Diferenciální rovnice

Petr Hasil

Přednáška z MB152

Obsah

1. Diferenciální rovnice
   - Úvod
   - Rovnice se separovatelnými proměnnými
   - Lineární rovnice
   - Aplikace lineárních rovnic

Definice 1

Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se neznámá funkce vyskytuje spolu se svými derivacemi. *Řád diferenciální rovnice* je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytne.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Budeme se zabývat rovnicemi prvního řadu.

Rovnice prvního řádu

- Obecný tvar je $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných.
- Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci je $y' = f(x, y)$, kde f je funkce dvou proměnných.

Definice 2

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (popř. $y = y(t)$, $y = y(x, t)$,...), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic získáme obvykle pomocí integrování, proto budou obsahovat integrační konstanty (tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá *partikulární*.

Poznámka

- Řešení diferenciálních rovnic jsou spojité funkce (existují jejich derivace).
- Rovnice $y' = f(x)$ nemá jediné řešení (primitivní funkce tvoří množinu). Pokud uvažujeme podmínku, že $F(x)$ má procházet určitým bodem, pak má rovnice jedno řešení. Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a rovnice s touto podmínkou *počáteční problém* (Cauchyho úloha).
- Výpočet primitivní funkce $y = \int f(x)\mathrm{d}x$ odpovídá řešení rovnice $y' = f(x)$.
- $y' = y$ má řešení $y = c \cdot \mathrm{e}^x$.
- $y'' + y = 0$ slouží k popisu malých kmitů matematického kyvadla. Řešení jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ a každá lineární kombinace těchto dvou funkcí, tedy řešení tvoří lineární prostor.

Klasifikace

- Podle počtu nezávisle proměnných na obyčejné (ODR) a parciální (PDR) diferenciální rovnice.
- Podle linearity na lineární a nelineární diferenciální rovnice.
- Podle řádu (rovnice *n*-tého řádu).

Příklad 1

- $ms'' = F$, kde $s = s(t)$ je poloha bodu na přímce, dráha (Newtonův zákon)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, kde $u = u(x,t)$ je teplota v čase t v bodě x na přímce (vedení tepla v tyči)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, kde $u = u(x,t)$ je pozice vzhledem ke klidové poloze, vychýlení v čase t v bodě x na přímce (vlnová rovnice)
- $\theta'' + \alpha \sin\theta = 0$, kde $\theta = \theta(t)$ je úhel (matematické kyvadlo)
- $Q' = -kQ$, kde $Q = Q(t)$ je množství radioaktivní látky (radioaktivní rozpad)

Speciální případy

- $f(x,y) = f(x)$, tj. $y' = f(x)$
  Odpovídá hledání primitivní funkce k $f(x)$, tedy $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Problém
  $$y' = f(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$
  má řešení
  $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t.$$
- $f(x,y) = g(y)$, tj. $y' = g(y)$
  Lze převést na předchozí případ využitím inverzní funkce.
  $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0,$$
  tedy máme problém (1) pro funkci $x(y)$ s řešením
  $x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$, což implicitně udává funkci $y = y(x)$.

Příklad 2

Vyřešte rovnice

1. $y' = 3x^2 + \sin x$,
2. $y' = \frac{7}{\mathrm{e}^y + 4y - 3}$.

1. $y = \int 3x^2 + \sin x \, \mathrm{d}x = x^3 - \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
2.

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{\mathrm{e}^y + 4y - 3}{7} \\
x &= \frac{1}{7} \int \mathrm{e}^y + 4y - 3 \mathrm{d}y = \frac{1}{7}(\mathrm{e}^y + 2y^2 - 3y) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\
7x &= \mathrm{e}^y + 2y^2 - 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Rovnicí se separovatelnými proměnnými budeme nazývat rovnici $y' = f(x)g(y)$.

Způsob řešení

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x) \cdot g(y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)} \\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Big/ \text{integrace} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} + c_1 &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \\
G(y) &= F(x) + c \quad (c = c_2 - c_1)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Explicitní řešení pak lze často zapsat ve tvaru $y(x) = G^{-1}\big[F(x) + c\big]$.

