze zkráceně psát např.
$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$, nebo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Příklad 13

Určete parciální derivace z_x a z_y funkce

$$z = \mathrm{e}^u \cdot \sin v, \qquad \text{kde} \qquad u = xy, \quad v = x - y.$$

$$\begin{aligned} z_x &= z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x \\ &= \mathrm{e}^u \cdot \sin v \cdot y + \mathrm{e}^u \cdot \cos v \cdot 1 = \mathrm{e}^{xy}[y \sin(x-y) + \cos(x-y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_y &= z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y \\ &= \mathrm{e}^u \cdot \sin v \cdot x + \mathrm{e}^u \cdot \cos v \cdot (-1) = \mathrm{e}^{xy}[x \sin(x-y) - \cos(x-y)] \end{aligned}$$

■

Příklad 14

Zavedením nových proměnných $u = x + y, v = x - y$ najděte všechny diferencovatelné funkce $f(x, y)$, splňující vztah

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) = 0.$$

Hledáme funkci $f(x, y) = z = z(u(x, y), v(x, y))$, kde

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = z_u + z_v, \\ f_y(x, y) &= z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = z_u - z_v \end{aligned}$$

splňují $0 = z_x + z_y = 2\,z_u$, tedy $z_u = 0$ a z je funkcí proměnné v (nezávisí na u). Můžeme tedy psát $z = g(v)$. Řešením je

$$f(x, y) = g(x - y),$$

kde g je libovolná diferencovatelná funkce. ∎

Poznámka

Připomeňme, že pro funkce jedné proměnné máme

$$\left[f'(g(x)) \cdot g'(x)\right]' = f''(g(x)) \cdot g'^2(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x).$$

Věta 18

Nechť $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mají druhé parciální derivace v bodě* $[x_0, y_0]$ *a* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má spojité druhé parciální derivace v bodě* $[u_0, v_0] = [u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]$.

Pak $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ *má druhé parciální derivace v bodě* $[x_0, y_0]$ *a platí*

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= z_{uu} u_x^2 + 2 z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx},\\
z_{xy} &= z_{uu} u_x u_y + z_{uv} u_x v_y + z_{vu} u_y v_x + z_{vv} v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} = z_{yx},\\
z_{yy} &= z_{uu} u_y^2 + 2 z_{uv} u_y v_y + z_{vv} v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}.
\end{aligned}
$$

Poznámka

Ve vzorcích je $z = z(u_0, v_0)$, $u = u(x_0, y_0)$ a $v = v(x_0, y_0)$, totéž pro parciální derivace.

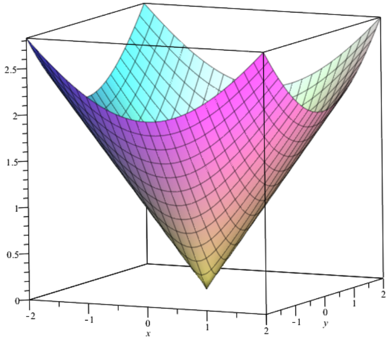
Definice 15

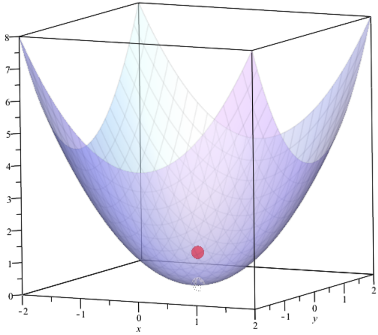
Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum* právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
- Funkce f má v bodě x_0 *lokální minimum* právě tehdy, když existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$.
- Funkce f má v bodě x_0 *lokální extrém*, jestliže má v tomto bodě lokální maximum nebo minimum.
- Jsou-li nerovnosti ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních extrémech.

Příklad 15

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
  má v $[0,0]$ lokální minimum, ale nemá tam parciální derivace
- $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & [x,y] \neq [0,0] \\ 1 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$
  má v $[0,0]$ lokální maximum, ale není tam spojitá





Definice 16

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže existují parciální derivace v x_0 a platí

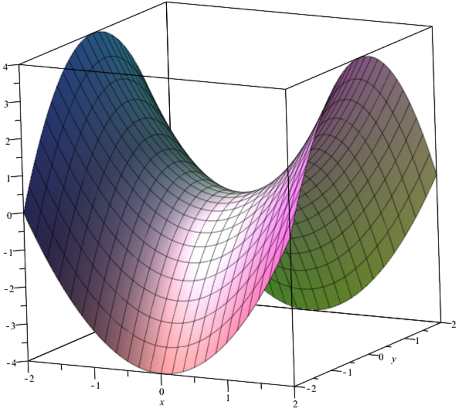
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Věta 19 (Fermatova věta, nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Jestliže má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existují v x_0 všechny její parciální derivace prvního řádu, pak je x_0 stacionární bod.

Poznámka

Extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde neexistuje aspoň jedna parciální derivace. Ve stacionárním bodě extrém být ale nemusí.



$f(x, y) = x^2 - y^2$ má v $[0, 0]$ typický sedlový bod

Věta 20

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a v jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a* $[x_0, y_0]$ *je stacionární bod.*

- *Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0,$$

  pak má funkce f *v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém, a to minimum, když* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, *nebo maximum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- *Jestliže* $D(x_0, y_0) < 0$, *pak* f *nemá v* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém.*

Příklad 16

Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Určíme stacionární body.
   $f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2$,
   $f_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = y^2$.
   Odtud $x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ (\rightarrow y = 0)$,
   $x_2 = 1\ (\rightarrow y = 1), x_{3,4} \in \mathbb{C} \Rightarrow P_1 = [0, 0], P_2 = [1, 1]$.
2. Spočítáme druhé derivace.
   $f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3.$
3. Vyhodnotíme pomocí $D(x, y)$.
   $D(x, y) = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 36xy - 9$, takže
   $D(0, 0) = -9 < 0 \ \Rightarrow\ [0, 0]$ není extrém,
   $D(1, 1) = 27 > 0 \ \Rightarrow\ [1, 1]$ je extrém a vzhledem k $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$
   jde o minimum.

∎

Samozřejmě může nastat případ $D(x,y)=0\dots$

Příklad 17

Určete extrémy funkce $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

1. $f_x=4x^3-2x-2y=0, \quad f_y=4y^3-2x-2y=0 \;\Rightarrow$
   $$x^3-y^3=0 \;\Leftrightarrow\; x^3=y^3 \;\Leftrightarrow\; x=y, \text{ pak}$$
   $$4x^3-2x-2x=0 \;\Rightarrow\; x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)=0 \;\Rightarrow$$
   $$P=[0,0], Q=[1,1], R=[-1,-1].$$
2. $f_{xx}=12x^2-2, \quad f_{yy}=12y^2-2, \quad f_{xy}=-2.$
3. $D(x,y)=(12x^2-2)(12y^2-2)-(-2)^2$, tedy
   $R: D(-1,-1)=96>0,\; f_{xx}(-1,-1)=10>0 \;\Rightarrow$ ostré lok. min.,
   $Q: D(1,1)=96>0, f_{xx}(1,1)=10>0 \Rightarrow$ ostré lok. min.,
   $P: D(0,0)=0 \;\Rightarrow\;$ nelze použít větu 20.

Rozhodneme přímo podle chování funkce v okolí bodu $[0,0]$.

- Hodnota v bodě P je $f(0,0)=0$.
- Jestliže $y=-x$, pak

$$f(x,y)=x^4+x^4-x^2+2x^2-x^2=2x^4>0 \quad \text{pro} \quad x\neq 0.$$

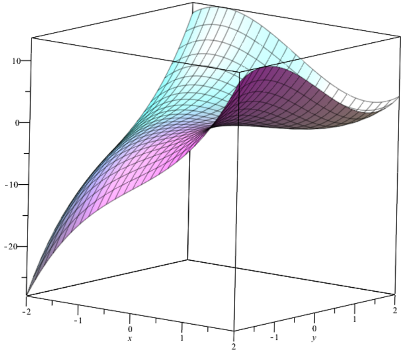
- Jestliže $y=0$, pak

$$f(x,y)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)<0 \quad \text{pro} \quad x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

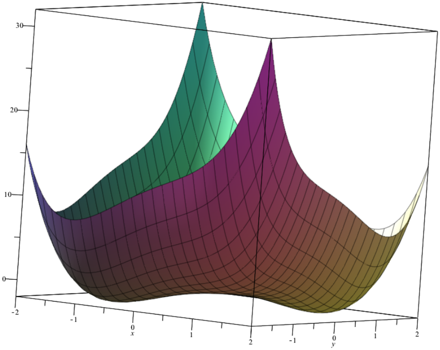
V každém okolí $\mathcal{O}([x_0,y_0])$ tedy existují body $[x_1,y_1],[x_2,y_2]$ takové, že

$$f(x_1,y_1)<f(0,0)<f(x_2,y_2).$$

V bodě P tedy není extrém. ■



$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$



$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

Definice 17

Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ je symetrická, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ je vektor a uvažujme kvadratickou formu

$$P(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j .$$

Pak $P(h)$ je

- *pozitivně (negativně) semidefinitní*, je-li

$$P(h) \geq 0 \; (P(h) \leq 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