Tvrzení 1 (O řešitelnosti rovnice se separovanými proměnnými)

Jsou-li funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *a* $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *spojité a* $g(y) \neq 0$ *na intervalu* (c, d), *potom má počáteční úloha*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je dáno implicitně vztahem (2). *Konstanta se určí z počáteční podmínky* $y(x_0) = y_0$.

Příklad 3

Vyřešme $y' = \frac{y^2-y}{x}$, tedy $f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = y^2 - y$.

Máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro} \quad y^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge y \neq 1.$$

Vypočítáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y-1| - \ln|y| + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_2.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\ln|y-1| - \ln|y| + c_1 &= \ln|x| + c_2 \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln|x| + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= |x| \cdot \mathrm{e}^{c_3} \\
\frac{y-1}{y} &= \pm\,\mathrm{e}^{c_3} \cdot x = c \cdot x, \quad c \neq 0 \\
y &= \frac{1}{1-cx}, \quad c \neq 0.
\end{aligned}
$$

Během výpočtu jsme udělali předpoklad, že $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Zkontrolujeme, zda nejde také o řešení rovnice:

- $y = 1$ je řešením a dostaneme jej pro $c = 0$,
- $y = 0$ je řešením, ale nijak jej nedostaneme,

tedy

$$\underbrace{y = \frac{1}{1 - cx},}_{\text{obecné řešení}} \quad \underbrace{y = 0,}_{\text{singulární řešení}} \quad c \in \mathbb{R}$$

(Obecné řešení obsahuje tolik konstant, jako byl řád rovnice.) ■

Příklad 4

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1$$

Počáteční problém – vypočítáme obecné řešení a pak použitím počáteční podmínky určíme (vybereme) řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Podmínka $y(0) = 1$ dává $\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + c \Rightarrow c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Odtud dostáváme řešení

$$y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a užitím vzorce $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ ho lze upravit na

$$y = \frac{x+1}{1-x}.$$

■

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici se separovanými proměnnými. Např. diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$ ($u = u(x)$ je funkce proměnné x) převede na rovnici se separovanými proměnnými.
Pomocí pravidla pro derivaci součinu dostaneme

$$\begin{aligned} u\cdot x = y \qquad &\Rightarrow \qquad u'\cdot x + u = y' \qquad \Rightarrow \qquad u'\cdot x + u = f(u) \\ &\Rightarrow \qquad \frac{du}{\mathrm{d}x}x = f(u) - u \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{f(u)-u}\,du = \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

a poslední uvedená rovnice má separované proměnné (x a u).

Příklad 5

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Volbou $u = \frac{y}{x}$, neboli $y = u \cdot x$, dostaneme $y' = u' \cdot x + u$ a po dosazení do rovnice

$$u' \cdot x + u = 1 + u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad u = \ln|x| + C.$$

Zpětným dosazením za proměnnou u pak dostaneme hledané řešení

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = x \ln|x| + C\,x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.)

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru (linearita vzhledem k y)

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{LDR}$$

Definice 3

Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*

$$u' = a(x)u, \tag{hLDR}$$

v opačném případě o *nehomogenní lineární rovnici*.

Poznámka

Obecné řešení rovnice (LDR) (tj. řešení závisející na jedné integrační konstantě) je tvaru $y = y_p + u$, kde y_p je nějaké řešení rovnice (LDR), tzv. *partikulární řešení*, a u je *obecné řešení* rovnice (hLDR).

Obecná metoda řešení je tzv. variace konstant, kdy se nejprve vyřeší homogenní rovnice metodou separace proměnných. Poté se v jejím řešení aditivní konstanta nahradí za neznámou funkci, kterou lze najít dosazením do původní rovnice a integrováním. Tento postup v jistém zobecnění funguje i pro některé rovnice vyšších řádů.
Nás zajímají pouze rovnice prvního řádu, proto použijeme metodu *integračního faktoru*.

Integrační faktor

Pro rovnici

$$y' = a(x)y + b(x)$$

je integrační faktor

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Touto funkcí celou rovnici vynásobíme a následně upravujeme.

Postup

$$y' - a(x)\, y = b(x)$$

$$\big[y' - a(x)\, y\big] \cdot \mu(x) = b(x) \cdot \mu(x)$$

$$\underbrace{y' \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - y\, a(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{\left(y \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)'} = b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$y \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c$$

$$y = \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} \left[\int b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right], \quad c \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Tvrzení 2 (O řešitelnosti lineární rovnice 1. řádu)

Jsou-li koeficienty $a(x)$ a $b(x)$ spojité funkce na intervalu (a, b), potom má počáteční úloha

$$y' = a(x)\,y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu (a, b) definováno vztahem (3). *Konstanta c se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.*

Příklad 6

Vyřešte rovnici

$$y' = 4xy + (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x^2}.$$

Integrační faktor je $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int 4x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Vynásobíme jím rovnici se ziskem (vše obsahující y je převedeno doleva)

$$y'\,\mathrm{e}^{-2x^2} - 4xy\,\mathrm{e}^{-2x^2} = 2x+1,$$

odtud

$$\left(y\,\mathrm{e}^{-2x^2}\right)' = 2x+1.$$

Obě strany zintegrujeme

$$y\,\mathrm{e}^{-2x^2} = \int 2x+1\ \mathrm{d}x = x^2+x+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Řešením je tedy

$$y = (x^2+x+c)\,\mathrm{e}^{2x^2}, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici lineární. Například tzv. *Bernoulliova rovnice*

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^r$$

se pomocí substituce $u = y^{1-r}$ ($u = u(x)$ je funkce proměnné x) převede na rovnici lineární. Je-li $r > 0$, pak má rovnice také řešení $y \equiv 0$, které není zahrnuté v obecném řešení.

Příklad 7

Vyřešte diferenciální rovnici $y' = 3y - x\,y^2$.

Jedná se zřejmě o Bernoulliovu rovnici s $r = 2$. Substitucí $u = y^{-1} = \frac{1}{y}$ dostaneme $u' = -y^{-2}y' = -\frac{y'}{y^2}$ a tedy daná rovnice se převede na tvar

$$y' = 3y - x\,y^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{y'}{y^2} = -3\,\frac{1}{y} + x \qquad \Rightarrow \qquad u' = -3u + x.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x)$, jejíž řešení je

$$u = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x}\,.$$

Zpětným dosazením za funkci u pak dostaneme řešení původní rovnice

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,\mathrm{e}^{-3x}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.)
Nezapomeňte také na řešení $y \equiv 0$.

Dalším trikem, který někdy může pomoci převést danou rovnici na lineární diferenciální rovnici, je záměna nezávislé a závislé proměnné x a y. Tedy místo hledání řešení jako funkce $y = y(x)$ jej budeme hledat jako funkci $x = x(y)$. Výsledkem postupu je řešení zadané pomocí inverzní funkce.

Příklad 8

Vyřešte diferenciální rovnici $y' = \frac{1}{y^2-2x}$.

Tato rovnice není lineární diferenciální rovnice. Platí ale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y^2-2x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -2x + y^2,$$

kde poslední rovnice je lineární pro neznámou funkci $x = x(y)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru, tj. $\mu(y) = \mathrm{e}^{2y}$. Řešení je potom tvaru (po dvojnásobné integraci per partes v integrálu $\int y^2\, \mathrm{e}^{2y}\, \mathrm{d}y$)

$$\boxed{x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} + C\,\mathrm{e}^{-2y}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice. Derivaci y' lze získat z pravidla pro derivování implicitní funkce.)

Příklad 9 (Růst, učení,...)

Jistý druh roste tak, že má jistou maximální délku a rychlost růstu je přímo úměrná délce, kterou ještě mají dorůst. Sestavte rovnici modelující tuto situaci.

Označíme-li délku v čase t jako funkci $\ell(t)$ a maximální délku L, pak příslušná rovnice je

$$\ell'(t) = k[L - \ell(t)],$$

kde konstantu úměrnosti k by bylo nutné určit experimentálně (měření a výpočet pro konkrétní druh/situaci).

Příklad 10 (Výměna tepla mezi tělesem a okolím)

Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí za předpokladu, že teplota lidského těla je 37 °C.