- *pozitivně (negativně) definitní*, je-li

$$P(h) > 0 \; (P(h) < 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

- *indefinitní*, jestliže

$$\exists h, k \in \mathbb{R}^n : P(h) > 0 \wedge P(k) < 0.$$

Věta 21

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce se spojitými parciálními derivacemi druhého řádu v bodě $x^* = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a nějakém jeho okolí. Nechť je navíc x^* stacionárním bodem (tj. parciální derivace prvního řádu jsou v něm rovny nule). Pak

1. *v x^* je ostré lokální minimum (maximum), jestliže $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ je pozitivně (negativně) definitní, kde*
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x^*) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \right)_{i,j=1}^{n} =: f''(x^*);$$
2. *v x^* není extrém, jestliže $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ je indefinitní;*
3. *jestliže v x^* je extrém, pak $P(h)$ je pozitivně (negativně) semidefinitní.*

Matice A se nazývá *Hessova matice* (a značí se $\nabla^2 f$).

Věta 22 (Sylvesterovo kritérium, připomenutí)

Uvažujme kvadratickou formu $P(h) = \langle Ah, h\rangle$ danou symetrickou maticí A.

- *P je pozitivně (negativně) definitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A kladná (záporná).*
- *P je pozitivně (negativně) semidefinitní právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná (nekladná).*
- *P je pozitivně definitní právě tehdy, když jsou všechny vedoucí hlavní minory matice A kladné.*
- *P je negativně definitní právě tehdy, když vedoucí hlavní minory matice A střídají znaménka počínaje záporným.*

Pro $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ jsou vedoucí hlavní minory determinanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \det A.$$

Často se místo o definitnosti formy P mluví o definitnosti matice A.

Definice 18

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *absolutní minimum (maximum)* v M, jestliže

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (f(x_0) \geq f(x)) \quad \forall x \in M.$$

Jestliže platí ostré nerovnosti, mluvíme o ostrých absolutních extrémech pro $\forall x \in M, x \neq x_0$. Také se používá název globální extrémy.

Věta 23

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní podmnožině M svého definičního oboru. Pak f nabývá svého absolutního minima i maxima na M buď v bodech lokálních extrémů v M nebo na hranici M.

Příklad 18

Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 4 - x\}$.

Lokální extrémy

$$f_x = y - 2x + 1 = 0, \quad f_y = x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ y = 2x - 1\ \Rightarrow\ x - 2(2x-1) + 1 = 0\ \Rightarrow\ x = 1\ \Rightarrow\ y = 1\ \Rightarrow\ [1,1]$$

$$D(x,y) = (-2)(-2) - 1^2 = 3 > 0, \quad f_{xx} = -2 < 0$$

$\Rightarrow$ V bodě $A = [1,1]$ je lokální maximum s hodnotou $f(1,1) = 1$.

Hranice

1. $x = 0, y \in [0,4] \;\Rightarrow\; f(x,y) = f(0,y) = -y^2 + y = u(y)$, hledáme tedy extrémy funkce jedné proměnné $u(y), y \in [0,4]$.
   $u'(y) = -2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}, u''(y) = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ lok. max. s hodnotou $u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ a krajní body $u(0) = 0, u(4) = -12$.
   Máme tedy body $B = [0, \frac{1}{2}], C = [0,0], D = [0,4]$.
2. $y = 0, x \in [0,4] \;\Rightarrow\; f(x,y) = f(x,0) = -x^2 + x = v(x)$,
   $v'(x) = -2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}, u''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ lok. max. s hodnotou $v(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ a krajní body $v(0) = 0, v(4) = -12$. Máme tedy body $E = [\frac{1}{2}, 0], F = C = [0,0], G = [4,0]$.
3. $y = 4-x, x \in [0,4] \Rightarrow f(x,y) = f(x, 4-x) = -3x^2+12x-12 = \varphi(x)$,
   $\varphi'(x) = -6x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2, \varphi''(x) = -6 < 0 \;\Rightarrow\;$ lok. max. s hodnotou $\varphi(2) = 0$ a krajní body $\varphi(0) = -12, \varphi(4) = -12$. Máme tedy body $H = [2,2], I = D = [0,4], J = G = [4,0]$.

Porovnání hodnot v jednotlivých bodech

↪ Absolutní minimum $f(x, y) = -12$ v bodech $[0, 4], [4, 0]$.
↪ Absolutní maximum $f(x, y) = 1$ v bodě $[1, 1]$.