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3,\ \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)},\ \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad \Rightarrow \quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru $\mu(t) = \mathrm{e}^{kt}$, potom

$$\Theta = T + c\ \mathrm{e}^{-kt} = 18.3 + c\ \mathrm{e}^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Konstanty c a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + c\ \mathrm{e}^{0} = 18.3 + c \ \Rightarrow\ c = 8.3 \ \Rightarrow\ \Theta = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-3k} \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337$$

$$\Rightarrow\ -3k = \ln 0.337 \ \Rightarrow\ k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\Theta(t) = 18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t}\,.$$

Najdeme čas úmrtí, tj. určíme čas t, pro který je $\Theta(t) = 37\ ^\circ\mathrm{C}$. Tedy

$$18.3 + 8.3\ \mathrm{e}^{-0.362t} = 37 \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253$$

$$\Rightarrow\ -0.362t = \ln 2.253 \ \Rightarrow\ t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. ■

Příklad 11 (Míchání dvou látek)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \cdot v = 50 \ \ [\mathrm{g/l}] \ \cdot 20 \ \ [\mathrm{l/min}] \ = 1000 \ \ [\mathrm{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \ \ [\mathrm{g/l}] \ \cdot 20 \ \ [\mathrm{l/min}] \ = \frac{Q(t)}{50} \ \ [\mathrm{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{4}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v}{L}\, dt} = \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{50}\, dt} = \mathrm{e}^{0.02\, t}$$

a potom máme (obecně)

$$\begin{aligned} Q' + \frac{v}{L}\, Q &= c\, v \\ Q'\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} + \frac{v}{L}\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}\ Q &= c\, v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} \\ \left(Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}\right)' &= c\, v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} \\ Q\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t} &= \int c\, v\ \mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}\ dt = c\, v\, \frac{\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\, t}}{\frac{v}{L}} + C \\ Q &= c\, L + C\ \mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\, t}, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

a pro náš konkrétní příklad

$$
\begin{aligned}
Q' + 0.02\,Q &= 1000,\\
Q'\ e^{0.02\,t} + 0.02\ e^{0.02\,t}\ Q &= 1000\ e^{0.02\,t},\\
\left(Q\ e^{0.02\,t}\right)' &= 1000\ e^{0.02\,t},\\
Q\ e^{0.02\,t} = \int 1000\ e^{0.02\,t}\ dt &= 1000\,\frac{e^{0.02\,t}}{0.02} + C,\\
Q &= 50000 + C\ e^{-0.02\,t}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

A protože je počáteční množství známo v (4), pro integrační konstantu C platí

$$Q_0 = Q(t_0) = c\,L + C\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = Q(0) = 50000 + C\,\mathrm{e}^{0},$$
$$C = (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{\frac{v}{L}\,t_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 - 50000\,\mathrm{e}^{-0.02\,t},$$
$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\mathrm{e}^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000\left(1 - \mathrm{e}^{-0.02\,t}\right).$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ c\,L + (Q_0 - c\,L)\, \underbrace{e^{-\frac{v}{L}(t-t_0)}}_{\to 0} \right\}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}]\ ,$$

tedy

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000 \left(1 - \underbrace{e^{-0.02\,t}}_{\to 0}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]\ .$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \text{neboli} Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). ■

Příklad 12 (Míchání dvou látek II)

Jak se změní model v Příkladu 11, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Všimněte si, že se nyní *objem* roztoku *v nádrži mění* (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000+t} \;\; [\mathrm{g/l}] \cdot 19 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = \frac{19\,Q(t)}{1000+t} \;\; [\mathrm{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)} \cdot w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000+t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (4).

Příslušný integrační faktor je

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{19}{1000+t}\,dt} = \mathrm{e}^{19\,\ln(1000+t)} = \mathrm{e}^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} &= 1000 \\
Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} &= 1000\,(1000+t)^{19} \\
\left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' &= 1000\,(1000+t)^{19} \\
Q\,(1000+t)^{19} &= 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C \\
Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} &= 50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}.
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (4) pak určíme hodnotu C, tj.

$$0 = Q(0) = 50 \cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \;\Rightarrow\; C = -50000 \cdot 1000^{19} = -5 \cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$Q = 50\,(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}.$$

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad [\mathrm{g}] \text{ soli},$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad [\mathrm{g}/\mathrm{l}],$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. ■